01;10

Продольная динамика нерелятивистского сгустка заряженных частиц в поле бегущей волны

© В.К. Баев

Национальный исследовательский ядерный университет „МИФИ", Москва
E-mail: baev.valerij2010.yandex.ru

Поступило в Редакцию 18 октября 2012 г.

Для продольного движения нерелятивистского сгустка заряженных частиц в поле бегущей волны построена функция Лагранжа и выведено одноименное уравнение, представляющее уравнение продольных огибающих сгустка.

В данной работе, посвященной продольной динамике заряженных частиц в поле бегущей волны, которая лежит в основе теории резонасного метода ускорения [1], в нерелятивистском приближении сделан переход от динамики отдельных зарядов к динамике сгустка зарядов в целом. Чтобы осуществить такой переход, выведена функция Лагранжа продольного движения сгустка заряженных частиц в поле бегущей волны при условиях, что, во-первых, заряды сгустка распределены раномерно в занимаемой ими области фазового пространства и, во-вторых, в качестве обобщенной координаты q выбрана продольная полуось эллипсоида вращения, аппроксимирующего сгусток в конфигурационном пространстве.

Будем аппроксимировать эмиттанс сгустка эллипсом с вертикальной и горизонтальной полуосями N и M соответственно. Пусть N_b — число частиц сгустка, равномерно „размазанных" по его эмиттансу, так что фазовая плотность в пределах сгустка f постоянна и определяется выражением

$$f = \frac{N_b}{\pi MN}. \tag{1}$$

Перейдя в конфигурационное пространство, получим функцию распределения $\rho(x)$ в пределах сгустка, которая после нормировки принимает вид

$$\rho(x) = \frac{8N_b}{3\pi^2 w^2 q} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{q}\right)^2}; \tag{2}$$

здесь x — координата, отсчитываемая от центра сгустка, вдоль оси, по которой он движется; w — поперечная полуось эллипсоида вращения, аппроксимирующего сгусток; обе величины x и w, как и все размеры ниже, отнесены к длине волны λ генератора, питающего ускоряющую систему.

Кинетическая энергия dT элементарного фрагмента сгустка, представляющего диск толщиной dx, ограниченный поверхностью эллипсоида и движущийся со скоростью $\dot{x}$, определяется следующим выражением:

$$dT = \frac{4N_b}{3\pi} \dot{x}^2 (1 - x^2)^{3/2} x^2 dx; \tag{3}$$

здесь и ниже скорость приводится в единицах скорости света, а энергия — в единицах энергии покоя зарядов сгустка.

Проинтегрировав выражение (3), получим выражение для кинетической энергии сгустка в целом

$$T = \frac{N_b}{12} \dot{q}^2. \tag{4}$$

Потенциальная энергия dU_b фрагмента сгустка длиной dx определяется выражением

$$dU_b = 2w^2 N_b U_c \left(1 - \left(\frac{x}{q}\right)^2\right)^{3/2} dx; \tag{5}$$

здесь U_c — потенциальная энергия заряда e с энергией покоя E_0 в поле бегущей волны с амплитудой ε, имеющая следующий вид:

$$U_c = -\frac{\beta_p A}{2\pi} \left(\sin\varphi_p \cos\psi + \cos\varphi_p \sin\psi - \psi \cos\varphi_p\right), \tag{6}$$

где $A = e\varepsilon\lambda/E_0$; $\psi = 2\pi q/\beta_p$; φ_p — фаза равновесной частицы, β_p — ее скорость.

Аппроксимируя тригонометрические функции в пределах сгустка полиномами до шестого порядка включительно и интегрируя выражение (5), найдем потенциальную энергию сгустка в поле бегущей волны

$$U_b = \frac{\beta_p A \sin\varphi_p}{24\pi} N_b P_b(\psi), \tag{7}$$

где

$$P_b = \psi^2 - \frac{1}{32}\,\psi^4 + \frac{1}{1920}\,\psi^6. \tag{8}$$

Зная кинетическую и потенциальную энергии сгустка, можно найти его функцию Лагранжа и затем перейти к одноименному уравнению

$$\frac{d^2q}{d\xi^2} = \frac{A\sin\varphi_p}{\beta_p^2}\,P(\Psi) - \frac{1}{\beta_p}\,\frac{d\beta_p}{d\xi}\,\frac{dq}{d\xi}, \tag{9}$$

где

$$P(\psi) = \psi - \frac{1}{16}\,\psi^3 + \frac{1}{640}\,\psi^5; \tag{10}$$

здесь ξ — координата оси, вдоль которой движется сгусток.

