

03

Волновая модель турбулентности в слое смешения

© А.Е. Леонтьев

Московский физико-технический институт
(государственный университет), Долгопрудный
E-mail: simplicate@gmail.com

Поступило в Редакцию 7 июня 2012 г.

Проведена оценка возможностей феноменологической модели турбулентности на основе волнового подхода для описания течения в слое смешения. В одномодовом приближении получены осредненное поле и зависимость угла расходимости слоя смешения от скоростного отношения. Полученные результаты свидетельствуют об адекватности волновой модели при рассмотрении течения в турбулентном слое смешения.

Как известно, течение, развивающееся на границе двух потоков, которые движутся с разными скоростями, подвержено неустойчивости Кельвина–Гельмгольца, приводящей на начальном этапе формирования течения к характерной волнообразной структуре. В дальнейшем в течении происходит образование цепочки вихрей, размер которых увеличивается вниз по потоку. Эксперимент показал, что за областью перехода при увеличении числа Рейнольдса крупномасштабная вихреобразная структура сохраняется. В классической работе [1] было установлено наличие таких когерентных структур в турбулентном слое смешения. Мелкомасштабные пульсации в области развитой турбулентности не нарушают этой картины.

Можно показать, что характерную для ламинарного слоя смешения картину течения удастся представить через совокупность двух основных движений: сдвигового течения со средней продольной скоростью и волнообразного движения, которое приводит к характерной закрутке течения. Поскольку крупномасштабная картина течения сохраняется и в турбулентном течении, это позволяет смоделировать когерентную структуру набором волновых мод [2]. Волновые моды определяются решением спектральной задачи для уравнения Орра–Зоммерфельда (в предельном случае больших чисел Рейнольдса — уравнения Рэлея).

В реальном течении спектр когерентной структуры может быть распределен в некотором диапазоне волновых чисел. При этом за счет действия дополнительных механизмов (слияния вихрей (pairing), образования трехмерных структур) происходит перераспределение энергии в этой области. Однако наибольший обмен энергией между осредненным полем и пульсациями осуществляется с участием моды, обладающей максимальным инкрементом, что дает основания ограничиться рассмотрением одномодового приближения.

Уравнения для осредненного поля скорости турбулентного течения в слое смешения имеют вид

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial \tau}{\partial y}, \quad \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

где τ — тензор напряжений Рейнольдса, $\tau = -\langle uv \rangle$.

Для разрешения этих уравнений должен быть известен тензор турбулентных напряжений, связанный с пульсационным движением. Можно предположить, что основной вклад в пульсационный тензор вносит когерентная структура, связанная с крупномасштабным движением в течении. Описание этой структуры может быть дано на основе волнового подхода.

Эксперимент показывает, что турбулентный слой смешения является автомодельным. Характерная толщина области смешения при этом изменяется пропорционально расстоянию вниз по потоку. Это обстоятельство позволяет ввести автомодельную переменную в виде

$$\xi = \frac{y}{ax},$$

где a — параметр, определяющий величину угла расширения области смешения.

Тензор турбулентных напряжений также является автомодельным, т. е. зависит только от ξ . Введя функцию тока в виде

$$\psi = U_1 a x f \left(\frac{y}{ax} \right),$$

где U_1 — скорость внешнего потока в верхней полуплоскости, и подставляя данное выражение в уравнение (1), получим

$$-a f(\xi) f''(\xi) = (1 - \gamma)^2 \bar{\tau}'(\xi). \quad (2)$$

Здесь γ — скоростное отношение внешних потоков, $\bar{\tau}(\xi)$ — безразмерный тензор напряжений Рейнольдса.

Граничные условия для функции тока определяются условиями выхода продольной скорости на бесконечности к значениям внешнего потока. Это дает

$$f'(+\infty) = 1, \quad f'(-\infty) = \gamma. \quad (3)$$

Уравнение (2) и граничные условия (3) определяют нелинейную задачу на собственные значения параметра a .

Смоделируем когерентную структуру одиночной волновой модой. Для одиночной двумерной волны тензор напряжений запишется в виде

$$\bar{\tau} = -\frac{1}{4}(\hat{u}^* \hat{v} + \hat{v}^* \hat{u}),$$

где \hat{u} , \hat{v} — фурье-образы пульсационных компонент скорости, выражаемые через собственное решение φ уравнения Рэлея:

$$\begin{aligned} \hat{u} &= -i\alpha\varphi'(\xi), & \hat{v} &= \varphi(\xi), \\ (\bar{U} - c)(\varphi'' - \alpha^2\varphi) - \bar{U}''\varphi &= 0. \end{aligned}$$

Здесь α — волновое число моды, c — ее фазовая скорость, \bar{U} — безразмерная осредненная продольная скорость.

