

01;03

Об особенностях гидродинамического сопротивления во вращающейся жидкости

© Л.Х. Ингель, М.В. Беляева

Научно-производственное объединение „Тайфун“,
249038 Обнинск, Калужская область, Россия
e-mail: ingel@typhoon.obninsk.ru

(Поступило в Редакцию 8 июня 2010 г. В окончательной редакции 18 октября 2010 г.)

Быстрое вращение жидкой среды может приводить к существенному увеличению эффективного коэффициента гидродинамического сопротивления в направлении вдоль оси вращения. Это продемонстрировано на ряде простых примеров возмущений, вызываемых силами, приложенными к несжимаемой жидкости. Гидродинамическое сопротивление во вращающейся среде может возрастать с уменьшением вязкости. Обсуждаются возможные проявления подобных эффектов в интенсивных атмосферных вихрях.

Введение

В настоящей работе рассматриваются некоторые особенности отклика вращающейся жидкости на действие неоднородных сил (источников количества движения), направленных вдоль оси вращения. Одно из возможных приложений таких задач относится к динамике интенсивных атмосферных вихрей относительно малых горизонтальных масштабов — смерчей и „пыльных дьяволов“. Эти вихри обладают особенностью, уникальной для всей геофизической гидродинамики: центробежная сила в них может быть сравнимой и даже значительно превышать силу тяжести. Это качество принципиально отличает их динамику даже от тропических ураганов (тайфунов).

Имеется много оснований полагать, что в динамике таких вихрей с вертикальной, в первом приближении, осью вращения значительную роль могут играть пространственно неоднородные силы плавучести. Например, само проявление смерча (торнадо), согласно многочисленным свидетельствам, нередко выглядит как постепенное опускание из „материнского облака“ быстро вращающегося „рукава“ [1–5]. Естественно предполагать, что такое нисходящее движение происходит в результате действия сил отрицательной плавучести (оседания охлажденного воздуха, возможно, вместе с каплями воды и частицами льда). Взаимодействие этого оседания с вращением, видимо, представляет собой достаточно важный и сложный процесс. Существует даже концепция, согласно которой смерч представляет собой, коротко говоря, „скрученный дождь“ [4], в динамике которого очень существенны отрицательные отклонения плавучести, связанные с весом капель.

Хорошо известна также способность смерчей поднимать и переносить тяжелые предметы [1–5]. Обычно это естественным образом связывают с сильным ветром и наличием в смерчах интенсивных восходящих движений воздуха. В настоящей работе обращается внимание на дополнительный механизм — возможность аномально высокого гидродинамического сопротивления вращаю-

щейся среды по отношению к силам, направленным вдоль оси вращения.

Физическая идея схематически пояснена на рис. 1. Пусть к некоторому объему жидкой среды приложена стационарная сила F , направленная для определенности вниз и сосредоточенная на некотором участке вертикальной оси вращения z . Это приведет к возникновению течения, примеры линий тока которого и горизонтальной зависимости вертикальной скорости для невращающейся

