

01;03

## Определение профиля жидкой капли на твердой поверхности

© В.З. Канчуков

Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова, Нальчик

E-mail: vlad-kan@yandex.ru, exp@kbsu.ru

Поступило в Редакцию 2 июля 2003 г.

Даются решения вариационной задачи определения капиллярной поверхности жидкой капли и анализ полученных результатов.

Результаты теоретического и практического исследования статики и динамики поверхности жидкой капли малого объема на твердой поверхности, особенно зоны трехфазного контакта, представляют ценную информацию для решения многих научных и технологических проблем [1–3]. Успехи математической теории минимальных поверхностей, с одной стороны, и практические запросы технологии космической эры и медицины, с другой, как отмечает Р. Финн (R. Finn) [4], вызвали новую волну исследований сразу по нескольким направлениям теории капиллярности.

Рассмотрим вязкую каплю жидкости заданного объема  $V$ , свободно лежащую на горизонтальной поверхности однородного твердого тела в поле силы тяжести, направленном вдоль оси  $z$  вертикально вниз. Будем полагать, что значения плотностей контактирующих фаз  $\rho_i$  и удельной свободной мезфазной поверхностной энергии  $\sigma_{ij}$  на границе  $i$ - и  $j$ -той фаз ( $i(j) = 1$  — твердое тело,  $i(j) = 2$  — жидкая капля,  $i(j) = 3$  — окружающая среда) известны и для системы справедливо неравенство

$$0 < \arccos[(\sigma_{13} - \sigma_{12})/\sigma_{23}] \leq \pi/2. \quad (1)$$

Для нахождения формы симметричной капиллярной поверхности применим вариационный метод, использованный ранее в [5,6] при нахождении приближенного аналитического решения исследуемой задачи.

Пусть  $z = f(x, h_0)$  — искомое уравнение профиля капиллярной поверхности,  $h_0$  — центральная высота капли, неизвестный пока параметр. Так как поверхность капли можно представить как поверхность

тела вращения, то полную энергию системы жидкая капля–твердая подложка, приходящуюся на единицу длины контура капли, следуя [5], запишем в виде

$$W(x_f) = \int_{-x_f}^{x_f} \left[ \sigma_{23} \left( \sqrt{1 + f_x^2} + \frac{f^2}{2a^2} \right) \right] dx + 2x_f(\sigma_{12} - \sigma_{13}), \quad (2)$$

где  $x_f$  — неизвестная пока абсцисса фронта (радиус основания) жидкой капли,  $a^2 = \sigma_{23}/g(\rho_2 - \rho_3)$  — капиллярная постоянная,  $g$  — ускорение силы тяжести.

Рассмотрим далее множество  $M$  допустимых функций (кривых)  $f(x, h_0)$ , удовлетворяющих условиям:

1) функции  $f(x, h_0)$  непрерывно дифференцируемы на некотором конечном отрезке  $\Delta$ , внутренними точками которого являются значения  $x = \pm x_f$ , т.е.  $f(x, h_0) \in C^1[\Delta]$ ,  $[-x_f, x_f] \subset \Delta$ ;

2) концы допустимых кривых удовлетворяют нулевым граничным условиям:

$$f(x, h_0) = 0 \quad \text{при } x = -x_f, \quad f(x, h_0) = 0 \quad \text{при } x = x_f; \quad (3)$$

3) функции  $f(x, h_0)$  удовлетворяют нелокальному граничному условию

$$\int_{-x_f}^{x_f} f(x, h_0) dx = S_0, \quad (4)$$

которое записано с учетом имеющейся вращательной симметрии искомой поверхности и выражает постоянство площади поперечного сечения капли

$$S_0 = \sqrt[3]{9\pi/16} V^{2/3} = k_0 V^{2/3}. \quad (5)$$

На множестве  $M$  зададим функционал

$$J[f] = \int_{-x_f}^{x_f} F(f, f_x) dx + 2(\sigma_{12} - \sigma_{13})x_f, \quad (6)$$

где функция  $F = \sigma_{23}(\sqrt{1 + f_x^2} + f^2/(2a^2)) - \lambda f$  имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно по обеим переменным,  $\lambda$  — неизвестный пока вариационный параметр.

Если функция  $f(x, h_0) \in M$  доставляет экстремум функционалу (6), то, как хорошо известно, выполняются:

а) уравнение Эйлера

$$Lf \equiv \frac{d}{dx} \left[ \frac{f_x}{\sqrt{1+f_x^2}} \right] - \frac{f}{a^2} + \lambda = 0, \quad -x_f < x < x_f, \quad (7)$$

б) условие трансверсальности

$$(F - f_x F_{f_x})|_{x=-x_f} + 2(\sigma_{12} - \sigma_{13}) + (F - f_x F_{f_x})|_{x=x_f} = 0. \quad (8)$$

При помощи замены

$$U = 2a^2 \cos \theta_s + 2\lambda a^2 f - f^2 > 0 \quad (9)$$

сведем далее исследуемую задачу к нахождению решения обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{dU}{dx} - \operatorname{sgn} x \left( \frac{2}{U} (2a^2 - U) \sqrt{2a^2 + U} \right) = 0, \quad -x_f < x < x_f, \quad (10)$$

удовлетворяющего условиям (3), где  $\lambda = h_0/a^2$ ,  $h_0 = a \sqrt{2(1 - \cos \theta_s)}$ .

