01;05.1

Закономерности прохождения плоской волны дефектов через границу раздела двух вязкопластических сред

© Н.В. Чертова, Ю.В. Гриняев

Институт физики прочности и материаловедения СО РАН, Томск
E-mail: chertova@ms.tsc.ru

Поступило в Редакцию 18 июня 2003 г.

На основе динамических уравнений континуальной теории дефектов получены соотношения, определяющие законы отражения и преломления плоской волны поля дефектов на границе раздела двух вязкопластических сред. Определены коэффициенты отражения и преломления, связывающие амплитуды отраженной и преломленной волн с амплитудой падающей волны. На основе полученных выражений рассмотрен частный случай сред со слабо затухающими волнами.

Продолжая исследования [1,2], где на основе полевой теории дефектов были рассмотрены закономерности распространения плоских волн поля дефектов в вязкопластической среде и исследована структура этих волн, учтем поверхность раздела двух сред. Многочисленные результаты [3–5] свидетельствуют об особой роли границ раздела в процессах деформирования, поэтому изучение поведения материалов под нагрузкой при наличии поверхности раздела представляет важную задачу механики деформируемого тела.

Как показано в работах [1,2], поле дефектов в вязкопластической среде, определяемой соотношением

$$\sigma = \eta I, \tag{1}$$

удовлетворяет системе динамических уравнений полевой теории дефектов

$$\nabla \cdot \hat{I} = 0, \qquad \nabla \cdot \hat{\alpha} = 0,$$
$$\frac{\partial \hat{\alpha}}{\partial t} = \nabla \times \hat{I}, \qquad S(\nabla \times \hat{\alpha}) = -B\,\frac{\partial \hat{I}}{\partial t} - \hat{\sigma}, \tag{2}$$

которая в данном случае записана относительно векторов-строк соответствующих тензорных величин $\hat{I}_i = [I_{ix}, I_{iy}, I_{iz}]$, $\hat{\alpha}_i = [\alpha_{ix}, \alpha_{iy}, \alpha_{iz}]$,

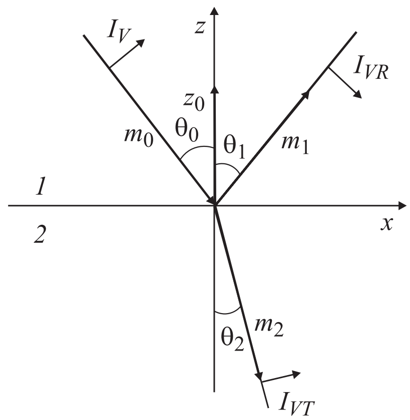

Рис. 1. Отражение и преломление плоской волны на границе раздела двух сред.

$\hat{\sigma}_i = [\sigma_{ix}, \sigma_{iy}, \sigma_{iz}]$. Здесь η — тензор коэффициентов вязкости; α, I — тензоры плотности и плотности потока дислокаций; σ — эффективные напряжения; B, S — константы теории; знаки $(\cdot)$, $(\times)$ обозначают скалярное и векторное произведение. Чтобы определить характеристики поля дефектов по заданным начальным значениям однозначно, необходимо дополнить предыдущие уравнения граничными условиями, которые можно получить известным способом [6]. Будем считать, что нормальные $\hat{I}_n$, $\hat{\alpha}_n$ и касательные $\hat{I}_t$, $\hat{\alpha}_t$ компоненты характеристик поля дефектов на границе раздела удовлетворяют условиям

$$\hat{I}_n^1 - \hat{I}_n^2 = 0, \qquad \hat{\alpha}_n^1 - \hat{\alpha}_n^2 = 0,$$
$$\hat{I}_t^1 - \hat{I}_t^2 = 0, \qquad S_1\hat{\alpha}_t^1 - S_2\hat{\alpha}_t^2 = 0. \tag{3}$$

Предположим, что граница раздела двух однородных сред совпадает с плоскостью $z = 0$ в декартовой системе координат. Среды, расположенные сверху $(z > 0)$ и снизу $(z < 0)$ от границы, характеризуются соответственно параметрами B_1, S_1, η_1 и B_2, S_2, η_2. На границу раздела из первой среды падает плоская волна под углом θ_0 к оси z (рис. 1) с частотой ω и волновым вектором $K_0 = k_1 m_0$, где $k_1 = \omega/V_1$, m_0 — единичный вектор нормали к фронту падающей волны. Плоскость падения, содержащую вектор K_0 и ось z, будем считать