Подставим выражения для \hat{u} и \hat{v} в формулу для тензора напряжения

$$\bar{\tau} = -\frac{1}{4}(i\alpha\varphi'^* \varphi - i\alpha\varphi^* \varphi') = \frac{i\alpha}{4}(\varphi^* \varphi' - \varphi'^* \varphi).$$

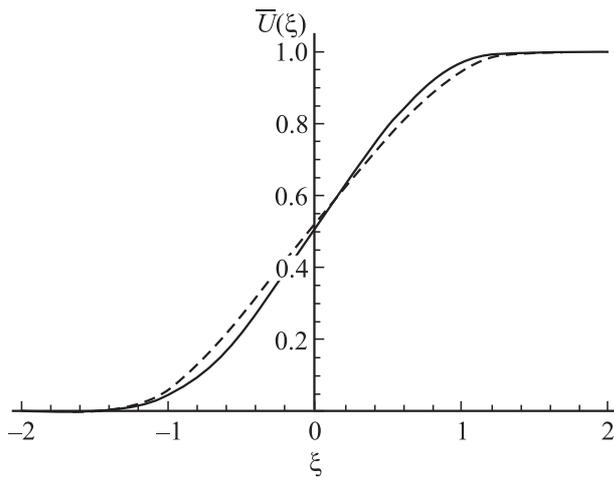
Для производной от тензора получим

$$\frac{d\bar{\tau}}{d\xi} = \frac{i\alpha}{4}(\varphi^* \varphi'' - \varphi''^* \varphi).$$

Тогда, вычитая из уравнения Рэлея сопряженное уравнение, для градиента тензора можно получить

$$\frac{d\bar{\tau}}{d\xi} = \frac{c_i}{2\alpha} \frac{A_0 |\varphi|^2}{(\bar{U} - c_r)^2 + c_i^2} \frac{d^2 \bar{U}}{dy^2}.$$

Здесь c_r , c_i — действительная и мнимая части фазовой скорости, A_0 — константа, характеризующая амплитуду рассматриваемой волновой моды. В линейной постановке данную константу приходится



Профиль средней скорости, полученный на основе волновой модели (сплошная линия), и экспериментальная кривая [3] (пунктир) для скоростного отношения $\gamma = 0.6$.

находить из условий совпадения максимального значения тензора, посчитанного по волновой теории, с экспериментальными значениями. Тем не менее полная постановка задачи позволяет получить уравнения для амплитуд волновых мод и в принципе избавиться от эмпирических констант. В рассматриваемом случае для оценки применимости волновой модели можно ограничиться выбором константы A_0 из условия согласия с экспериментальными данными.

На рисунке показано решение для средней скорости, учитывающее одну волновую моду. Вычисление проведено при скоростном отношении $\gamma = 0.6$. Волновая мода соответствует волновому числу $\alpha = 0.4654$, а фазовая скорость равна $c = 0.8014 + 0.0974i$. Значение константы A_0 в вычислениях получилось равным $A_0 \approx 1.6$. Для сравнения взят профиль средней скорости, полученный в эксперименте [3] при том же скоростном соотношении. На рисунке он представлен пунктирной линией (изображена зависимость, аппроксимирующая экспериментальные точки). Видно, что одномодовое приближение дает неплохое приближение к экспериментальной зависимости. Небольшое расхождение может быть связано прежде всего с ограниченностью описания когерентной

структуры одной волновой модой, а также с влиянием на среднее поле некогерентной части пульсационного движения.

В качестве величины, характеризующей расширение области смешения вниз по потоку, можно принять толщину δ , определяемую следующим образом:

$$\delta(x) = y_{0.9} - y_{0.1},$$

$$\bar{U}(y_r) = \gamma + r(1 - \gamma), \quad r = 0.1; 0.9.$$

Экспериментальные данные показывают [4], что безразмерный параметр

$$S = \frac{1 + \gamma}{2(1 - \gamma)} \frac{d\delta}{dx}$$

не зависит от скоростного отношения и от продольного расстояния. Этот параметр варьируется у разных авторов от 0.06 до 0.11. В эксперименте [3] получено значение 0.069, в расчетах методом прямого численного моделирования [5] — 0.062, в работе [6] — 0.089.

В данном расчете с использованием волновой модели параметр S также оказался не зависящим от скоростного отношения. Для него получено значение 0.071.

Таким образом, результаты, полученные с применением волновой теории в одномодовом приближении, и их соответствие с имеющимися экспериментальными данными позволяют говорить о ее применимости в качестве феноменологической модели для описания турбулентного течения в слое смешения.

Список литературы

- [1] *Brown G.L., Roshko A.* // J. Fluid Mechanics. 1974. V. 64. P. 775–816.
- [2] *Жаров В.А.* // XIII Int. Conference on the Methods of Aerophysical Research (ICMAR). Новосибирск, 2007.
- [3] *Bell J.H., Mehta R.D.* // AIAA. J. 1990. V. 21. N 12.
- [4] *Pope S.B.* Turbulent flows. Cambridge University Press, 2000.
- [5] *Rogers M.M., Moser R.D.* // J. Physics of Fluids. 1994. V. 6. P. 902–923.
- [6] *Yule J.* Two-dimensional self-preserving turbulent mixing layer at different free stream velocity ratios // R. & M. 3683. University of Manchester, 1972.