

01;03

О распространении возмущений в многокомпонентных средах (сферическая симметрия)

© В.С. Крутиков, М.Б. Ригина

Институт импульсных процессов и технологий НАН Украины,
Николаев, Украина,
E-mail: ipre@ipt.air.mk.ua

Поступило в Редакцию 17 апреля 2003 г.

Методами обратных задач с учетом взаимодействия нелинейных аргументов [8,9] впервые получены точные аналитические решения обратных и прямых волновых задач для случая сферической симметрии; величины начального радиуса и перемещений подвижных границ могут быть произвольными. Показано, что полученные простые точные аналитические соотношения могут быть использованы при изучении физических процессов в сплошных, многофазных и многокомпонентных средах, скорость звука и плотность которых могут меняться при определенных условиях в широком диапазоне в зависимости от исходных составляющих.

При исследовании электрического разряда часто возникает необходимость рассматривать рабочую среду как газожидкостную смесь. Образование таких смесей и их параметры были описаны в [1,2].

Для описания динамики смеси при подводном электровзрыве, когда объемная концентрация воздуха составляет от 10^{-4} до 10^{-2} , а радиус пузырьков от 10 до $15\ \mu\text{m}$, использование модели равновесной среды возможно при условии, если длительность переходного процесса изменения плотности (т.е. время релаксации смеси, обусловленное в основном наличием газовых кластеров) мала по сравнению с временами внешнего воздействия на среду, в данном случае — с характерным временем активной стадии подводного электроразряда. Согласно условию корректности равновесного приближения, полученному в [3], для пузырьков радиусом $15\ \mu\text{m}$ давление должно превышать 10 МПа.

Таким образом, квазиравновесное описание гидродинамических процессов возможно, например, в пузырьковой газожидкостной среде с естественным газонасыщением. При этом влияние газовых включений

может быть описано в рамках волновой (линейной) модели эквивалентной сплошной среды с эквивалентными плотностью ρ и низкочастотной равновесной скоростью звука c . При электровзрывной обработке различных материалов возможно образование также многокомпонентных смесей путем внесения в газожидкостную среду объектов обработки и других твердых веществ. Целью настоящей работы является получение точных аналитических соотношений, описывающих распространение волн сжатия, длина которых превышает размеры включений, распределенных в жидкости, и определение возможности применения этих соотношений для исследования волновых явлений в многокомпонентных смесях. Значения ρ и c определяются объемным содержанием компонентов [4,5]:

$$\rho = \sum_{i=1}^n (\rho_i \beta_i), \quad (1)$$

$$c = \left(\rho \sum_{i=1}^n \frac{\beta_i}{\rho_i c_i^2} \right)^{-1/2}, \quad (2)$$

где ρ_i , c_i — плотность и скорость звука i -го компонента смеси; i — порядковый номер компонента, $i = 1, 2, 3, \dots, n$; β_i — объемная концентрация в смеси, $\sum_{i=1}^n \beta_i = 1$.

Обоснованность и области корректного использования линейного волнового уравнения при решении задач расширения полости в сжимаемой среде для одномерных случаев были рассмотрены в работах [6–8]. В прямых задачах условия задаются на подвижной границе. В обратных задачах условия известны только в некоторой точке r_1 волновой зоны, например, давление P в виде произвольной функции f :

$$P(r_1, t) = f\left(t - \frac{r_1 - r_0}{c}\right), \quad (3)$$

где t — время; r_0 — начальный фиксированный радиус подвижной границы; значения же исследуемых функций в других точках, в том числе и на подвижной границе, включая закон ее движения, подлежат определению.

В данной работе для решения волновых задач с подвижными границами был использован метод обратных задач с учетом взаимодействия нелинейных аргументов [8,9]. Случай цилиндрической симметрии

подвижной границы рассматривается в [9], здесь же исследуем сферическую симметрию.

Применяя к волновому уравнению одностороннее преобразование Лапласа, с учетом условия (3) и при нулевых начальных условиях можно получить операторное уравнение, точное аналитическое решение которого для бесконечной среды будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \varphi(r, t) &= \frac{r_1}{r\rho} \int_0^t f(\xi) dt; & \xi &= t - \frac{r - r_0}{c}; \\ \varphi(R(t), t) &= \frac{r_1}{R(t)\rho} \left[\int_0^t f(\xi) dt \right]_{r=R(t)}. \end{aligned} \quad (4)$$

Значения исследуемых функций в произвольной точке r волновой зоны

$$P(r, t) = \frac{r_1}{r} f(\xi) = F_1; \quad v(r, t) \frac{r^2 \rho}{r_1} = \frac{r}{c} f(\xi) + \int_0^t f(\xi) dt = F_2, \quad (5)$$

а на подвижной границе $R(t)$

$$P(R(t), t) = F_1(R(t), t) - \frac{1}{2} \rho v^2(R(t), t); \quad v(R(t), t) = F_2(R(t), t); \quad (6)$$

$$\frac{[R^3(t) - r_0^3] \rho}{3r_1} = \left[\int_0^t \frac{r}{c} f(\xi) dt + \int_0^t \int_0^t f(\xi) dt dt \right]_{r=R(t)}. \quad (7)$$