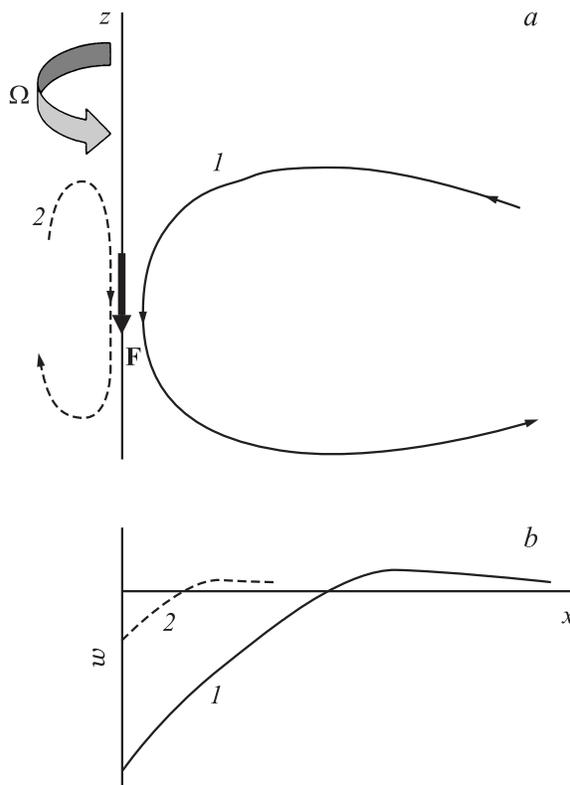


Рис. 1. Схематическое изображение циркуляций, возникающих в жидкой среде под влиянием неоднородной вертикальной силы: 1 — при отсутствия вращения, 2 — при наличии вращения. a — линии тока; b — горизонтальная зависимость вертикальной скорости.

среды схематически изображены на рис. 1, *a* и *b* соответственно (кривые 1). Вращение (наличие центробежной, кориолисовой силы) должно затруднять радиальные движения. Поэтому можно ожидать, что возникающая циркуляционная ячейка в этом случае будет в большей степени „прижата“ к вертикали, на которой действует сила (рис. 1, кривые 2). При этом кривые 1 и 2 на рис. 1, *b* должны быть в некотором смысле подобны. Например, в простейшем варианте задачи с плоской симметрией (когда приложенная сила не зависит от одной из горизонтальных координат *y*) кривые 1 и 2 на рис. 1, *b* должны составлять одинаковый угол с вертикальной осью, поскольку в обоих случаях заданы одинаковые силы (горизонтальные потоки количества движения). Поэтому можно ожидать, что значения вертикальной скорости *w* в двух рассматриваемых случаях (при отсутствии и при наличии вращения) будут различаться примерно пропорционально горизонтальным размерам возникающих циркуляционных ячеек, а эти размеры могут сильно зависеть от скорости вращения. Таким образом, от скорости вращения может сильно зависеть *w*, т. е. степень вовлечения в движение среды одной и той же вертикальной силой. Это означает зависимость от скорости вращения эффективного гидродинамического сопротивления среды. В настоящей работе показано, что эффект, о котором идет речь, проявляется уже в самых простых, легко анализируемых, гидродинамических моделях — в частности, в линеаризованных задачах для однородной несжимаемой жидкости.

Простейший пример

Пусть в однородной вращающейся несжимаемой жидкости помимо силы тяжести действует сила, направленная вдоль оси вращения *z*, локализованная в некотором ограниченном объеме. Система уравнений для осесимметричной задачи имеет вид [6,7]:

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + w \frac{\partial u_r}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\Delta u_r - \frac{u_r}{r^2} \right) + \frac{u_\varphi^2}{r},$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial r u_r}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial u_\varphi}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + w \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} = \nu \left(\Delta u_\varphi - \frac{u_\varphi}{r^2} \right) - \frac{u_r u_\varphi}{r},$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u_r \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \Delta w + g + F(r, z).$$

Здесь *t* — время, *r, z* — радиальная и вертикальная координаты, *u_r*, *u_φ*, *w* — радиальная, тангенциальная и вертикальная составляющие скорости соответственно, *p* — давление, *ρ* — плотность среды, *ν* — кинематический коэффициент вязкости, *g* — ускорение силы тяжести, *F(r, z)* — заданная вертикальная сила (нормированная на плотность). При отсутствии вязкости

имеется стационарное решение, в котором

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial r} = \frac{u_\varphi^2}{r}, \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial z} = F(r, z),$$

где символом со штрихом обозначено отклонение давления от фонового гидростатического. Давление находится интегрированием по *z* последнего уравнения (требуется граничное условие, например, затухание *p'* при *z* → ∞). Затем из предыдущего уравнения (циклострофического баланса) находится тангенциальная скорость. Радиальное и вертикальное движение в этом решении отсутствуют. Отсутствие движения в направлении действующей силы, согласно обычному определению гидродинамического сопротивления, формально эквивалентно бесконечному значению коэффициента сопротивления *c*:

$$F = c \rho w^2 S, \quad c = \frac{F}{\rho w^2 S} \xrightarrow{w \rightarrow 0} \infty,$$

где *S* — площадь поперечного сечения области приложения силы. По обычным представлениям, гидродинамическое сопротивление растет с ростом вязкости, в данном случае, наоборот, убывает: при ненулевой вязкости вертикальное движение в данной задаче появляется. Таким образом, интенсивно вращающаяся жидкость обладает в этом отношении необычными свойствами.