С учетом имеющейся симметрии запишем искомое уравнение профиля свободной поверхности капли в виде

$$\sqrt{1 - (\eta - \eta_0)^2} - \psi(\eta) = (\xi - \xi_0), \quad (11)$$

где

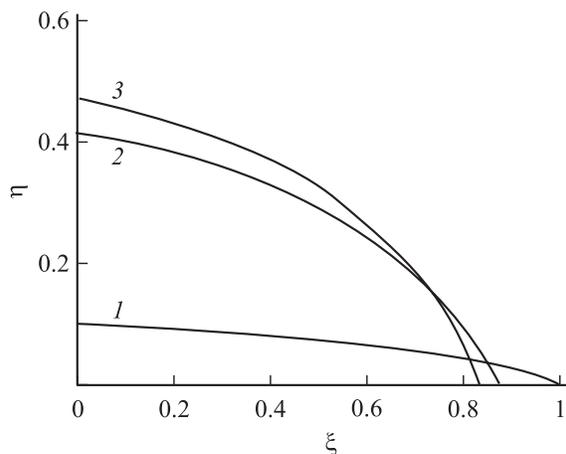
$$\eta_0 = h_0/(2a) = \sin(\theta_s/2), \quad \eta = f/(2a), \quad 0 \leq \eta < \eta_0,$$

$$\xi_0 = -x_f/(2a) = -(0.5 \cos(\theta_s/2) + k_0 V^{2/3}/(8a^2 \sin(\theta_s/2))),$$

$$\xi = -x/(2a), \quad \xi_0 \leq \xi < 0.$$

С учетом полученного представления решения задачи (11) заключаем, что  $\psi(\eta)$  является функцией, характеризующей отклонение контура капиллярной поверхности лежащей капли от профиля полукруглости единичного радиуса с координатой центра в точке  $(\xi_0, \eta_0)$ .

Заметим, что существует некоторое критическое значение объема жидкости  $V_C$  [3,5,6], после достижения которого увеличение высоты



Профиль поверхности лежащей капли критического объема на поверхности латуни в безразмерных переменных: 1 — этанол, 2 — вода, 3 — глицерин.

капли должно прекратиться и при значениях  $V > V_C$  экстремальная высота капли  $h_0$  остается постоянной. При помощи (4) найдем указанное критическое значение объема

$$V_C = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \left( \frac{2\sigma_{23}}{g(\rho_2 - \rho_3)} \sin \theta_s \right)^{3/2}. \quad (12)$$

Дальнейшее увеличение объема в рассматриваемом случае приводит к тому, что растет площадь контакта жидкости с твердой поверхностью и увеличивается плато. Жидкая капля при этом все больше становится похожей на диск, и появляется признак, по которому можно отличить каплю от тонкого слоя жидкости, свободно распределенной по твердой поверхности.

Поскольку при  $V \geq V_C$  высота слоя жидкости остается величиной постоянной, то можно полагать, что экстремальная высота капли  $h_0$  эквивалентна толщине слоя жидкости  $\delta$  на свободной поверхности.

Для анализа полученных в работе результатов были рассчитаны по формуле (11) профили капиллярных поверхностей сидящей капли различных жидкостей критических объемов на поверхности твердого тела. Некоторые результаты проведенных расчетов представлены на рисунке.

Расчеты показывают, что центральная высота капли жидкости постоянного объема уменьшается, а радиус основания и площадь круга, смоченного каплей жидкости, увеличиваются при улучшении смачиваемости жидкостью поверхности твердого тела. Заметим, что уравнение (11) описывает также профиль капиллярной поверхности поджатого пузырька.

Полученное точное решение задачи определения капиллярной поверхности, частично смачивающей твердую поверхность жидкости, имеет важное значение при решении задач, обратных сформулированной в работе, т.е. для нахождения по известным линейным размерам равновесной капли физико-химических параметров системы ( $\sigma_{ij}$ ,  $\theta_s$ ,  $a^2$  и др.). Например, при известных значениях параметров системы  $h_0$  и  $a$  можно определить величину равновесного краевого угла смачивания с использованием формулы

$$\theta_s = 2 \arcsin \left( \frac{h_0}{2a} \right) \quad (13)$$

по методике, предложенной в [7].

Проведенный выше анализ результатов работ показывает, что они находятся в качественном и количественном согласии с имеющимися литературными данными и могут быть использованы при решении различных прикладных задач физики и химии поверхностных явлений.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 03-02-96010).

## Список литературы

- [1] Сумм Б.Д., Горюнов Ю.В. Физико-химические основы смачивания и растекания. М.: Химия, 1976. 231 с.
- [2] De Gennes P.G. // Rev. Mod. Phys. 1985. V. 57. P. 227.
- [3] Русанов А.И., Порхаев В.А. Межфазная тензиометрия. СПб.: Химия, 1994. 400 с.
- [4] Фини Р. Равновесные капиллярные поверхности. Математическая теория. М.: Мир, 1989. 312 с.
- [5] Френкель Я. // ЖЭТФ. 1948. Т. 18. № 7. С. 659–667.
- [6] Несис Е.И., Токмаков В.И., Чигарева Т.С. // Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт. 1967. № 2. С. 146–149.
- [7] Марков И.И., Батулин М.В., Хащенко А.А. Способ определения величины краевого угла смачивания. Патент № 2170921. Заявлено 29.04.1999, опубл. 20.07.2001. Бюл. № 20.