

О силе электростатического взаимодействия между двумя проводящими шарами

© С.И. Гращенков

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
150000 Ярославль, Россия
Псковский государственный педагогический университет им. С.М. Кирова,
180760 Псков, Россия
e-mail: grasi@mail.ru

(Поступило в Редакцию 29 июня 2010 г. В окончательной редакции 8 ноября 2010 г.)

Получено компактное решение задачи о силе взаимодействия двух проводящих шаров с заданными зарядами на их поверхностях без учета внешнего поля. Вывод основывается на точном решении задачи о распределении потенциалов в бисферической системе координат. Выражение для силы находилось дифференцированием потенциальной энергии взаимодействия шаров по расстоянию между их центрами. При помощи численных расчетов показано, что при уменьшении расстояния между шарами отношение их зарядов, при котором силы взаимодействия между шарами равны нулю, стремится к отношению зарядов соприкасающихся шаров. Отсюда следует, что при любом отношении зарядов одинакового знака, отличающегося от отношения зарядов соприкасающихся шаров, всегда найдется достаточно малое расстояние между шарами, при котором они притягиваются.

Введение

Решение задачи о нахождении силы электростатического взаимодействия двух заряженных проводящих шаров известно уже давно [1,2]. В этих работах исходят из точного решения уравнения Лапласа для потенциала в бисферической системе координат. Силы, действующие на шары, находятся при этом в результате интегрирования максвелловского тензора напряжений по поверхностям шаров. При этом в указанных работах учитывается возможное наличие внешнего электрического поля. Полученное в результате такого подхода решение получается достаточно громоздким и неудобным для использования. Поэтому, несмотря на то, что с формальной точки зрения указанная задача полностью решена, время от времени, по крайней мере, для частного случая взаимодействия двух заряженных проводящих шаров в отсутствие внешнего поля, разрабатываются альтернативные методы решения этой задачи (например, [3–5]). Как правило, эти подходы основаны на том или ином варианте метода последовательных приближений в комбинации с методом изображений или дипольного приближения. При наличии расхождений численных расчетов с результатами работ [1,2] обычно просто ограничиваются предположением о возможной неточности расчетов в работах [1,2] в результате плохой сходимости рядов, так как [5] „Unfortunately, a comparison of representative numerical results . . . is not a straightforward exercise“. Таким образом, проблема получения достаточно простых для использования выражений для расчета сил электростатического взаимодействия проводящих шаров с заданными зарядами на основе точного решения уравнения Лапласа не потеряла актуальности и до настоящего времени. В связи с этим в данной работе находится компактное решение задачи

о силе взаимодействия двух проводящих шаров с заданными зарядами на их поверхностях без учета внешнего поля. Это решение используется для дополнительного анализа влияния поляризационных эффектов на взаимодействие одноименно заряженных электропроводных шаров, которое ранее исследовалось в работах [3,6,7].

Теоретический анализ

Решение задачи о вычислении сил в данной работе, как и в [1,2], основано на использовании точного решения уравнения Лапласа для потенциала в бисферической системе координат. Координаты (ξ, η, φ) бисферической системы координат рис. 1 связаны с координатами (ρ, z, φ) соответствующей цилиндрической системы координат следующим образом [8]:

$$\rho = \frac{a \sin \eta}{\operatorname{ch} \xi - \cos \eta},$$

$$z = \frac{a \operatorname{sh} \xi}{\operatorname{ch} \xi - \cos \eta},$$

где a — масштабный множитель. В бисферической системе координат поверхность первого шара совпадает с координатной поверхностью $\xi = \xi_1$, а поверхность второго шара — с координатной поверхностью $\xi = \xi_2$ ($\xi_1 > 0$, $\xi_2 < 0$). Внутри первого шара координата ξ меняется от ξ_1 до $+\infty$, а внутри второго от ξ_2 до $-\infty$. Координата η меняется от 0 до π . При этом радиусы шаров связаны с масштабным множителем соотношениями $R_1 = a \operatorname{csch} \xi_1$, $R_2 = -a \operatorname{csch} \xi_2$. Расстояние между центрами шаров h можно найти из соотношения $h = a(\operatorname{cth} \xi_1 - \operatorname{cth} \xi_2)$.