Постановка двумерной стационарной задачи

Пусть неограниченная несжимаемая однородная жидкая среда вращается с постоянной угловой скоростью вокруг вертикальной оси. Будем рассматривать линейный отклик среды на действие неоднородной по вертикали стационарной силы (источника количества движения), сосредоточенной на вращающейся с жидкостью плоскости (*y, z*). Линеаризованная двумерная система уравнений динамики и неразрывности во вращающейся с жидкостью системе отсчета имеет вид [6,7]:

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + f v, \quad (1)$$

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + F(z) \delta(x), \quad (2)$$

$$0 = \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) - f u, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (3)$$

Здесь *u, v, w* — составляющие скорости вдоль горизонтальных осей *x, y* и вертикальной оси *z* соответственно, *P* — возмущение давления, нормированное на плотность среды, *f* = 2Ω — параметр Кориолиса, Ω — угловая скорость „фонового“ вращения среды (предполагается постоянной, т. е. ниже рассматривается случай твердотельного вращения), δ — символ δ-функции Дирака. Величина *F* имеет здесь смысл заданной внешней силы,

нормированной на плотность среды и приходящейся на единицу поверхности вертикальной плоскости (y, z).

Имея в виду симметрию задачи относительно упомянутой плоскости, будем рассматривать решение в полуограниченной области $x > 0$. На границе предполагается выполнение условий

$$v \frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{1}{2}F(z), \quad u = v = 0, \quad \text{при } x = 0. \quad (4)$$

Предполагается, что вдали от области приложения силы (при $x \rightarrow \infty$) все возмущения затухают.

Решение

Для простоты рассмотрим случай гармонической зависимости приложенной силы от вертикальной координаты: $F(z) = 2F_0 \cos kz$, где смысл постоянных F_0 и k очевиден (множитель 2 введен для удобства расчетов). В соответствующем виде ищем и решение: $u(x, z) = U(x) \sin kz$, $v(x, z) = V(x) \sin kz$, $w(x, z) = W(x) \cos kz$, $P(x, z) = \Phi(x) \sin kz$. Система уравнений для амплитуд имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi}{dx} &= vDU + fV, \quad k\Phi = vDW, \quad vDV = fU, \\ \frac{dU}{dx} - kW &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

где оператор $D = \frac{d^2}{dx^2} - k^2$. Исключив из системы уравнений все неизвестные, кроме W , получим уравнение

$$\left(\frac{d^2}{k^2 dx^2} - 1 \right)^3 W = \text{Ta} W, \quad (6)$$

где $\text{Ta} = f^2/\nu^2 k^4$ — число Тэйлора. Ищем решение в виде линейной комбинации экспонент $\exp(\sigma_i kx)$. Соответствующее характеристическое уравнение имеет вид

$$(\sigma^2 - 1)^3 = \text{Ta}. \quad (7)$$

При отсутствии вращения ($\text{Ta} = 0$) все корни характеристического уравнения равны ± 1 . Решение в этом случае имеет вид

$$\begin{aligned} u &= \frac{F_0}{2kv} kx \exp(-kx) \sin kz, \\ w &= \frac{F_0}{2kv} (1 - kx) \exp(-kx) \cos kz, \\ P(x) &= F_0 \exp(-kx) \sin kz. \end{aligned} \quad (8)$$