При выводе уравнения использовалась следующая очевидная связь между производными по времени τ и координате ξ:

$$\frac{dq}{d\tau} = \beta_p\,\frac{dq}{d\xi}. \tag{11}$$

В уравнение (9) естественным образом вписывается собственное кулоновское поле сгустка, если использовать эллипсоидальную модель Власова [2]. В правой его части появится величина

$$\tilde{Q}_M = \frac{90}{w^2\beta_p^2 E_0}\,M_b I; \tag{12}$$

где I — импульсный ток цуга сгустков в амперах; M_b — коэффициент формы эллипсоида

$$M_b = \begin{cases} M_{b1}, & \text{если } q < w; \\ \dfrac{1}{3}, & \text{если } q = w; \\ M_{b2}, & \text{если } q > w; \end{cases} \tag{13}$$

здесь

$$M_{b1} = \frac{1+l_1^2}{l_1^3}\,(l_1 - \operatorname{arctg} l_1); \tag{14}$$

$$l_1 = \sqrt{\left(\frac{w}{q}\right)^2 - 1}; \tag{15}$$

$$M_{b2} = \frac{1-l_2^2}{l_2^3}\left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+l_2}{1-l_2}\right) - l_2\right); \tag{16}$$

$$l_2 = \sqrt{1 - \left(\frac{w}{q}\right)^2}. \tag{17}$$

Окончательно уравнение с учетом собственного кулоновского поля пучка (самосогласованное уравнение) принимает вид

$$\frac{d^2q}{d\xi^2} = \frac{A \sin \varphi_p}{B_p^2} P(\Psi) - \frac{1}{\beta_p} \frac{d\beta_p}{d\xi} \frac{dq}{d\xi} + \frac{B}{\beta_p^2}, \tag{18}$$

где

$$B = \frac{90 M_b I}{w^2 E_0}. \tag{19}$$

Связь обобщенных координат и скорости с параметрами эмиттанса, позволяющая вычислить их начальные значения по положению эмиттанса сгустка в момент его инжекции, дается следующими выражениями:

$$q = \sqrt{M^2 \cos^2 \alpha + N^2 \sin^2 \alpha}, \tag{20}$$

при этом

$$q' = \frac{M^2 - N^2}{2q} \sin 2\alpha; \tag{21}$$

здесь $q' = dq/d\xi$; α — угол поворота эмиттанса на фазовой плоскости.

Если ввести величины

$$q_r = \sqrt{\frac{\pi \beta_p}{V_r}}\, q, \tag{22}$$

$$q_r' = \sqrt{\frac{\pi \beta_p}{V_r}}\, q', \tag{23}$$

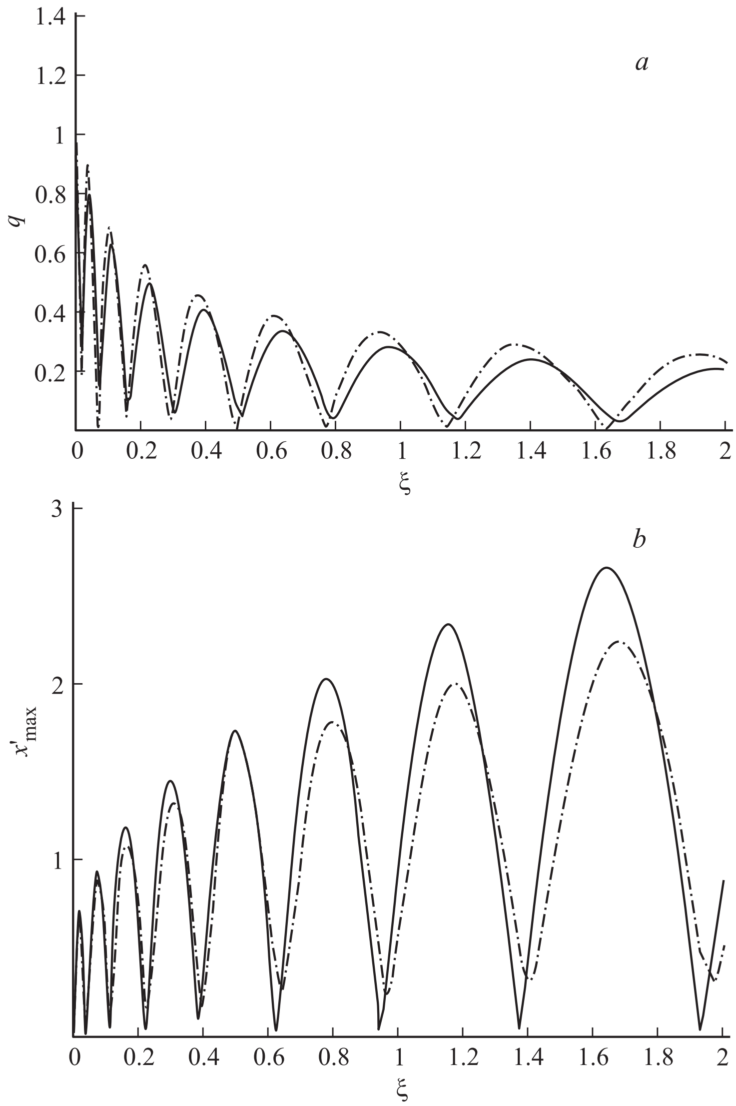
где V_r — нормализованный эмиттанс сгустка, то с помощью выражений

