

01;06;07

## О возникновении параметрической электроконвекции нематического жидкого кристалла

© А.Н. Мордвинов, Б.Л. Смородин

Пермский государственный университет,  
614990 Пермь, Россия

(Поступило в Редакцию 22 апреля 2010 г. В окончательной редакции 1 ноября 2010 г.)

В рамках модели слабого электролита исследовано поведение нематического жидкого кристалла (НЖК) во внешнем переменном электрическом поле. Поскольку в постоянном поле электроконвекция некоторых типов НЖК может возникать колебательным образом, в переменном поле возможны квазипериодический отклик нематика на внешнее воздействие, а также резкое понижение порогов электроконвективной устойчивости на резонансных частотах. На плоскости параметров амплитуда–частота внешнего поля построены карты устойчивости НЖК. Построены фазовые портреты для субгармонических и синхронных возмущений. Исследован оптический отклик НЖК в переменном электрическом поле: получены временные зависимости относительной интенсивности света, прошедшего через ячейку нематического жидкого кристалла.

### Введение

Нематические жидкие кристаллы (НЖК), являясь слабопроводящими средами и обладая свойствами анизотропии, во внешнем переменном электрическом поле демонстрируют возможность образования периодических пространственных структур. Это явление называется электроконвективной неустойчивостью [1]. Равновесие нематического жидкого кристалла в электрическом поле становится неустойчивым при условии, если напряжение на границах ячейки превышает некоторое критическое значение. При этом возникает искажение поля директора и изменяется характер оптического отклика. В состоянии равновесия оптическая картина однородна: интенсивность проходящего через ячейку света одинакова во всех ее точках в любой момент времени. При возникновении электроконвективной неустойчивости оптический отклик вблизи порога неустойчивости представляет собой чередование темных и светлых полос, которые соответствуют различной интенсивности проходящего через ячейку света. Поведение оптического отклика во времени зависит от свойств нематического жидкого кристалла и характеристик приложенного электрического поля.

Изучение поведения структур НЖК во внешнем переменном электрическом поле имеет продолжительную историю [1–6], при этом для теоретического описания электроконвекции использовалась стандартная модель [2,3], включающая уравнения эволюции полей скорости, директора и заряда. В переменном поле в НЖК, удовлетворяющем условиям применимости стандартной модели, возможны колебания либо синхронного [2,3], либо, при определенных условиях, субгармонического отклика [4–6].

Для объяснения обнаруженной в эксперименте колебательной неустойчивости НЖК [7] предложена более сложная модель, так называемая модель слабого электролита (weak electroliit model, WEM), которая учитывает изменение электропроводности в нематическом

жидком кристалле [8]. Если неустойчивое состояние НЖК в постоянном поле характеризуется собственной частотой нейтральных колебаний, то в переменном поле наряду с синхронным и субгармоническим откликом должен появиться еще один режим неустойчивости — квазипериодический отклик, характеризующийся двумя несоизмеримыми частотами: собственной частотой колебаний и частотой внешнего поля.

В данной работе на основе модели слабого электролита исследована параметрическая электроконвективная неустойчивость нематического жидкого кристалла в переменном электрическом поле. Показано, что кроме синхронного отклика возможны субгармонические и квазипериодические колебания. Получены зависимости порогов электроконвекции от частоты. Для различных типов отклика проанализировано поведение полей директора и электропроводности, а также характер оптического отклика ячеек с нематическим жидким кристаллом.

### Постановка задачи

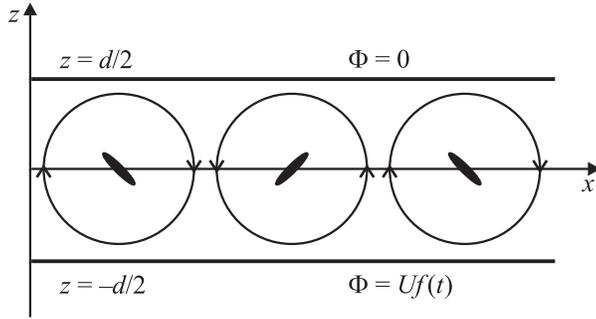
Рассмотрим тонкий слой нематического жидкого кристалла, расположенного между обкладками плоского горизонтального конденсатора толщиной  $d$  (рис. 1). Пусть электрический потенциал верхней границы равен нулю:  $\Phi(z = d/2) = 0$ , а нижней границы — меняется по гармоническому закону

$$\Phi(z = -d/2, t) = Uf(t) = U[1 + h \cos(\Omega t)].$$

Здесь  $U$  — постоянное значение напряжения,  $h$  — амплитуда модуляции и  $\Omega$  — циклическая частота переменного поля. Тогда электрическое поле в конденсаторе будет иметь вид

$$E(t) = E_m f(t) = \frac{U}{d} [1 + h \cos(\Omega t)], \quad (1)$$

где  $E_m$  — постоянная составляющая напряженности поля. Оси  $x$  и  $y$  расположены в плоскости конденсатора,



**Рис. 1.** Геометрия задачи. Электроконвективные валы в слое нематического жидкого кристалла между обкладками конденсатора. Эллипсы схематично показывают отклонения директора от положения равновесия во внешнем электрическом поле в центрах соседних валов.

ось  $z$  — в перпендикулярном направлении. Будем считать, что в состоянии равновесия директор  $\mathbf{n}$  (единичный вектор вдоль направления преимущественной ориентации длинных осей молекул нематика) направлен вдоль оси  $x$ . В слабой электролитической модели уравнения для скорости и директора совпадают с уравнениями из стандартной модели [9]. Будем считать нематический кристалл несжимаемой жидкостью и, используя обозначение  $\partial_i = \partial/\partial x_i$  для пространственных производных и

$$A_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_i v_j + \partial_j v_i)$$

для симметричной части градиентов скоростей, запишем уравнения Навье–Стокса в виде

$$\rho \left( \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \partial_j v_i \right) = f_i + \partial_j \Sigma_{ij},$$

$$\partial_i v_i = A_{ii} = 0. \quad (2)$$

Здесь  $\rho$  — плотность нематика,  $f_i$  — объемная плотность сил, действующих на НЖК,  $\Sigma_{ij}$  — тензор вязких напряжений.