Наибольший интерес представляет противоположный предельный случай быстрого вращения $\text{Ta} \gg 1$. В этом случае имеются три корня характеристического уравнения с отрицательными действительными частями:

$$\sigma_{1,2} \approx \left(-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i \right) \text{Ta}^{1/6}, \quad \sigma_3 \approx -\text{Ta}^{1/6}.$$

Введя обозначение, $B = \text{Ta}^{1/6}/2$, решение, с точностью до малого параметра B^{-1} , можно записать в виде:

$$\begin{aligned} u &\approx \frac{F_0}{12\nu kB^2} \left\{ [\sqrt{3} \sin(\sqrt{3}Bkx) + \cos(\sqrt{3}Bkx)] \right. \\ &\quad \left. \times \exp(-Bkx) - \exp(-2Bkx) \right\} \sin kz, \\ w &\approx \frac{F_0}{6\nu kB} \left\{ [-\sqrt{3} \sin(\sqrt{3}Bkx) + \cos(\sqrt{3}Bkx)] \right. \\ &\quad \left. \times \exp(-Bkx) + \exp(-2Bkx) \right\} \cos kz, \\ P &\approx \frac{2}{3} F_0 B \left\{ [\sqrt{3} \sin(\sqrt{3}Bkx) + \cos(\sqrt{3}Bkx)] \right. \\ &\quad \left. \times \exp(-Bkx) + \exp(-2Bkx) \right\} \sin kz, \\ v &\approx \frac{F_0}{6\nu kB} \left\{ [-\sqrt{3} \sin(\sqrt{3}Bkx) + \cos(\sqrt{3}Bkx)] \right. \\ &\quad \left. \times \exp(-Bkx) - \exp(-2Bkx) \right\} \sin kz. \end{aligned} \quad (9)$$

Анализ решений

В случае отсутствия вращения решение (8) представляет собой периодическую (по z) совокупность циркуляционных ячеек (типа кривой 1 на рис. 1, а) с пространственным масштабом порядка k^{-1} , определяемым масштабом неоднородностей приложенной силы. Поскольку у границы $x = 0$ имеет место баланс $\nu \left| \frac{\partial w}{\partial x} \right| \approx F_0$, откуда вытекают порядки величин составляющих скорости $|w| \approx |u| \approx F_0/\nu k$. Из баланса $\left| \frac{\partial P}{\partial z} \right| \approx \nu \left| \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right|$ при этом получается $|P| \approx F_0$.

Вращение, как и следовало ожидать, приводит к уменьшению горизонтальных размеров циркуляционных ячеек (примерно в B раз) — вместо $L \approx k^{-1}$ эти размеры становятся порядка

$$L_\Omega \approx \sqrt[3]{\frac{\nu}{fk}} \approx \sqrt[3]{\frac{\nu L}{f}} \sim \sqrt[3]{h_E^2 K}, \quad (10)$$

где $h_E = (\nu/f)^{1/2}$ — экмановский масштаб длины [7].

В такой же пропорции, как нетрудно получить и из простых балансных соотношений, уменьшается вертикальная скорость и увеличивается амплитуда возмущений давления. В этом случае имеется и вихревая составляющая скорости v , которая, однако, в рассматриваемом пределе не возрастает, а убывает с ростом скорости вращения среды. Таким образом, усиление фонового вращения среды приводит не только к ослаблению движений в плоскости x, z , но и к ослаблению вихревых возмущений, генерируемых благодаря наличию упомянутого фонового вращения. (При медленном фоновом вращении вихревые возмущения с усилением этого вращения, очевидно, должны усиливаться, поскольку при отсутствии вращения они отсутствуют. Следовательно,

существует промежуточное значение числа Тейлора, при котором вихревые возмущения генерируются вертикальными силами наиболее эффективно).

Поле вихревой скорости находится в приближенном геострофическом балансе [7] с полем возмущений давления: $v \approx \frac{1}{f} \frac{\partial p}{\partial x}$. Таким образом, сила вязкости в уравнении (1) при сильном вращении пренебрежимо мала; производные по z всюду малы по сравнению с производными по x . Интересно отметить равенство амплитуд v и w в (9). Иными словами, в данной задаче при интенсивном фоновом вращении вертикальная сила примерно в равной степени генерирует как вертикально направленные, так и горизонтальные вихревые возмущения скорости.