В отличие от работ [1,2] в данной работе сила F_Q взаимодействия между шарами находится не интегрированием максвелловского тензора напряжений по поверх-

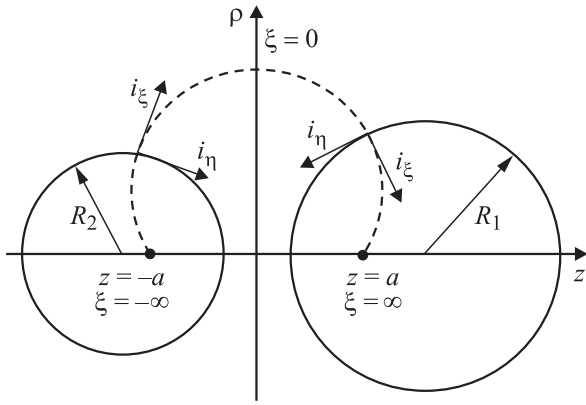


Рис. 1. Бисферическая система координат.

ностям шаров, а дифференцированием потенциальной энергии W_Q взаимодействия шаров по расстоянию между их центрами [9,10]:

$$W_Q = \frac{1}{2} (p_{11}Q_1^2 + 2p_{12}Q_1Q_2 + p_{22}Q_2^2),$$

$$F_Q = -\frac{1}{2} (p'_{11}Q_1^2 + 2p'_{12}Q_1Q_2 + p'_{22}Q_2^2). \quad (1)$$

Здесь и далее штрихами обозначаются производные по h , p_{ij} — потенциальные коэффициенты, Q_1 и Q_2 — заряды соответственно первого и второго шара. При таком определении силы ее положительное значение при численных вычислениях соответствует отталкиванию шаров, а отрицательное — притягиванию. Исходя из выражений, связывающих потенциальные коэффициенты с емкостными коэффициентами c_{ij} [2,9,10]

$$p_{11} = \frac{c_{22}}{c_{11}c_{22} - c_{12}^2}, \quad p_{12} = \frac{-c_{12}}{c_{11}c_{22} - c_{12}^2},$$

$$p_{22} = \frac{c_{11}}{c_{11}c_{22} - c_{12}^2}, \quad (2)$$

получаем

$$p'_{11} = \frac{2c_{12}c_{22}c'_{12} - c_{12}^2c'_{22} - c_{22}^2c'_{11}}{\Delta_c}, \quad (3)$$

$$p'_{12} = \frac{c_{12}c_{11}c'_{22} - (c_{11}c_{22} + c_{12}^2)c'_{12} + c_{12}c_{22}c'_{11}}{\Delta_c}, \quad (4)$$

$$p'_{22} = \frac{2c_{12}c_{11}c'_{12} - c_{11}^2c'_{22} - c_{12}^2c'_{11}}{\Delta_c}, \quad (5)$$

$$\Delta_c = (c_{11}c_{22} - c_{12}^2)^2. \quad (6)$$

Выражения для емкостных коэффициентов двух проводящих шаров получены в [1,2]:

$$c_{11} = 8\pi a \varepsilon_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\exp(-(2n+1)\xi_2)}{\exp((2n+1)(\xi_1 - \xi_2)) - 1},$$

$$c_{12} = -8\pi a \varepsilon_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\exp((2n+1)(\xi_1 - \xi_2)) - 1},$$

$$c_{22} = 8\pi a \varepsilon_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\exp((2n+1)\xi_1)}{\exp((2n+1)(\xi_1 - \xi_2)) - 1},$$