плоскостью xz. Волновой вектор отраженной волны обозначим через $K_1 = k_1 m_1$, преломленной — через $K_2 = k_2 m_2$, z_0 — единичный вектор нормали к границе. Согласно [1,2], поле дефектов можно записать следующим образом:
для падающей волны

$$\hat{I} = \hat{I}_0 \exp(-i\omega t + ik_1 m_0 r), \quad \hat{\alpha} = \lfloor m_o \hat{I}_0 \rfloor Z_1 \exp(-i\omega t + ik_1 m_0 r), \tag{4}$$

для отраженной

$$\hat{I}_R = \hat{I}_1 \exp(-i\omega t + ik_1 m_1 r), \quad \hat{\alpha}_R = \lfloor m_1 \hat{I}_1 \rfloor Z_1 \exp(-i\omega t + ik_1 m_1 r) \tag{5}$$

и преломленной

$$\hat{I}_T = \hat{I}_2 \exp(-i\omega t + ik_2 m_2 r), \quad \hat{\alpha}_T = \lfloor m_2 \hat{I}_2 \rfloor Z_2 \exp(-i\omega t + ik_2 m_2 r). \tag{6}$$

Здесь $Z_1 = 1/V_1$, $Z_2 = 1/V_2$. Скорости распространения волн V_1, V_2 определяются подобными выражениями, записанными ниже без индексов

$$V = \sqrt{\frac{S}{B} \Big/ \left(1 + \frac{i\eta}{B\omega}\right)} = C \big/ \sqrt{1 + i\,\mathrm{tg}\,\delta} = C/(n + i\chi),$$

где n, χ — показатели преломления и поглощения, $\mathrm{tg}\,\delta = \eta/B\omega$ – тангенс угла потерь, $C = \sqrt{S/B}$. Из граничных условий (3) относительно касательных компонент суммарного волнового поля $\hat{\alpha}$ и $\hat{I}$

$$[z_0 I_0] \exp(iK_0 r) + [z_0 I_1] \exp(iK_1 r) = [z_0 I_2] \exp(iK_2 r), \tag{7}$$

$$\big[z_0 [m_0 I_0]\big] \exp(iK_0 r) + \big[z_0 [m_1 I_1]\big] \exp(iK_1 r) = \frac{S_2 Z_2}{S_1 Z_1} \big[z_0 [m_2 I_2]\big] \exp(iK_2 r)$$

вытекает, что фазовые множители должны удовлетворять условиям

$$k_1 m_0 r\big|_{z=0} = k_1 m_1 r\big|_{z=0} = k_2 m_2 r\big|_{z=0}$$

или

$$k_1 \sin\theta_0 = k_1 \sin\theta_1 = k_2 \sin\theta_2.$$

Отсюда следует, что угол отражения θ_1 равен углу падения θ_0 (закон отражения)

$$\theta_0 = \theta_1, \tag{8}$$

а синусы углов преломления и падения связаны соотношением

$$\frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_0} = \frac{k_1}{k_2} = \frac{V_2}{V_1}, \tag{9}$$

представляющим закон преломления. Чтобы определить амплитуды отраженной и преломленной волн, обратимся вновь к уравнениям (7). При этом рассмотрим волны двух различных линейных поляризаций: горизонтально поляризованную волну с вектором $\hat{I}$, ненулевые компоненты которого перпендикулярны плоскости падения ($I_{xi} = I_{zi} = 0$, $I_{yi} \neq 0$), и вертикально поляризованную волну с вектором $\hat{I}$, компоненты которого принадлежат плоскости падения ($I_{yi} = 0$, $I_{xi} \neq 0$, $I_{zi} \neq 0$). В первом случае для неизвестных амплитуд I_1, I_2 получим

$$I_0 + I_1 = I_2, \qquad S_1 Z_1 (I_0 - I_1)\cos\theta_0 = S_2 Z_2 I_2 \cos\theta_2. \tag{10}$$

Решая (10), найдем коэффициенты, связывающие амплитуды отраженной и преломленной волн с амплитудой падающей волны

$$R_g = R_\perp = \frac{S_1 Z_1 \cos\theta_0 - S_2 Z_2 \cos\theta_2}{S_1 Z_1 \cos\theta_0 + S_2 Z_2 \cos\theta_2},$$

$$T_g = T_\perp \frac{2 S_1 Z_1 \cos\theta_0}{S_1 Z_1 \cos\theta_0 + S_2 Z_2 \cos\theta_2}, \tag{11}$$

где $R_g = I_1/I_0$, $T_g = I_2/I_0$. Для вертикально поляризованной волны система уравнений (7) примет вид

$$(I_0 - I_1)\cos\theta_0 = I_2 \cos\theta_2, \qquad S_1 Z_1 (I_0 + I_1) = S_2 Z_2 I_2 \tag{12}$$