Тензор вязких напряжений записывается через компоненты директора, симметричную  $A_{ij}$  и антисимметричную  $\omega_{ji} = (1/2)(\partial_j v_i - \partial_i v_j)$  части тензора градиента скоростей [9]:

$$\Sigma_{ij} = \alpha_1 n_i n_j n_k n_m A_{km} + \alpha_2 n_i N_j + \alpha_3 n_j N_i + \alpha_4 A_{ij} + \alpha_5 n_i n_j A_{kj} + \alpha_6 n_k n_j A_{ik}, \quad (3)$$

и содержит коэффициенты Лесли  $\alpha_i$ , имеющие размерность вязкости, а также величину

$$N_j = \frac{dn_j}{dt} - \omega_{ij} n_j.$$

Запишем далее выражение для объемной плотности свободной энергии  $F$  деформированного НЖК во внешнем электрическом поле

$$F = \frac{1}{2} [K_1 (\operatorname{div} \mathbf{n})^2 + K_2 (\mathbf{n} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{n})^2 + K_3 (\mathbf{n} \times \operatorname{rot} \mathbf{n})^2] - \frac{\varepsilon_a}{8\pi} (\mathbf{E} \mathbf{n})^2, \quad (4)$$

где  $K_1, K_2, K_3$  — модули упругости (константы Франка),  $\varepsilon_a = \varepsilon_{\parallel} - \varepsilon_{\perp}$  — анизотропия тензора диэлектрической проницаемости  $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{\perp} \delta_{ij} + \varepsilon_a n_i n_j$  [3]. Тогда объемная плотность сил, действующих на НЖК, запишется в виде

$$f_i = \partial_j \tilde{\Sigma}_{ij}, \quad \tilde{\Sigma}_{ij} = -P \delta_{ij} - \frac{\partial F}{\partial (\partial_j n_i)} \partial_i n_i, \quad (5)$$

где  $P$  — давление.

Уравнения движения директора  $\mathbf{n}$  можно представить следующим образом [9]:

$$\gamma_1 N_i + \gamma_2 n_j A_{ij} = -\frac{\partial F}{\partial n_i} + \partial_k \frac{\partial F}{\partial (\partial_k n_i)}, \quad (6)$$

где  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  — коэффициенты вращательной вязкости нематика, комбинации коэффициентов Лесли:  $\gamma_1 = \alpha_3 - \alpha_2$ ,  $\gamma_2 = \alpha_2 + \alpha_3$ .

Проводящие свойства среды в модели слабого электролита характеризуются, вообще говоря, свойствами двух типов заряда ( $\pm e$ ), концентрация которых  $n_+$ ,  $n_-$  может изменяться. Это происходит благодаря подвижности носителей заряда в электрическом поле  $v^{\pm} = \pm \mu^{\pm} E$ , где тензоры подвижностей зарядов записываются в виде

$$\mu^{\pm} = \mu_{\perp}^{\pm} \mu_{ij} = \mu_{\perp}^{\pm} (\delta_{ij} + \sigma'_a n_i n_j), \quad \sigma'_a = \frac{\sigma_a}{\sigma_{\perp}}.$$

Есть еще две другие возможности изменения заряда, связанные с его конвективным переносом и реакциями диссоциации нейтральных молекул и рекомбинации ионных пар. Для описания электроконвекции используются поля плотности заряда и проводимости [2]:

$$q = e(n_+ + n_-), \quad \sigma_{\perp} = e(\mu_{\perp}^+ n_+ + \mu_{\perp}^- n_-).$$

Уравнения эволюции со временем для них выглядят следующим образом:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \nabla \cdot (vq + \bar{\mu}' E \sigma_{\perp}) = 0, \quad (7)$$

$$\frac{\partial \sigma_{\perp}}{\partial t} + \nabla \cdot (v \sigma_{\perp} + \mu_{\perp}^+ \mu_{\perp}^- \bar{\mu}' E q) = -\tau_{\text{rec}}^{-1} (\sigma_{\perp} - \sigma_{\perp}^{\text{eq}}). \quad (8)$$

В основном состоянии НЖК — покоящаяся среда ( $v = 0$ ) с планарной ориентацией директора ( $\mathbf{n} = (1, 0, 0)$ ).

Безразмерные уравнения для эволюции во времени малых возмущений электропроводности  $\Sigma$ , директора  $\delta \mathbf{n} = (0, N_2, N_3)$  в направлении осей  $x$  и  $y$ , зависящих от волнового вектора  $k = (k_x, k_y) = (p, q)$ , будут выглядеть следующим образом [10]:

$$\begin{cases} \partial_t \Sigma = -r \Sigma - 2i p \alpha^2 \varepsilon_a R N_3' + \alpha^2 \pi \sqrt{2R} (\partial_z^2 - k_0^2) \Phi', \\ \partial_t N_2 = 2(K_3 \partial_z^2 - k_2^2) N_2 - 2iq (K_3 - 1) N_3' - \frac{i}{2} L_2(V), \\ \partial_t N_3 = 2(1 - K_3) iq N_2' + 2(\partial_z^2 + \varepsilon_a R - k_3^2) N_3 - \varepsilon_a \pi \sqrt{2R} i p \Phi - \frac{1}{2} L_3(V). \end{cases} \quad (9)$$