где ε_0 — электрическая постоянная. Вводя переменную

$$x_j = \exp(|\xi_j|), \quad (7)$$

где j — номер шара, эти выражения можно переписать в виде

$$c_{ji} = 8\pi a \varepsilon_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_{3-j}^{2n+1} \delta_j^i - \delta_{3-j}^i}{x_j^{2n+1} x_{3-j}^{2n+1} - 1}, \quad (8)$$

отсюда

$$c'_{ji} = a' \frac{c_{ij}}{a} + 8\pi a \varepsilon_0 a$$

$$\times \left(\left(\sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{\delta_{3-j}^i x_j^{2n+1} - \delta_j^i}{s_n^g} x_{3-j}^{2n} (2n+1) \right] \right) x'_{3-j} \right.$$

$$\left. + \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{\delta_{3-j}^i - x_{3-j}^{2n+1} \delta_j^i}{s_n^g} (2n+1) x_j^{2n} x_{3-j}^{2n+1} \right] \right) x'_j \right), \quad (9)$$

$$s_n^g = (x_1^{2n+1} x_2^{2n+1} - 1)^2. \quad (10)$$

Здесь δ_j^i — символ Кронекера. Используя приведенные в [2] соотношения

$$|\xi_j| = \ln \left(\frac{D_j + a}{R_j} \right), \quad a = (D_1^2 - R_1^2)^{\frac{1}{2}} = (D_2^2 - R_2^2)^{\frac{1}{2}},$$

$$D_1 = \frac{1}{2h} (h^2 + R_1^2 - R_2^2), \quad D_2 = \frac{1}{2h} (h^2 + R_2^2 - R_1^2)$$

и учитывая (7), приходим к следующим выражениям:

$$x'_j = \frac{\frac{f_j}{R_j} - \frac{f_j^2}{h}}{\sqrt{f_j^2 - 1}} - \frac{f_j}{h} + \frac{1}{R_j},$$

$$f_j = \frac{h^2 + (-1)^j (R_2^2 - R_1^2)}{2hR_j},$$

$$a' = \frac{R_1}{2} \left(1 + \frac{1}{x_1^2} \right) x'_1, \quad (11)$$

При этом $f_1 = \text{ch}(\xi_j)$. В итоге получаем, что силы между шарами можно вычислить при помощи соотношений (1), (3)–(11).

Тестирование метода

Расчет по полученным формулам при помощи любого из специализированных математических пакетов для численных расчетов (Scilab, Octave, Mathcad и т.д.) не представляет никакой сложности. Для тестирования метода были проведены численные расчеты приведенных в [2] составляющих силы взаимодействия пропорциональных Q_1^2 , Q_1Q_2 , Q_2^2 при тех же значениях соотношений радиусов шаров и расстояния между ними, что и

в указанной работе. Число слагаемых в используемых рядах выбиралось как минимум таким, чтобы при увеличении этого числа в два раза результат (с точностью по меньшей мере до четырех значащих цифр) оставался неизменным. Расчеты показали полное совпадение численных результатов, полученных в [2], со значениями, вычисляемыми по формулам данной работы. Лишь в нескольких вычислениях из 60 наблюдалось отличие в последней цифре.

Исследование влияния поляризационного взаимодействия

Известно, что с уменьшением расстояния между проводящими заряженными шарами увеличивается роль поляризационного взаимодействия между ними. В итоге при некоторых отношениях зарядов шаров и расстояниях между ними одноименно заряженные проводящие шары не отталкиваются, а притягиваются. Легко показать, что с формальной точки зрения при любых радиусах одноименно заряженных шаров и расстоянии между ними всегда найдется такое отношение зарядов, при котором они притягиваются. Действительно, когда заряжен только один шар в результате поляризационного взаимодействия шары всегда притягиваются. Очевидно, что можно подобрать достаточно малый заряд того же знака, что и на заряженном шаре, который, будучи помещенным на незаряженный шар, уменьшит величину силы взаимодействия, но не поменяет ее знак. Поэтому следует также ожидать, что при любых радиусах одноименно заряженных шаров и расстояниях между ними можно подобрать такие отношения зарядов, что сила взаимодействия между шарами будет равна нулю. Конечно, для реальных ситуаций существуют естественные ограничения для возможных соотношений зарядов: заряд не может быть меньше элементарного, и слишком большая разность зарядов может привести к пробое. Полагая в (1) силу взаимодействия равной нулю, получаем следующее выражение для соответствующего