и коэффициенты, связывающие амплитуды трех волн, известные в электродинамике как коэффициенты Френеля [7], запишутся в виде

$$R_v = R_{\mathrm{II}} = \frac{S_2 Z_2 \cos\theta_0 - S_1 Z_1 \cos\theta_2}{S_2 Z_2 \cos\theta_0 + S_1 Z_1 \cos\theta_2},$$

$$T_v = T_{\mathrm{II}} = \frac{2 S_1 Z_1 \cos\theta_0}{S_2 Z_2 \cos\theta_0 + S_1 Z_1 \cos\theta_2}. \tag{13}$$

Учитывая (9), выражения (11), (13) можно записать как функции угла падения. При нормальном падении, когда $\theta_0 = 0$,

$$R_g = \frac{S_1 Z_1 - S_2 Z_2}{S_1 Z_1 + S_2 Z_2} = -R_v.$$

Проанализируем общие выражения (11), (13) в частном случае: рассмотрим среды, волны в которых испытывают слабое затухание $\operatorname{tg}\delta_1 \ll 1$, $\operatorname{tg}\delta_2 \ll 1$, поэтому отношение

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{C_2}{C_1}\sqrt{\frac{1 + i\operatorname{tg}\delta_1}{1 + i\operatorname{tg}\delta_2}} \cong \frac{C_2}{C_1} = \sqrt{\frac{S_2B_1}{S_1B_2}}$$

является действительным. Коэффициенты отражения и преломления (11)–(13) при $V_2/V_1 < 1$ также действительны, т.е. сдвиг фаз между падающей и отраженной волнами равен нулю либо π. На рис. 2, *a*, *b* приведены зависимости $R_g(\theta_0)$ и $R_v(\theta_0)$, обозначенные римскими цифрами I, II, III, для различных соотношений параметров модели: $S_1/S_2 > V_2/V_1$, $S_1/S_2 = 1$, $S_1/S_2 < V_2/V_1$ при условии $V_2/V_1 < 1$. График $R_g(\theta_0)$ не имеет особенностей и обращается в нуль лишь при $V_2/V_1 = 1$ и $S_1/S_2 = 1$, когда свойства обеих сред идентичны, т.е. отражение исчезает вместе с исчезновением границы раздела. Коэффициент $R_v(\theta_0)$, определяемый также в виде

$$R_v = \frac{S_2\sin\theta_0\cos\theta_0 - S_1\sin\theta_2\cos\theta_2}{S_2\sin\theta_0\cos\theta_0 + S_1\sin\theta_2\cos\theta_2} = \frac{\operatorname{tg}(\theta_0 - \varphi)}{\operatorname{tg}(\theta_0 + \varphi)},$$

кроме условий $V_2/V_1 = 1$, $S_1/S_2 = 1$ имеет особенность при

$$\theta_0 + \varphi = \frac{\pi}{2}, \quad \text{где} \quad \varphi = \frac{1}{2}\arcsin(S_1/S_2\sin 2\theta_2). \tag{14}$$

Рассматривая совместно (14), (9), можно определить угол падения

$$\theta_0^* = \arcsin\sqrt{\left[(V_2/V_1)^2 - (S_2/S_1)^2\right]/\left[(V_2/V_1)^4 - (S_2/S_1)^2\right]},$$

при котором эта особенность имеет место. Угол θ_0^* является углом полной поляризации, поскольку произвольно ориентированная волна, падающая под этим углом, отражается горизонтально поляризованной.

Если отражение происходит на границе сред, удовлетворяющих условию $V_2/V_1 > 1$, при котором, согласно (9), $\theta_2 > \theta_0$, то при $\sin\theta_0 > V_1/V_2$

$$\cos\theta_2 = \sqrt{1 - (V_2/V_1)^2\sin^2\theta_0} = \pm i\sqrt{(V_2/V_1)^2\sin^2\theta_0 - 1} \tag{15}$$

является мнимой величиной. Этот случай соответствует полному внутреннему отражению от границы раздела двух вязких сред. Угол θ_0,