Коэффициенты  $c_p$  и  $c_q$  в  $k_j^2 = c_p p^2 + c_q q^2$

	$c_p$	$c_q$		$c_p$	$c_q$
$k_0^2$	$c$	$b$	$k_7^2$	$1 + \sigma_a$	$1$
$k_1^2$	$b$	$c$	$k_8^2$	$1 + (1 + \eta) \frac{\varepsilon_a}{2}$	$1$
$k_2^2$	$K_2$	$1$	$k_9^2$	$c - (1 + \eta) \frac{c\varepsilon_a}{2}$	$b$
$k_3^2$	$K_2$	$K_3$	$k_{10}^2$	$(1 + \eta)cK_2 + (1 - \eta)(c - bK_2 - cK_3)$	$(1 + \eta)c - (1 - \eta)bK_3$
$k_4^2$	$1 - \eta$	$1 + \eta$	$k_{11}^2$	$(1 + \eta)K_2 + (1 - \eta)(1 - K_3)$	$1 + \eta$
$k_5^2$	$(1 - \eta)K_3$	$1 + \eta$	$k_{12}^2$	$(1 + \eta)cK_2 + (1 - \eta)c$	$(1 + \eta)c + (1 - \eta)bK_3$
$k_6^2$	$1 + \varepsilon_a$	$1$			

Здесь  $r = \tau_d / \tau_{\text{rec}}$ ,  $\tau_d$  — время релаксации компонент директора,  $\tau_{\text{rec}}$  — время рекомбинации ионов в кристалле,  $\alpha = \sqrt{\mu^+ \mu^- \gamma_1 \pi^2 / \sigma_{\text{eq}} d^2}$ ,  $R = (\pi E)^2 / 2$  характеризует влияние внешнего поля на НЖК. В уравнения (9) входят следующие функции скорости:

$$L_2(V) = (1 + \eta)qV_1 - (1 - \eta)pV_2$$

и

$$L_3(V) = (1 + \eta)V_1' - (1 - \eta)ipV_3,$$

где

$$V_1 = iqG + cipF',$$

$$V_2 = -ipG + biqF'$$

и

$$V_3 = k_0^2.$$

Сама скорость разбита на полоидальную и тороидальную составляющие:

$$v = \nabla \times (G \cdot e_z) + \nabla \times [\nabla \times (F \times e_z)].$$

Здесь  $G$  и  $F$  — тороидальная и полоидальная составляющие вектора скорости. Условие несжимаемости НЖК  $\nabla v = 0$  при этом выполняется автоматически.

В системе уравнений используются константы [10]:

$$a = \eta_0, \quad b = 0.25[2(\eta_1 + \eta_2) - (\eta_1 - \eta_2)^2 - 1],$$

$$c = \eta_3, \quad \eta = \eta_2 - \eta_1;$$

$\eta_i$  — комбинация коэффициентов Лесли  $\alpha_i$ , а  $k_i^2$  приведены в таблице.

Электрический потенциал  $\Phi$  и компоненты скорости  $G, F$  определяются из следующих уравнений [10]:

$$(\partial_z^2 - k_7^2)\Phi - \frac{\sqrt{2R}}{\pi}(\sigma_a ipN_3 + \Sigma') = 0, \quad (10)$$

$$(k_0^4 k_1^2 - B \partial_z^2 + bck_0^2 \partial_z^4)F - sp^3 qG' + \pi \sqrt{2R}(k_9^2 \partial_z^2 - k_8^2 k_0^2)\Phi + L_F(N_2, N_3) = 0, \quad (11)$$

$$(A - k_0^2 \partial_z^2)G + sp^3 qF' + \varepsilon_a \pi \sqrt{\frac{R}{2}}(1 + \eta)pq\Phi + L_G(N_2, N_3) = 0, \quad (12)$$

где введены функциональные зависимости

$$L_F(N_2, N_3) = pq \hat{D}N_2' - ip \hat{S}N_3, \quad (13)$$

$$L_G(N_2, N_3) = (k_2^2 k_4^2 - k_5^2 \partial_z^2)N_2 + iq[(1 + \eta)(\partial_z^2 + \varepsilon_a R) - k_{11}^2]N_3'. \quad (14)$$

Также имеются константы

$$s = ac - 2bc - b^2 + c^2,$$

$$A = bp^4 + (a - 2b + 2c)p^2 q^2 + bp^4,$$

$$B = c^2(a - 2b + 2c)p^4 + b(b^2 + 3c^2)p^2 q^2 + 2cb^2 q^4.$$

С целью упрощения в формуле (13) обозначены операторы:

$$\hat{D} = [(1 + \eta)c - (1 - \eta)K_3 b] \partial_z^2 - k_{10}^2, \quad (15)$$

$$\hat{S} = -[k_{12}^2 - (1 + \eta)c\varepsilon_a R] \partial_z^2 + c(1 + \eta) \partial_z^2 + [(1 - \eta)k_3^2 + (1 + \eta)\varepsilon_a R] k_0^2. \quad (16)$$

Слабая электролитическая модель включает в себя четыре характерных временных параметра. Во-первых, это время релаксации директора  $\tau_d = \gamma_1 d^2 / K_1 \pi^2$  и время релаксации заряда  $\tau_q = \varepsilon_0 \varepsilon_{\perp} / \sigma_{\perp}^{\text{eq}}$ , встречающиеся уже в стандартной модели, а также время рекомбинации  $\tau_{\text{rec}}$  для релаксации к равновесию диссоционно-рекомбинационной реакции и время перехода  $\tau_i = d^2 / V_{c0} \mu^*$  заряда с подвижностью  $\mu^*$  через ячейку под приложенным напряжением  $V_{c0} = \sqrt{K_1 / \varepsilon_0 \varepsilon_{\perp}}$ .