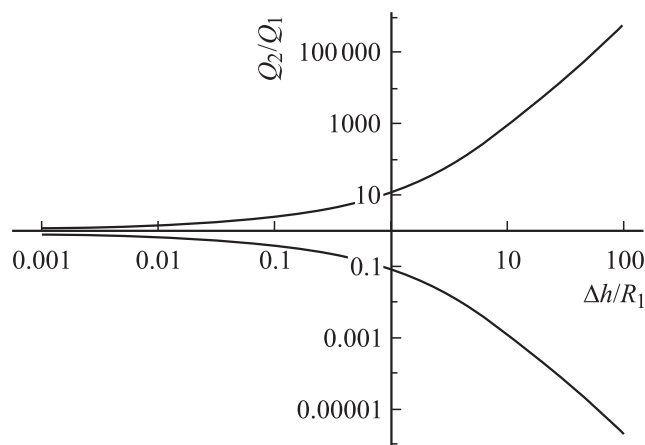


Рис. 2. Зависимость отношения зарядов, при котором сила взаимодействия равна нулю, от относительного расстояния между шарами. Радиусы шаров равны.

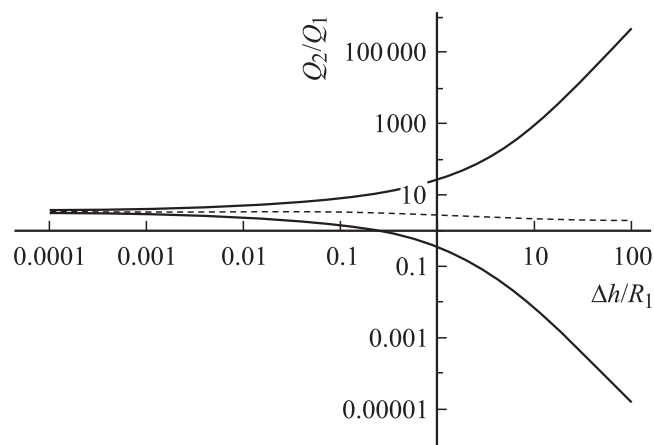


Рис. 3. Зависимость от относительного расстояния между шарами отношения зарядов, при котором сила взаимодействия равна нулю (сплошная линия) и потенциалы шаров равны (пунктирная линия). $R_2 = 2R_1$.

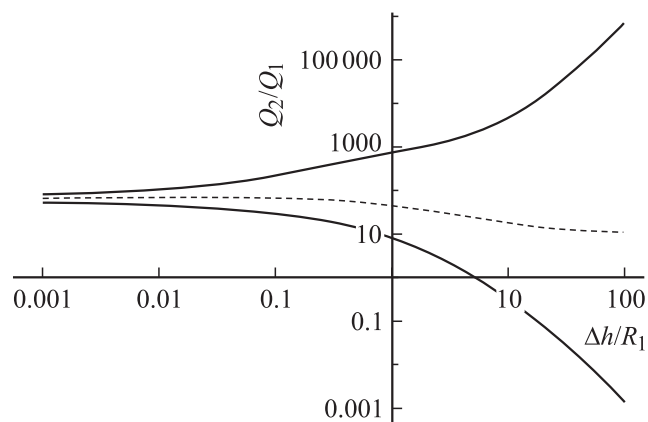


Рис. 4. То же, что и на рис. 3, но при $R_2 = 10R_1$.