Нормированные радиальные зависимости возмущений (выражения в фигурных скобках в (9)) при $B = 10$ приведены на рис. 2. Возмущения сосредоточены в относительно тонком пограничном слое (толщиной порядка h_Ω), вытянутом по вертикали. Годограф скорости в этом погранслое приведен на рис. 3.

Вращение приводит к возникновению совокупности циркулярных ячеек, не только периодических по вертикали, но и заполняющих „в шахматном порядке“ всю плоскость (x, z) . В горизонтальном направлении эти ячейки быстро затухают с удалением от области приложения силы. Поэтому наиболее существенна первая из них. Последующим ячейкам отвечают затухающие колебания в поле скорости. Начало этих колебаний просматривается на кривых рис. 2 и 3.

Рассматриваемый эффект вращения становится заметным, когда число Тейлора больше или порядка единицы, т. е. при не слишком малых вертикальных масштабах L области приложения силы:

$$L \approx k^{-1} \gtrsim (v/f)^{1/2}. \quad (11)$$

Правая часть (11) формально совпадает с выражением для толщины экмановского пограничного слоя h_E [7],

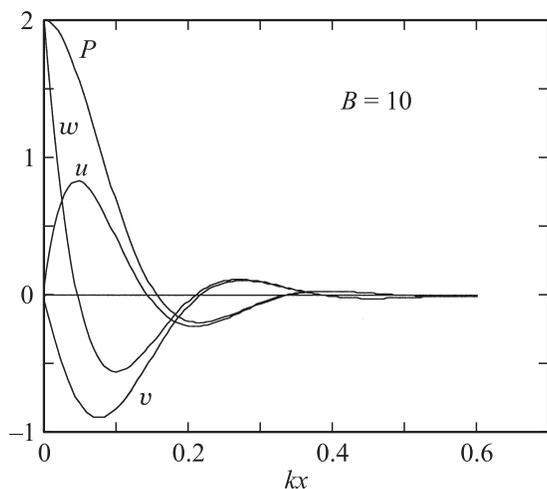


Рис. 2. Нормированные горизонтальные зависимости возмущений в случае интенсивного вращения среды ($B = 10$).

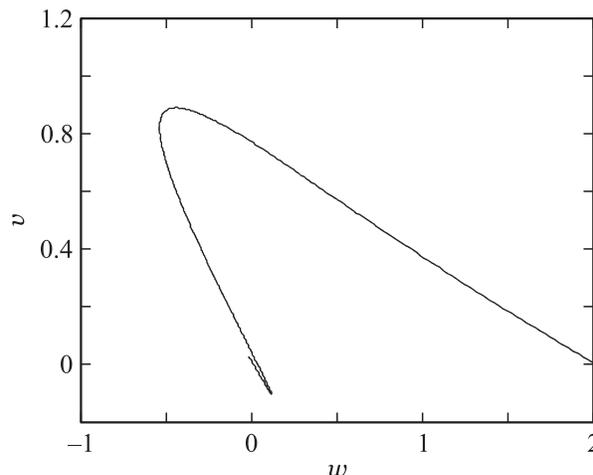


Рис. 3. Пример годографа скорости в циркулярной ячейке, деформированной вследствие интенсивного вращения ($B = 10$, $kz = -\pi/4$).

но его численное значение в случае интенсивных атмосферных вихрей на несколько порядков отличается от толщины планетарных пограничных слоев. Если принять, что характерный период вращения смерча составляет порядка 10 с (значения этого параметра в разных смерчах могут сильно различаться), то $f \approx 1 \text{ s}^{-1}$. Если ν — эффективный коэффициент турбулентного обмена, то для атмосферных условий можно принять $\nu \approx 1 \text{ m}^2/\text{s}$ (этот параметр оценивается весьма грубо, тем более — в экстремальных условиях интенсивного вихря, где одновременно большие сдвиги скорости генерируют турбулентность, а интенсивное вращение ее подавляет [8–10]). В этом случае правая часть (11) получается порядка 1 м. Таким образом, вращение оказывает заметное влияние уже на динамику весьма малых конвективных элементов (объемов воздуха с ненулевой плавучестью). Если рассматривать движение малых жидких или твердых частиц, то в оценках следует рассматривать молекулярный коэффициент кинематической вязкости воздуха $\nu \approx 1.5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$, и правая часть (11) получается порядка 3 м.