## Метод решения

На первом этапе исключим пространственные производные из системы дифференциальных уравнений (9)–(14). Для этого воспользуемся методом Галеркина с набором базисных функций:

$$\Sigma = \sigma(t) \sin z, \quad N_2 = n_2(t) \sin 2z, \quad F = f(t) C_1(z),$$

$$N_3 = n_3(t) \cos z, \quad G = g(t) \sin 2z, \quad \Phi = \varphi(t) \cos z,$$

удовлетворяющих граничным условиям при  $z = \pm \pi / 2$  в случае проводящих границ, на которых выполняется

условие прилипания и задана планарная ориентация директора.  $C_1(z)$  — первая функция Чандрасекара [11], явный вид которой выглядит следующим образом:

$$C_1(z) = \frac{\operatorname{ch} \frac{\Delta_1 z}{\pi}}{\operatorname{ch} \frac{1}{2} \Lambda_1} - \frac{\cos \frac{\Delta_1 z}{\pi}}{\cos \frac{1}{2} \Lambda_1}, \quad (17)$$

где  $\Lambda_1$  — первый корень характеристического уравнения

$$\operatorname{th} \frac{1}{2} \Lambda + \operatorname{tg} \frac{1}{2} \Lambda = 0. \quad (18)$$

После процедуры ортогонализации на промежутке от  $-\pi/2$  до  $\pi/2$  задача (9)–(14) сводится к системе трех дифференциальных уравнений, включающей в себя уравнение для эволюции во времени проводимости кристалла  $\sigma$  и два уравнения для эволюции компонент директора  $n_2$  и  $n_3$ :

$$\frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}}_{Z(t)} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}}_{A(t)} \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}}_{Z(t)}. \quad (19)$$

В полученной системе (19) матрица  $A(t)$  комплексная и имеет следующую структуру:

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & i \operatorname{Im}(a_{13}) \\ a_{21} & a_{22} & i \operatorname{Im}(a_{23}) \\ i \operatorname{Im}(a_{31}) & i \operatorname{Im}(a_{32}) & a_{33} \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Замена  $n_3$  на  $in_3$  приводит матрицу  $A(t)$  к вещественному виду.

В случае переменного внешнего поля для исследования поведения НЖК воспользуемся теорией Флюке [12]. Проинтегрировав систему (19) для трех линейно-независимых решений с начальными условиями вида  $z_{01} = (1, 0, 0)$ ,  $z_{02} = (0, 1, 0)$  и  $z_{03} = (0, 0, 1)$ , из трех столбцов, полученных в конце периода внешнего воздействия, построим матрицу монодромии. Ее собственные значения характеризуют поведение НЖК во времени и в общем случае являются комплексными. Если модули собственных значений упорядочить следующим образом:  $|\lambda_1| > |\lambda_2| > |\lambda_3|$ , то порогу электроконвективной неустойчивости будет соответствовать условие  $|\lambda_1| = 1$ . При этом мнимая часть собственного значения характеризует собственную частоту осцилляции НЖК в электрическом поле.

Оптический отклик кристалла исследуем на границе неустойчивости. Для определения интенсивности прошедшего через слой НЖК света будем пользоваться формулой [13,14]

$$I = I_0 \sin^2 2\beta \sin^2 \frac{\Psi}{2}, \quad (21)$$

где  $I$  — интенсивность прошедшего через слой НЖК света,  $I_0$  — интенсивность падающего света,  $\Psi$  — фазовая задержка, выражающаяся формулой

$$\Psi = \frac{2d}{\Lambda} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \Delta n dz, \quad \Delta n = n_\theta - n_0, \quad (22)$$

$$n_\theta = n_0 \left( 1 - \frac{n_e^2 - n_0^2}{n_e^2} \cos^2 N_3(z) \right)^{-1/2}. \quad (23)$$

Угол  $\beta$  между осью  $x$  и осью поляризации света принят равным  $45^\circ$ ,  $n_e$  и  $n_0$  — коэффициенты преломления света с поляризацией соответственно параллельно и перпендикулярно директору,  $\Lambda$  — длина волны проходящего через слой НЖК света [13].

На пороге электроконвекции за начальные  $\sigma$ ,  $n_2$  и  $n_3$  берется собственный вектор, соответствующий собственному значению, равному единице, и нормированный так, что его евклидова норма равна единице.

## Полученные результаты

Для решения системы дифференциальных уравнений (19) использовался набор безразмерных параметров, соответствующих нематическому жидкому кристаллу 152, рассмотренному в работе [10]:

$$K_2 = 1.3, \quad K_3 = 1.12, \quad \eta_0 = 0.8, \quad \eta_1 = 0.9, \quad \eta_2 = 0.05,$$

$$\eta_3 = 0.1, \quad \varepsilon_a = 0.02, \quad \sigma_a = 0.8, \quad r = 0.8, \quad \alpha = 0.3.$$

Здесь  $K_i$  масштабированы через  $K_1 = 15.3 \cdot 10^{-12} \text{H}$ . Величины  $\eta_i$  масштабированы в единицах вращательной вязкости  $\gamma_1 = 0.11 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$ ;  $\sigma_a$  — в единицах равновесного значения  $\sigma_{\text{eq}} = 10^{-9} (\Omega \cdot \text{m})^{-1}$ , единицей измерения напряженности электрического поля является величина  $\pi \sqrt{K_1 / (\varepsilon_0 \varepsilon_\perp)} / d$ , где  $d$  — толщина образца, единица измерения которой здесь есть величина  $7 \cdot 10^{-5} / \pi \text{ m}$ . Единица измерения времени — время релаксации директора  $\tau_d$ .