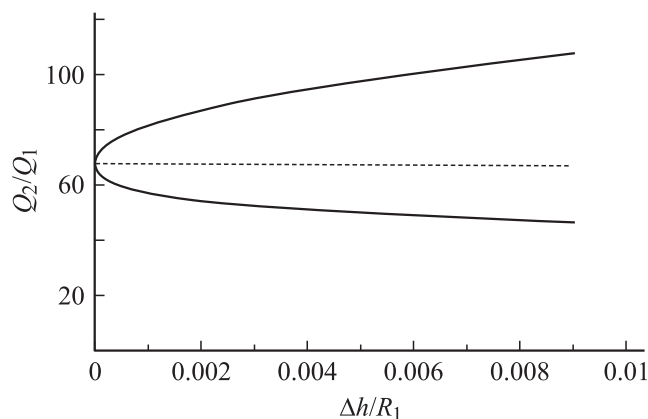


Рис. 5. То же, что и на рис. 4, при малых расстояниях между поверхностями шаров.

отношения зарядов $\gamma_Q = Q_2/Q_1$:

$$\gamma_Q = \frac{-P'_{12} \pm \sqrt{P'^2_{12} - P'_{22}P'_{11}}}{P_{22}}.$$

Отметим, что это отношение зависит только от относительных радиусов шаров и отношения минимального расстояния Δh между их поверхностями к радиусу одного из шаров. На рис. 2–5 сплошными линиями для различных отношений радиусов показаны зависимости отношения зарядов шаров, при которых сила взаимодействия между ними равна нулю, от расстояния между их поверхностями. Область между этими линиями соответствует силам притяжения.

Так как шары являются проводящими, то все точки одного шара имеют одинаковый потенциал электрического поля (потенциал шара). Если подобрать заряды шаров так, чтобы потенциал первого шара был равен потенциалу второго, то отношение этих зарядов не будет зависеть от величины данного потенциала. Отношение γ_V заряда второго шара к заряду первого шара, при котором потенциалы шаров равны, легко получается из выражений, связывающих потенциалы проводников с их зарядами [10], и имеет следующий вид:

$$\gamma_V = \frac{c_{12} + c_{22}}{c_{11} + c_{12}}.$$

Зависимость отношения γ_V от расстояния между шарами показана на рис. 3–5 пунктиром. На рис. 2 эта зависимость не отображена, так как очевидно, что для шаров равных радиусов $\gamma_V = 1$. Из рисунков видно, что с уменьшением минимального расстояния между поверхностями шаров γ_Q стремится к γ_V . В свою очередь, как показывает численное сравнение, при уменьшении расстояния между поверхностями шаров оба эти отношения стремятся к отношению γ_{VC} заряда второго шара к заряду первого шара, которое получается в результате перераспределения общего заряда шаров при их контакте. Исходя из выражений для зарядов соприкасающихся проводящих шаров при заданном потенциале на их поверхности [9] получаем

$$\gamma_{QC} = \frac{\int_0^1 \frac{\frac{R_1}{R_1+R_2} - 1}{1-\tau} d\tau}{\int_0^1 \frac{\frac{R_2}{R_1+R_2} - 1}{1-\tau} d\tau}.$$

Из изложенного следует, что при любом отношении зарядов одинакового знака, отличающегося от отношения зарядов, которое получается при перераспределении заряда в результате соприкосновения шаров, всегда найдется достаточно малое расстояние между шарами, при котором они притягиваются. Для иллюстрации сказанного на рис. 6 для шаров одинакового радиуса продемонстрировано как меняется зависимость силы взаимодействия шаров от отношения их зарядов с