Учет вертикального перемещения приложенной силы

Выше рассмотрены течения, вызываемые заданной стационарной силой. Если рассматривать динамику плавучих элементов (предельным случаем являются оседающие тяжелые частицы), то связанная с ними приложенная к воздуху сила перемещается вместе с этими элементами. Рассмотренную выше задачу можно обобщить на случай, когда заданная приложенная сила перемещается по вертикали с некоторой постоянной скоростью \bar{W} . В этом случае надо рассматривать нестационарную задачу с $F = F(z - Wt)$. Такое обобщение не представляет принципиальной трудности, хотя и требует

более громоздких расчетов. Помимо числа Тэйлора $Ta = f^2/\nu^2 k^4$ данная задача зависит от еще одного безразмерного параметра $S = \bar{W}/k\nu$. Если (простейший вариант) рассматривать вертикальную силу в виде бегущей волны

$$F = F_0 \exp[i(kz - \omega t)], \quad \omega = k\bar{W},$$

то вместо (7) получается характеристическое уравнение

$$(\sigma^2 - 1 + iS)^2(\sigma^2 - 1) = Ta. \quad (12)$$

Нетрудно убедиться, что наличие вертикального перемещения приложенной силы даже при $S \gg 1$ мало влияет на корни характеристического уравнения, если

$$S \ll Ta^{1/3}, \quad \text{т.е. } \bar{W} \ll \sqrt[3]{\frac{\nu f^2}{k}} \approx \sqrt[3]{\nu f^2 L}. \quad (13)$$

Для конвективного элемента с линейным размером $L = 30$ м при $\nu \approx 1$, $f \approx 1 \text{ с}^{-1}$ получается ограничение $\bar{W} \ll 3$ м/с. Для микрочастиц это ограничение получается гораздо более жестким, так что корректный учет их оседания играет принципиальную роль.

Ограничение (13) имеет прозрачный физический смысл. При вертикальном перемещении области приложения силы, например при перемещении конвективного элемента с вертикальным размером L , около этой области образуется вытянутый по вертикали вязкий пограничный слой с характерной толщиной порядка $L_v \approx \sqrt{\nu\tau} = \sqrt{\nu L/\bar{W}}$. Здесь $\tau \approx L/\bar{W}$ — время, в течение которого область приложения силы полностью переместится по вертикали — на расстояние порядка своего вертикального масштаба L . Если упомянутый погранслои достаточно тонкий ($L_v \ll L_\Omega$), то возникающие течения практически полностью содержатся в этом слое; эффекты вращения на столь малых горизонтальных масштабах не сказываются, так что вследствие вертикального перемещения силы эти эффекты становятся несущественными. Если выполняется противоположное неравенство, то вращающаяся циркуляционная ячейка, изображенная на рис. 1 (кривые 2), находится внутри слоя толщиной L_v , и учет перемещения силы не оказывает существенного влияния на решение. Этому предельному случаю и соответствует неравенство (13).

Задача с заданной объемной силой

Выше рассматривался случай силы, сосредоточенной на вертикали $x = 0$. Другой простой пример, в котором легко анализируется и нестационарная задача — случай заданной пространственно периодической объемной силы. Для простоты ограничимся двумерной задачей. Система уравнений имеет вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + f v, \quad (14)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + F_1 \cos(k_x x) \cos(k_z z), \quad (15)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) - f u, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (16)$$

где смысл постоянных F_1 , k_x , k_z очевиден. В начальный момент, когда „включается“ вертикальная сила, может быть задано, например, отсутствие возмущений.