В постоянном электрическом поле неустойчивость состояния равновесия возникает колебательным образом. Нейтральная кривая, изображающая зависимость

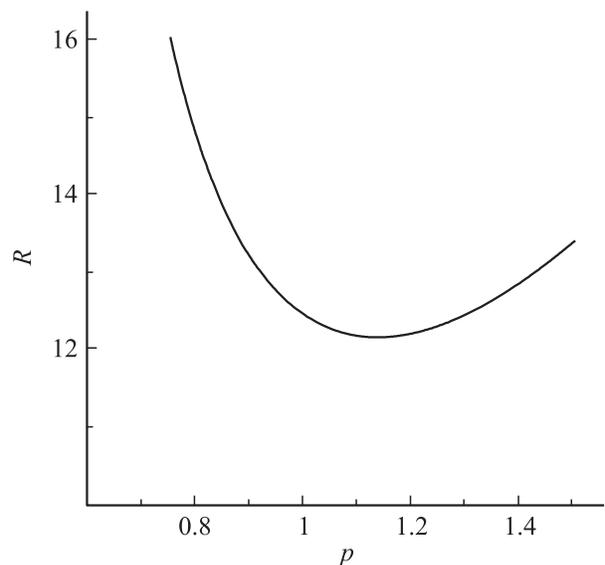
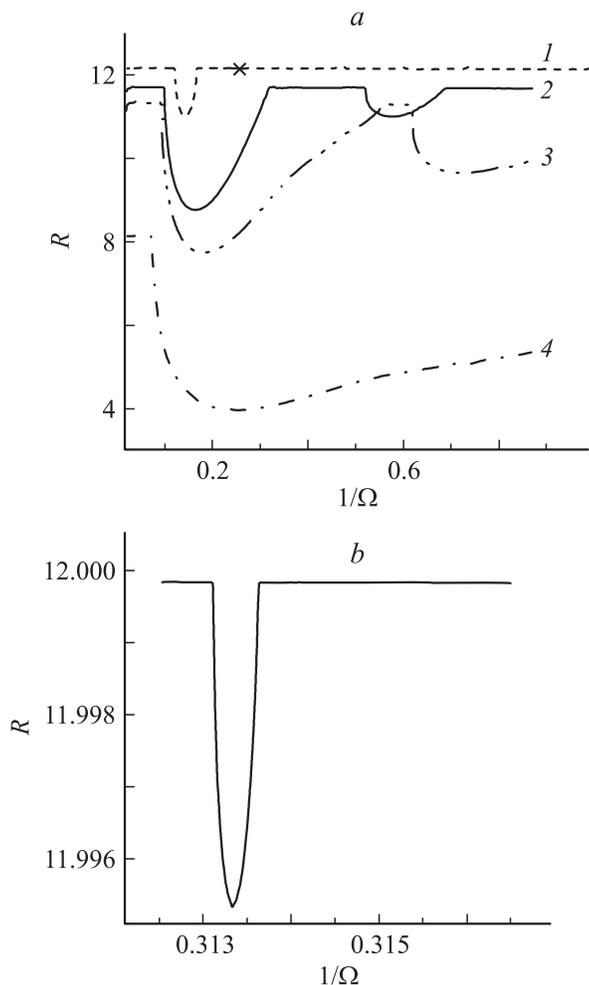


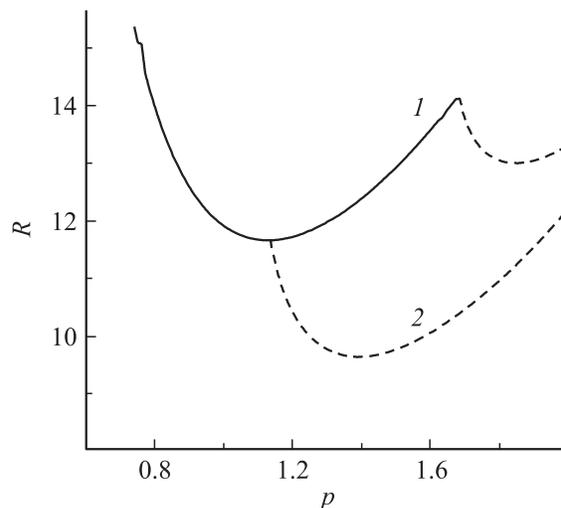
Рис. 2. Нейтральная кривая устойчивости нематического жидкого кристалла в постоянном электрическом поле.

порогового значения параметра  $R$  от волнового вектора возникающих в кристалле структур, приведена на рис. 2. В наших расчетах, использующих по одной базисной функции на каждую переменную, минимуму нейтральной кривой соответствуют критические значения параметра  $R_* = 12.2$ , волнового числа  $p_* = 1.14$  и собственной частоты осцилляции:  $\omega_* = 3.5$ , что дает критическое напряжение на конденсаторе  $U_* \approx 13.3$  В и размерную частоту осцилляции:  $\omega_* = 0.97$  rad/s. Расчеты неустойчивости в постоянном поле, проведенные с большим числом базисных функций [10], дают более высокие значения:  $R_* = 15.33$ ,  $p_* = 1.21$ ,  $\omega_* = 4.51$ .

В случае переменного воздействия на систему, имеющую собственную частоту колебаний, реализуются условия параметрического возбуждения неустойчивости. Отклик кристалла может принадлежать синхронному, субгармоническому или квазипериодическому типам колебаний. Расчеты проводились при фиксированном значении волнового числа:  $p = 1.21$ , которому соответствует



**Рис. 3.** Карта неустойчивости нематического жидкого кристалла (НЖК) в переменном электрическом поле: *a* — при различных значениях параметра  $h$ : 1 — 0.1; 2 — 0.3; 3 — 0.4; 4 — 1. Крестиком показано место на границе устойчивости, где появляется синхронный отклик НЖК; *b* — область синхронного отклика кристалла при  $h = 0.2$ .