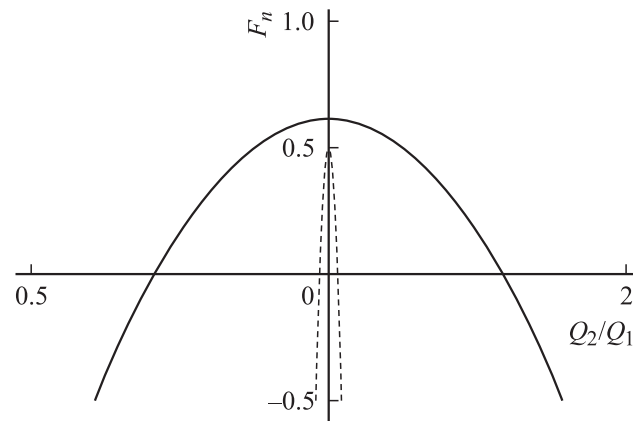


Рис. 6. Зависимости безразмерной силы от отношения зарядов для шаров одинаковых радиусов. Сплошная линия — $\Delta h/R_1 = 10^{-2}$, пунктирная — $\Delta h/R_1 = 10^{-5}$.

уменьшением расстояния между их поверхностями. На рисунке $F_n = 4\pi\epsilon_0(R_1 + R_2)^2 F_Q$.

Следует отметить, что поиск отношений зарядов одинаковых знаков, при которых на любых расстояниях между шарами сила взаимодействия является силой отталкивания, уже проводился в работах [3,7]. В итоге по результатам численных расчетов в работе [7] был сделан вывод, что одноименно заряженные шары отталкиваются при любых расстояниях между ними только при условии равенства их радиусов и потенциалов на их поверхностях. Однако, как следует из результатов данной работы, это всего лишь частный случай условия равенства отношения зарядов шаров отношению зарядов, которое получается в результате перераспределения общего заряда шаров при их контакте.

Заключение

Исходя из точного решения уравнения Лапласа для потенциалов получено компактное и простое в использовании решение задачи о силе электростатического взаимодействия между двумя проводящими шарами с заданными зарядами. Численное сравнение показало полное соответствие полученных результатов результатам работ [1,2] с более сложным алгоритмом расчета. При помощи полученных соотношений исследованы условия, при которых сила отталкивания между одинаково заряженными шарами может перейти в силу притяжения. Показано, что при уменьшении расстояния между поверхностями шаров отношение их зарядов, при котором сила взаимодействия между ними равна нулю, стремится к отношению зарядов соприкасающихся шаров. Из этого следует, что при любом отношении зарядов одинакового знака, отличающемся от отношения зарядов соприкасающихся шаров, всегда найдется достаточно малое расстояние между шарами, при котором они притягиваются.

Работа выполнена при поддержке грантов Рособразования № РНП 2.1.1/3776 и РФФИ № 09-01-00084.

Список литературы

- [1] *Davis M.H.* // Quart. J. Mech. and Appl. Meth. 1964. Vol. 17. N 4. P. 499–511.
- [2] *Davis M.H.* Two charged spherical conductors in a uniform electric field: Forces and field strength. Rand. Corp. Memorandum RM-3860-PR. 1964.
- [3] *Саранин В.А.* // УФН. 1999. Т. 169. № 4. С. 453–458.
- [4] *Wistrom A.O., Khachatourian A.V.* // Aerosol Science and Technology. 2001. Vol. 35. N 5. P. 865–873.
- [5] *Jones T.B.* Electromechanics of Particles. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1995.
- [6] *Щерба Е.А., Григорьев А.И., Коромыслов В.А.* // ЖТФ. 2002. Т. 72. Вып. 1. С. 15–19.
- [7] *Саранин В.А.* // УФН. 2002. Т. 172. № 12. С. 1449–1454.
- [8] *Korn G.A., Korn T.M.* Mathematical Handbook for Scientists and Engineers. NY: Dover, 2000.
- [9] *Максвелл Дж.К.* Трактат об электричестве и магнетизме. М.: Наука, 1989.
- [10] *Смайт В.* Электростатика и электродинамика. М.: ИЛ, 1954.