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -2 q_r^3 q_r' \left(1 + q_r^2 (q_r')^2 - q_r^4\right)^{-1}; \tag{24}$$

$$\frac{N}{M} = q_r^2 - q_r q_r' \operatorname{ctg} \alpha \tag{25}$$

по известным текущим значениям обобщенной координаты и ее производной можно вычислять текущие параметры эмиттанса сгустка, и в частности границу спектра $x'_{\max}$

$$x'_{\max} = \sqrt{\frac{V_r}{\pi \beta_p} \left(\frac{N}{M} \cos^2 \alpha + \frac{M}{N} \sin^2 \alpha\right)}. \tag{26}$$



Продольные огибающие сгустка (a) и границы спектра сгустка (b), полученные методом отдельных частиц (штрихпунктирная линия) и из уравнения огибающих (сплошная линия) при импульсном токе пучка 50 mA.

Выведенное уравнение является уравнением продольных огибающих сгустка заряженных частиц, выгодно отличающееся от известных уравнений огибающих [3–5] прежде всего своей простотой, а также тем, что, во-первых, решения уравнения (18) представляют не только продольный размер сгустка, но и ширину его энергетического спектра; во-вторых, при выводе уравнений никаких ограничений на длину сгустка (его фазовый размер) не накладывалось, т. е. данная модель нелинейная и поэтому более общая; в-третьих как видно из уравнения, в нем учитывается эффект ускорения сгустка, и, наконец, в-четвертых, уравнение (18) содержит силу, обусловленную собственным кулоновским полем сгустка, которое учитывается с помощью естественно вписывающейся в него эллипсоидальной модели, так что по отношению к этому полю выведенное уравнение огибающих является самосогласованным.

В качестве примера на рисунке приведены продольные огибающие сгустка и границы его спектра, полученные из уравнения Лагранжа и рассчитанные традиционным методом отдельных частиц при импульсном токе 50 m/A, когда уже заметно проявляется собственное поле сгустка.

Хорошее совпадение результатов, полученных разными методами, говорит о работоспособности рассмотренного выше подхода к динамике заряженных частиц и о его перспективности в плане распространения на релятивистское продольное и поперечное движение.

Список литературы

[1] *Лебедев А.Н., Шальнов А.В.* Основы физики и техники ускорителей. М.: Энергоатомиздат, 1991.

[2] *Власов А.Д.* Теория линейных ускорителей. М.: Атомиздат, 1965.

[3] *Капчинский И.М.* Теория линейных резонансных ускорителей. М.: Энергоатомиздат, 1982.

[4] *Чихачев А.С.* Кинетическая теория квазистационарных состояний пучков заряженных частиц. М.: Физматлит, 2001.

[5] *Перельштейн Э.А.* Метод моментов в теории ускорителей // Международная школа молодых ученых по проблемам ускорителей заряженных частиц. Дубна, 11–20 сентября 1984 г. Дубна: ОИЯИ, 1984. С. 90–119.