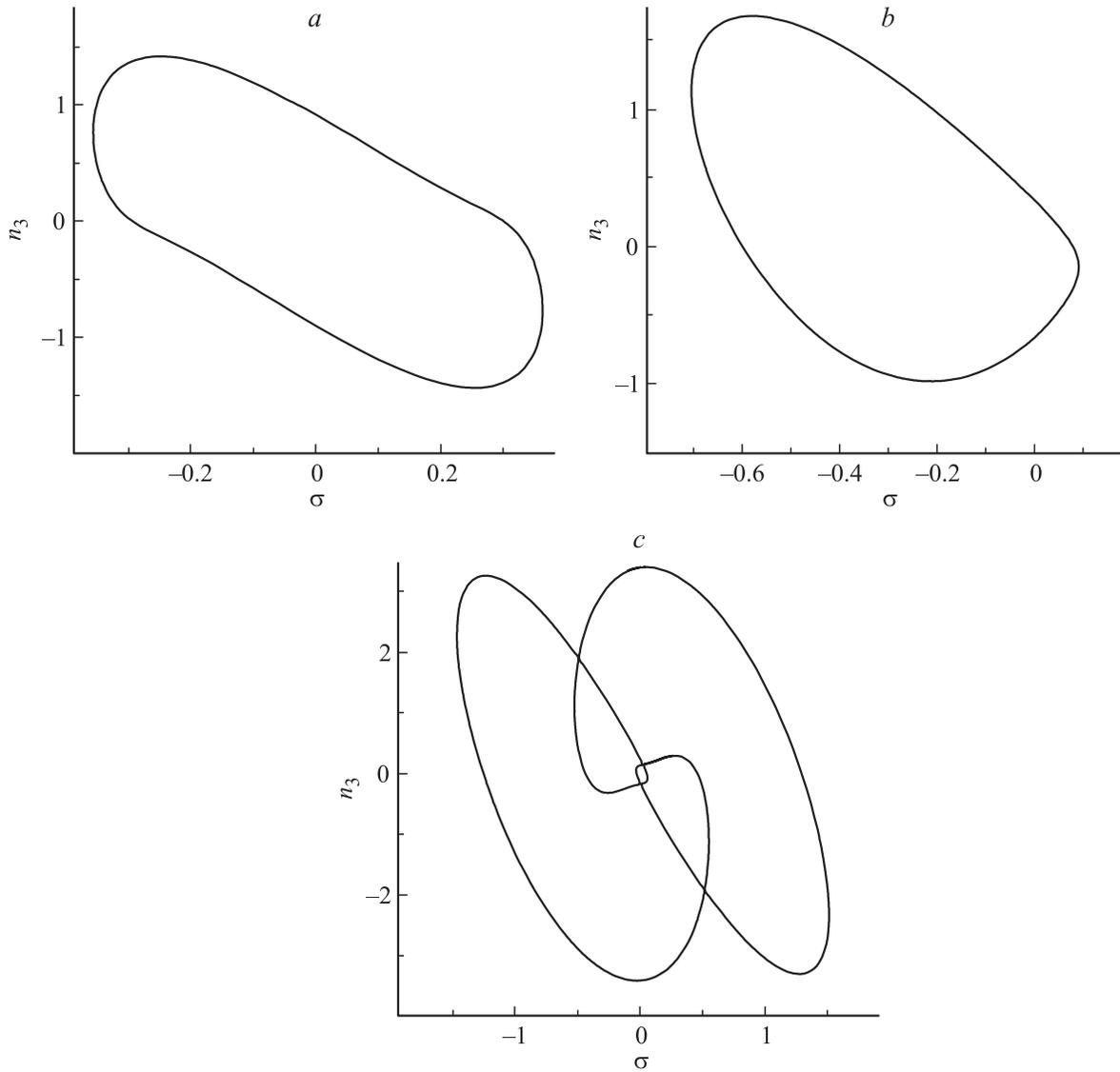


**Рис. 4.** Нейтральные кривые при одной амплитуде модуляции ( $h = 0.3$ ), но разных частотах внешнего воздействия  $\Omega$ : 1 — 20; 2 — 10. Сплошная линия соответствует квазипериодическому отклику, штриховая — субгармоническому.

собственная частота осцилляции  $\omega_p = 3.77$ . Зависимость порогового значения параметра  $R$  от обратной частоты внешнего поля представлена на карте устойчивости (рис. 3) для различных амплитуд модуляции. При малой амплитуде модуляции  $h = 0.1$  в широкой области частот внешнего воздействия порог неустойчивости не зависит от частоты внешнего поля. Здесь мультипликаторы Флоке — комплексные, соответственно отклик кристалла на внешнее воздействие квазипериодический. В некотором интервале частот, вблизи резонансной частоты  $\Omega \cong 2\omega_p$  ( $1/\Omega \cong 0.014$ ), наблюдается резкое понижение порога неустойчивости. В этой области максимальный по модулю мультипликатор Флоке равен  $-1$ , что соответствует субгармоническому отклику кристалла на внешнее поле. В узкой области вблизи частоты внешнего поля, равной собственной частоте колебаний нематика, мультипликаторы Флоке равны единице. Однако порог устойчивости при данной амплитуде модуляции  $h = 0.1$  совпадает с порогом квазипериодических возмущений.