Ищем решение в виде

$$u(x, z, t) = U(t) \sin(k_x x) \sin(k_z z),$$

$$w(x, z, t) = W(t) \cos(k_x x) \cos(k_z z),$$

$$v(x, z, t) = V(t) \sin(k_x x) \sin(k_z z),$$

$$P(x, z, t) = \Phi(t) \cos(k_x x) \sin(k_z z).$$

Для амплитуд получаем систему

$$\frac{dU}{dt} = k_x \Phi - \nu k^2 U + f V, \quad k_x U = k_z W, \quad k^2 = k_x^2 + k_z^2,$$

$$\frac{dV}{dt} = -\nu k^2 V - f U, \quad \frac{dW}{dt} = -k_z \Phi - \nu k^2 W + F_1. \quad (17)$$

Общее решение соответствующей однородной системы представляет собой линейную комбинацию двух экспонент, комплексные показатели которых соответствуют затуханию на „вязком“ масштабе времени $(\nu k^2)^{-1}$, и одновременно осцилляциям с инерционной частотой f . Наибольший интерес представляет стационарное решение:

$$U_s = \frac{k_x k_z F_1}{\nu k^4 \left(1 + \frac{k^2}{k^2} Ta\right)}, \quad W_s = \frac{k_x^2 F_1}{\nu k^4 \left(1 + \frac{k^2}{k^2} Ta\right)},$$

$$V_s = -\frac{k_x k_z F_1 \sqrt{Ta}}{\nu k^4 \left(1 + \frac{k^2}{k^2} Ta\right)}, \quad \Phi_s = \frac{k_z F_1 (1 + Ta)}{k^2 \left(1 + \frac{k^2}{k^2} Ta\right)}. \quad (18)$$

При больших значениях числа Тейлора вертикальная скорость стремится к нулю, что соответствует большому гидродинамическому сопротивлению (причем, как и в примере, приведенном выше, большое сопротивление при этом отвечает малой вязкости). Отметим, что и в этом случае вихревая составляющая возмущения скорости немонотонно зависит от фонового вращения — с ростом Ta сначала растет по абсолютной величине, достигает максимума при $Ta = k^2/k_z^2$, затем убывает. При малой вязкости вихревое возмущение скорости может сколь угодно превышать по абсолютной величине две другие составляющие скорости, хотя возмущающая сила направлена по вертикали:

$$\frac{V_s}{W_s} = -\frac{k_z}{k_x} \sqrt{Ta}.$$

Проанализируем зависимость амплитуды возмущения давления от геометрии и параметров задачи. При отсутствии вращения $\Phi_s = k_z F_1 / (k_x^2 + k_z^2)$. Если при этом $k_z \gg k_x$, то $\Phi_s \approx F_1/k_z$. Это соответствует приближению

гидростатики, в котором давление не зависит от движения и определяется массовыми силами. Это согласуется с опытом геофизических наук: при рассматриваемой геометрии задачи (горизонтальные масштабы возмущений много больше вертикальных) хорошо выполняется приближение гидростатики — давление приближенно равно весу столба среды. В противоположном случае $k_z \ll k_x$ получаем

$$\Phi_s \approx \frac{k_z F_1}{k_x^2} = \left(\frac{k_z}{k_x}\right)^2 \frac{F_1}{k_z} \ll \frac{F_1}{k_z}.$$

Таким образом, если область приложения силы вытянута по вертикали, то амплитуда возмущений давления много меньше, чем в предыдущем случае. Это согласуется, например, с тем фактом, что в вытянутых по вертикали конвективных струях возмущения давления относительно малы.