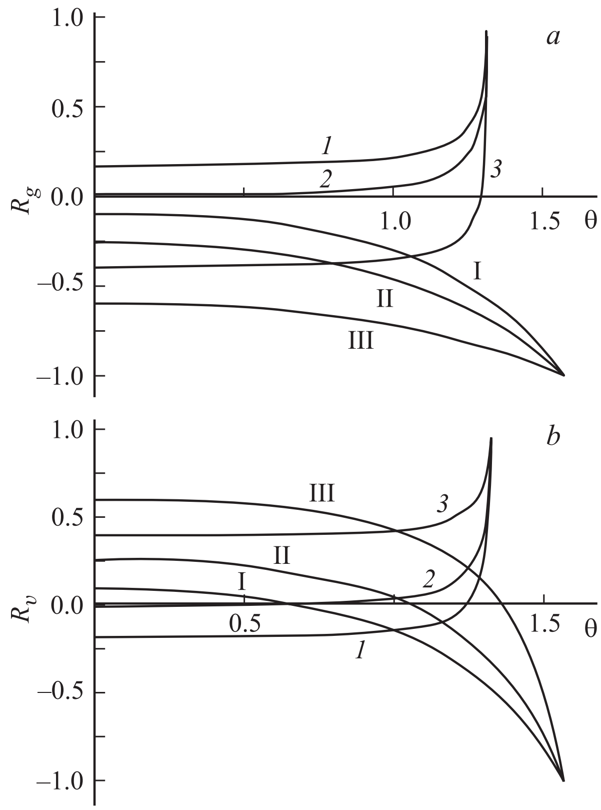

Рис. 2. Зависимость коэффициентов отражения $R_g\,(a)$ и $R_v\,(b)$ от угла падения. Цифрами I, II, III обозначены кривые, полученные при условии $V_2/V_1 = 0.6 < 1$, зависимости *1, 2, 3* получены при $V_2/V_1 = 1.033 > 1$. В обоих случаях $S_1/S_2 = 1.43$ (I, *1*), $S_1/S_2 = 1$ (II, *2*), $S_1/S_2 = 0.43$ (III, *3*).

удовлетворяющий условию

$$\sin\theta_0 = \frac{V_1}{V_2}, \qquad (16)$$

называется углом полного внутреннего отражения. При этом $\sin\theta_2 = 1$ и преломленная волна распространяется параллельно границе раздела двух сред. Выясним структуру преломленной волны для углов падения, больших или равных предельному, более подробно. Учитывая (15), преломленная волна (6) будет иметь вид

$$\hat{I}_T = \hat{I}_2 \exp\left[-i(\omega t - k_1 \sin\theta_0 x) - |z| k_2 \sqrt{(V_2/V_1)^2 \sin^2\theta_0 - 1}\right].$$

Это выражение описывает плоскую неоднородную волну, фаза которой меняется вдоль оси x, а амплитуда убывает по экспоненте в направлении оси z.

На рис. 2, a, b коэффициенты отражения $R_g(\theta_0)$, $R_v(\theta_0)$, полученные при условии $V_2/V_1 > 1$, обозначены арабскими цифрами *1, 2, 3*. Как следует из (11), (13), в случае полного внутреннего отражения $|R_g| = |R_v| = 1$, т.е. для каждой компоненты горизонтальной или вертикальной поляризаций интенсивность отраженной волны дефектов равна интенсивности падающей. На основе этих же формул несложно вычислить изменение фаз отраженной и падающей волн

$$\operatorname{tg}\frac{\delta_g}{2} = \frac{-\sqrt{(V_2/V_1)^2 \sin^2\theta_0 - 1}}{S_1V_2/S_2V_1 \cos\theta_0}, \qquad \operatorname{tg}\frac{\delta_v}{2} = \frac{-\sqrt{(V_2/V_1)^2 \sin^2\theta_0 - 1}}{S_2V_1/S_1V_2 \cos\theta_0}.$$

Сформулируем основные результаты работы. В ходе проведенного исследования были установлены соотношения, определяющие закономерности распространения плоских волн поля дефектов через границу раздела двух вязкопластических сред, которыми являются законы отражения и преломления, коэффициенты отражения и преломления. Было показано, что при определенном соотношении характеристик граничащих сред возможно явление полного внутреннего отражения, а также явление полной поляризации отраженной волны. В первом случае волна поля дефектов, а следовательно, и пластическая деформация распространяются вдоль поверхности раздела, не проникая в глубь второй среды. Во втором случае волна, падающая под углом θ_0^* и имеющая произвольные ненулевые компоненты, отражается горизонтально поляризованной, т.е. имеет одну ненулевую компоненту, перпендикулярную плоскости падения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 02–01–01188).

Список литературы

[1] *Чертова Н.В., Гриняев Ю.В.* // Письма в ЖТФ. 1999. Т. 25. В. 18. С. 91–94.
[2] *Чертова Н.В.* // Письма в ЖТФ. 2003. Т. 29. В. 2. С. 83–87.
[3] *Панин В.Е.* // Физ. Мезомех. 1999. Т. 2. № 6. С. 5–23.
[4] *Алехин В.П.* Физика прочности и пластичности поверхностных слоев материалов. М.: Наука, 1983.
[5] *Орлов Л.Г.* // ФТТ. 1967. Т. 9. № 8. С. 2345–2349.
[6] *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1976.
[7] *Стрэттон Дж.А.* Теория электромагнетизма. М.; Л.: ОГИЗ, 1948.