При дальнейшем увеличении переменной составляющей внешнего поля пороги неустойчивости понижаются (рис. 3, *a*). Субгармоническая и синхронная резонансные области увеличиваются. Кроме того, в области частот  $\Omega = 2\omega_p/3$  появляется еще одна резонансная область субгармонического отклика, которая при дальнейшем увеличении параметра  $h$  также увеличивается. При сильной модуляции ( $h = 1$ ) имеется один большой домен субгармонического отклика, соответствующий резкому понижению порога неустойчивости. Отметим, что синхронный отклик нематика наиболее разрешим в области амплитуды модуляции  $h \cong 0.2$  (рис. 3, *b*), хотя и в этом случае понижение порога электроконвекции незначительно. При  $h > 0.2$  область синхронного отклика оказывается внутри первой субгармонической области.

Нейтральные кривые отклика НЖК на внешнее поле, построенные при фиксированном значении параметра

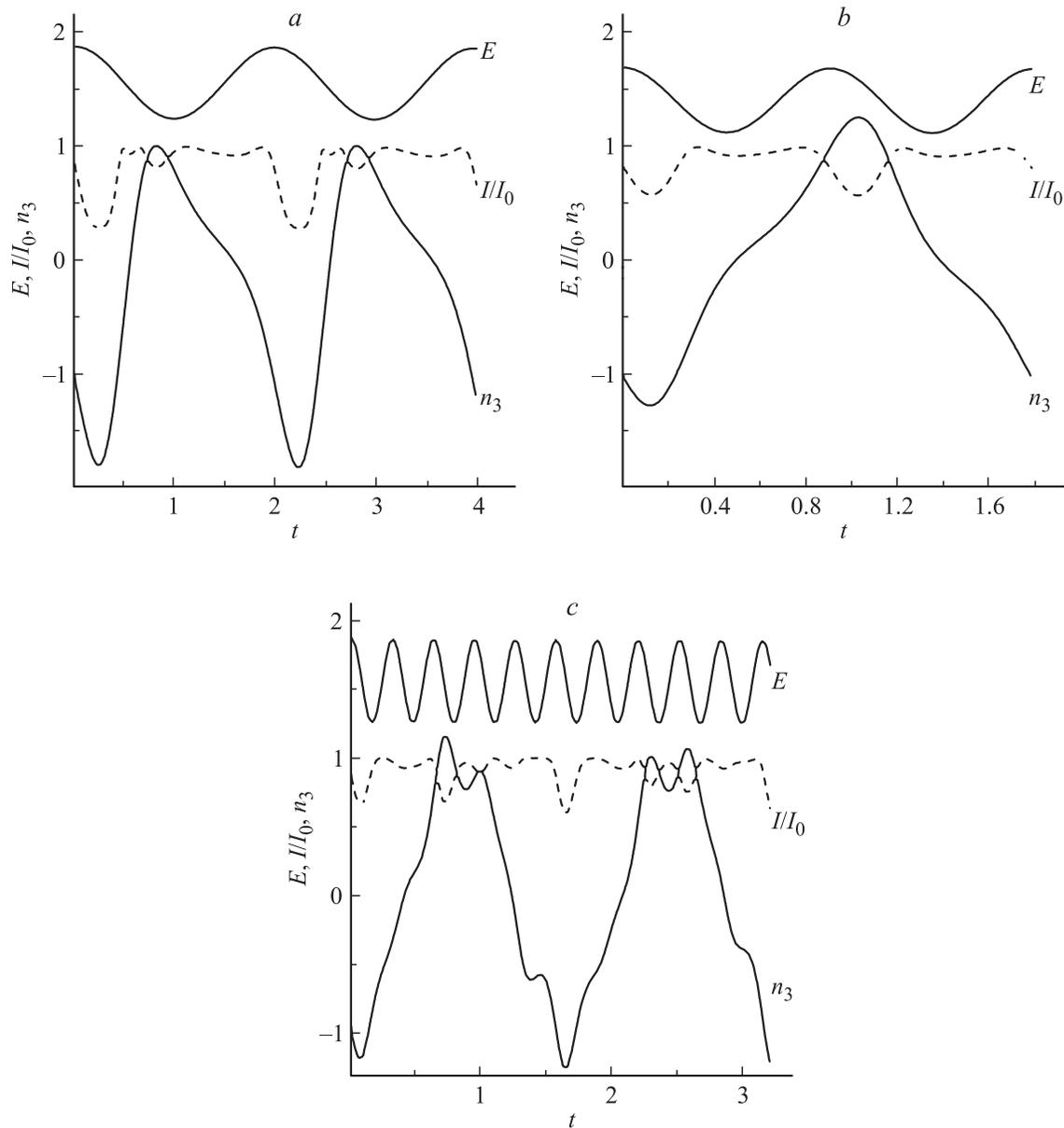


**Рис. 5.** Зависимости угла отклонения директора  $n_3$  от электропроводности  $\sigma$  на пороге неустойчивости:  $a$  — первая область субгармонического отклика при  $h = 0.3$  ( $\Omega = 7.0$ ,  $R = 8.85$ );  $b$  — область синхронного отклика при  $h = 0.2$  ( $\Omega = 3.19$ ,  $R = 11.996$ );  $c$  — вторая область субгармонического отклика при  $h = 0.3$  ( $\Omega = 1.75$ ,  $R = 11.02$ ).

$h = 0.3$ , но разной частоте внешнего переменного поля (рис. 4), демонстрируют, что происходит переход от квазипериодических к субгармоническим колебаниям при заданной доле переменной составляющей внешнего поля. При  $\Omega = 20$  правая часть нейтральной кривой представляет собой субгармонические возмущения. Однако данные возмущения не являются наиболее опасными, абсолютный минимум нейтральной кривой соответствует квазипериодическим возмущениям. При уменьшении частоты ( $\Omega = 10$ ) положение границы квазипериодического отклика не изменяется, а граница субгармонического режима понижается, в результате минимум нейтральной кривой переходит к субгармоническим возмущениям, которые становятся более опасными.