При сильном вращении среды, когда

$$1 \ll \frac{k_z^2}{k^2} \text{Ta} \leq \text{Ta}, \quad (19)$$

получаем $\Phi_s \approx F_1/k_z$. Иными словами, интенсивное вращение существенно расширяет применимости приближения гидростатики; последнее выполняется даже в случае $k_z \ll k_x$ — для возмущений, вытянутых по вертикали. Если, например, применительно к условиям нижней атмосферы принять $f \approx 1 \text{ s}^{-1}$, $\nu \approx 1 \text{ m}^2/\text{s}$, $k_x = 3 \cdot 10^{-2} \text{ m}^{-1} \approx k$, $k_z = 3 \cdot 10^{-3} \text{ m}^{-1} \text{ m}$, то $\text{Ta} \approx 10^6$. При этом условие (19) уверенно выполняется, и следовательно, несмотря на малые горизонтальные масштабы возмущения, хорошо выполняется приближение гидростатики.

Последний результат означает возможность существования в рассматриваемых интенсивных атмосферных вихрях положительных обратных связей, на которые ранее, видимо, не обращалось внимания. Интенсивное вращение, как показано, в той или иной мере затрудняет вертикальные движения и, следовательно, релаксацию возмущений плавучести, возникающих, в частности, при реализации конвективной неустойчивости и фазовых переходах в облаках. Это создает дополнительные условия для „накопления“ в вихре возмущений плавучести, а они, в свою очередь, как видно из последней оценки, во вращающейся среде эффективно поддерживают возмущения давления. Например, тепловыделение означает положительную плавучесть, меньший вес столба воздуха и пониженное давление, которое, в свою очередь, поддерживает интенсивное вращение и т.д. К этому следует добавить, что интенсивное вращение подавляет турбулентность [8–10], т.е. приводит к уменьшению эффективного коэффициента турбулентного обмена — дополнительному увеличению эффективного числа Тейлора. Это — еще одна положительная обратная связь.

Заключение

Как и можно было ожидать из физических соображений, в рассмотренных моделях быстрое вращение существенно затрудняет движение жидкой (газообразной) среды вдоль оси вращения. При прочих равных условиях это эквивалентно возрастанию эффективного коэффициента гидродинамического сопротивления среды, причем сопротивление может возрастать с уменьшением вязкости. При интенсивном вращении может существенно расширяться область применимости приближения гидростатики. Рассмотренные эффекты могут, вообще говоря, заметно влиять на динамику возмущений, вызываемых отклонениями плавучести в интенсивных атмосферных вихрях, таких как смерчи и „пыльные дьяволы“. Чтобы сделать анализ максимально прозрачным, выше были рассмотрены предельно упрощенные, но достаточно строгие гидродинамические модели. Они позволяют убедиться в том, что для существования рассматриваемых эффектов достаточно лишь быстрого вращения и направленной вдоль оси вращения пространственно неоднородной силы.

Список литературы

- [1] *Наливкин Д.В.* Смерчи. М.: Наука, 1984. 110 с.
- [2] *Природные опасности России. Т. 5. Гидрометеорологические опасности / Под ред. Г.С. Голицына и А.А. Васильева.* М.: Крук, 2001. 296 с.
- [3] *Атмосфера. Справочник.* Л.: Гидрометеоздат, 1991. 509 с.
- [4] *Кушин В.В.* Смерч. М.: Энергоатомиздат, 1993. 128 с.
- [5] *Интенсивные атмосферные вихри.* М.: Мир, 1985. 368 с. (Intense Atmospheric Vortices / Ed. by L. Bengtsson and J. Lighthill. Heidelberg: Springer, 1982).
- [6] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
- [7] *Гил А.* Динамика атмосферы и океана. М.: Мир, 1986. Т. 1. 396 с. Gill A.E. Atmosphere–Ocean Dynamics. NY: Academic Press, 1982).
- [8] *Луговцов Б.А.* // Интенсивные атмосферные вихри. М.: Мир, 1985. С. 341–353.
- [9] *Искендеров Д.Ш., Николаевский В.Н.* // Докл. РАН. 1991. Т. 319. № 1. С. 124–128.
- [10] *Ingel L.Kh.* // Int. Conf. „Fluxes and Structures in Fluids: Physics of Geospheres“, Moscow: IPM RAS, 2009. P. 103–105.