В случае однородной по оси  $y$  структуры НЖК отклонение директора вдоль данной оси отсутствует:

$n_2 = 0$  тождественно. Необходимо отметить, что изменения характеристик НЖК на границах резонансных областей происходит по-разному, что прослеживается на фазовых портретах (рис. 5), где приведены углы отклонения директора от положения равновесия  $n_3$ , соответствующие значениям электропроводности  $\sigma$ . Амплитуда модуляции электрического поля в этом случае  $h = 0.3$ . Как и следует из общей теории [12], средние значения, характеризующие субгармонические колебания, равны нулю — центры фазовых портретов соответствуют точке ( $n_3 = 0$ ,  $\sigma = 0$ ), а для синхронных возмущений колебания происходят с ненулевыми средними значениями (рис. 5,  $b$ ). Усложнение фазовой траектории субгармонического отклика, связанное с появлением нескольких петель (рис. 5,  $c$ ), объясняется возникновением дополнительных частот в спектрах колебаний. Тем не менее все



**Рис. 6.** Временные зависимости интенсивности света, проходящего через слой нематического жидкого кристалла: *a* — на границе синхронного отклика при  $h = 0.2$  в точке  $\Omega = 3.19$ ,  $R = 11.996$ ; *b* — на границе субгармонического отклика при  $h = 0.3$  в точке  $\Omega = 7.0$ ,  $R = 8.85$ ; *c* — на границе квазипериодического отклика при  $h = 0.3$  в точке  $\Omega = 20$ ,  $R = 11.72$ .

фазовые траектории (рис. 5) замкнуты и характеризуют периодические колебания.

При анализе оптического отклика использовано значение амплитуды модуляции  $h = 0.2$ , которое хорошо позволяет разрешить области синхронного и субгармонического отклика. Уже при  $h = 0.3$  синхронная область неустойчивости оказывается внутри субгармонической, и обе области становятся плохо разрешимыми.

Расчеты оптического отклика проведены для монохроматического желтого света, при котором справедливы соотношения:  $n_0^2 = \varepsilon_{\parallel}$ ,  $n_e^2 = \varepsilon_{\perp}$  [14].

На рис. 6 представлены временные зависимости напряженности поля ( $E$ ), относительной интенсивности света, прошедшего через слой НЖК ( $I/I_0$ ), и амплитуды

угла отклонения директора от положения равновесия в плоскости  $xOz$  ( $n_3$ ) на пороге неустойчивости в трех точках: на границе синхронного, субгармонического и квазипериодического отклика. Из графиков видно, что интенсивность прошедшего через слой нематика света меняется с периодом, равным периоду внешнего воздействия как в случае синхронного (рис. 6, *a*), так и в случае субгармонического отклика (рис. 6, *b*). Таким образом, из оптического отклика кристалла в данном случае нет возможности разделить синхронный и субгармонический отклики. Квазипериодический отклик (рис. 6, *c*) представляет собой модулированную бегущую волну: систему чередующихся черных и светлых полос, которая движется в направлении, перпендикулярном гра-

нице раздела полос. В расчетах  $y$ -компонента волнового вектора возникающих структур равна нулю: колебания директора происходят исключительно в плоскости  $xOz$ . Поэтому бегущая волна распространяется вдоль оси  $x$  и интенсивность проходящего света от координаты  $y$  не зависит.

## Заключение

На основе модели слабого электролита исследована устойчивость НЖК в переменном поле горизонтального конденсатора. Найдены границы электроконвективной неустойчивости, соответствующие различным режимам колебаний НЖК: квазипериодическим, синхронным и субгармоническим. Показано, что увеличение амплитуды модуляции электрического поля приводит к резкому понижению порога электроконвекции.

Исследован оптический отклик нематического жидкого кристалла на внешнее переменное электрическое поле. Получены временные зависимости интенсивности света, прошедшего через ячейку нематического жидкого кристалла, на границах синхронного, субгармонического и квазипериодического откликов на внешнее воздействие.

## Список литературы

- [1] *Пикин С.А.* Структурные превращения в жидких кристаллах. М.: Наука, 1981.
- [2] *Dubois-Violette E., Gennes de P.G., Parodi O.* // J. Phys. (France). 1971. Vol. 32. P. 305–317.
- [3] *Dubois-Violette E.* // J. Phys. (France). 1972. Vol. 33. P. 95.
- [4] *John T., Stannarius R.* // Phys. Rev. E. 2004. Vol. 70. P. 025 202(R).
- [5] *Stannarius R., Heuer J., John T.* // Phys. Rev. E. 2005. Vol. 72. P. 066 218.14.
- [6] *Мордвинов А.Н., Смородин Б.Л.* // ЖТФ. 2009. Т. 79. Вып. 5. С. 59–64.
- [7] *Kai S., Hirakawa K.* // Prog. Theor. Phys. Suppl. 1978. Vol. 64. P. 212.
- [8] *Treiber M., Kramer L.* // Mol. Cryst. Liq. Cryst. 1995. Vol. 261. P. 311–326.
- [9] *Treiber M., Kramer L.* // Phys. Rev. E. 1998. Vol. 58. N 2. P. 1973–1982.
- [10] *Dangelmayr G., Oprea I.* // Mol. Cryst. Liq. Cryst. 2004. Vol. 413. P. 305–320.
- [11] *Chandrasekhar S.* Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability. NY: Dover, 1987.
- [12] *Коддингтон Э.А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: ИИЛ, 1958.
- [13] *Кожевников Е.Н., Кучеренко Я.В.* // ЖТФ. 2008. Т. 79. Вып. 10. С. 95–101.
- [14] *Блинов Л.М.* // УФН. 1974. Т. 114. Вып. 1. С. 67–96.