Если функцию f в выражениях (4)–(7) аппроксимировать полиномом Лагранжа степени m :

$$f = \sum_{m=0}^{\infty} A_m \xi_1^m, \quad (8)$$

где A_m — некоторые константы, то можно определить функции давления и скорости в точке волновой зоны:

$$P(r, t) = \frac{r_1}{r} \sum_{m=0}^{\infty} A_m \xi^m - \frac{1}{2} \rho v^2(r, t), \quad (9)$$

$$v(r, t) \frac{\rho r^2}{r_1} = \frac{r}{c} \sum_{m=0}^{\infty} A_m \xi^m + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m}{m+1} \xi^{m+1}, \quad (10)$$

а также давления и скорости на подвижной границе:

$$P(R(t), t) = \frac{r_1}{R(t)} \sum_{m=0}^{\infty} A_m \xi^m - \frac{1}{2} \rho v^2(R(t), t), \quad \xi = t - \frac{R(t) - r_0}{c}, \quad (11)$$

$$v(R(t), t) \frac{\rho R^2(t)}{r_1} = \frac{R(t)}{c} \sum_{m=0}^{\infty} A_m \xi^m + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m}{m+1} \xi^{m+1}, \quad (12)$$

$$\frac{[R^3(t) - r_0^3] \rho}{3r_1} = \frac{R(t)}{c} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m}{m+1} \xi^{m+1} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m \cdot m!}{(m+1)(m+2)} \xi^{m+2}. \quad (13)$$

Решения (9)–(13) являются точными (подстановка их в волновое уравнение обращает его левую часть в ноль) и универсальными (они применимы как для прямых, так и для обратных задач).

Для представления закона изменения давления в точке r_1 волновой зоны в виде ступеньки с определенной амплитудой A_0

$$P(r_1, t) = A_0 \sigma_0 \left(t - \frac{r_1 - r_0}{c} \right), \quad (14)$$

где σ_0 — единичная разрывная функция нулевого порядка, используя (4)–(7), можно получить следующие соотношения:

$$P(r, t) = \frac{r_1}{r} A_0 \sigma_0(\xi) - \frac{1}{2} \rho v^2(r, t), \quad (15)$$

$$v(r, t) = \frac{r_1}{r^2 \rho} \left[\frac{r}{c} A_0 + A_0 \xi \right], \quad \xi = t - \frac{r - r_0}{a}, \quad (16)$$

давление и скорость на подвижной границе $R(t)$

$$P(R(t), t) = \frac{r_1}{R(t)} A_0 - \frac{1}{2} \rho v^2(R(t), t), \quad (17)$$

$$v(R(t), t) = \frac{r_1}{R^2(t) \rho} \left[\frac{R(t)}{c} A_0 + A_0 \xi \right], \quad (18)$$

$$\frac{[R^3(t) - r_0^3] \rho}{3r_1} = \frac{R(t)}{c} A_0 \xi + \frac{A_0}{2} \xi^2, \quad \xi = t - \frac{R(t) - r_0}{c}. \quad (19)$$

Это точное аналитическое решение обратной задачи с подвижными границами имеет важное значение, в частности оно может быть

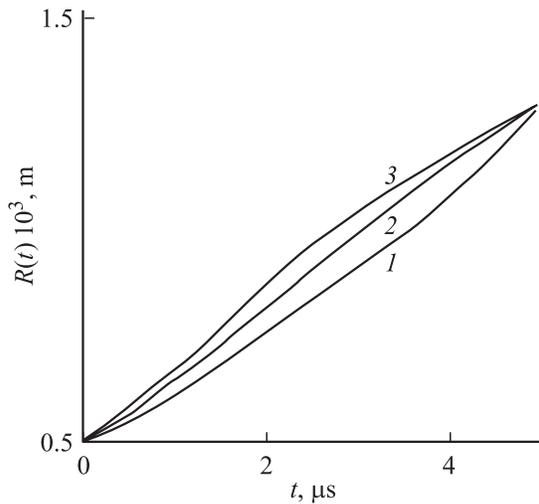


Рис. 1. Изменение во времени радиуса $R(t)$ подвижной границы плазменной полости, расширяющейся в воде (1), в смеси I (2), в смеси II (3).

использовано для оценок, для определения максимальных значений исследуемых функций.

Количественный расчет законов изменения $R(t)$, $P(R(t), t)$, $v(R(t), t)$, согласно выражениям (14)–(18), был проведен при $r_1 = 20 \cdot 10^{-3}$ м, $A_0 = 20$ атм = 1.96 МПа, $r_0 = 0.5 \cdot 10^{-3}$ м для таких сред:

- 1) воды с характеристиками $\rho = 1000$ кг/м³, и $c = 1460$ м/с;
- 2) смеси I с характеристиками $\rho = 840$ кг/м³ и $c = 800$ м/с (вода+воздух+одревесневшие волокна);
- 3) смеси II с характеристиками $\rho = 840$ кг/м³ и $c = 400$ м/с; результаты представлены на рис. 1–3.

Видно, что для рассматриваемых смесей по сравнению с водой как радиус подвижной границы больше (для смеси II — на 9% через 1 μs после начала движения), так и ее скорость больше (в начале движения: для смеси I — в 2 раза, для смеси II — в 4 раза).

Давление на подвижной границе плазменной полости, расширяющейся в смеси, меньше, чем при расширении в воде.

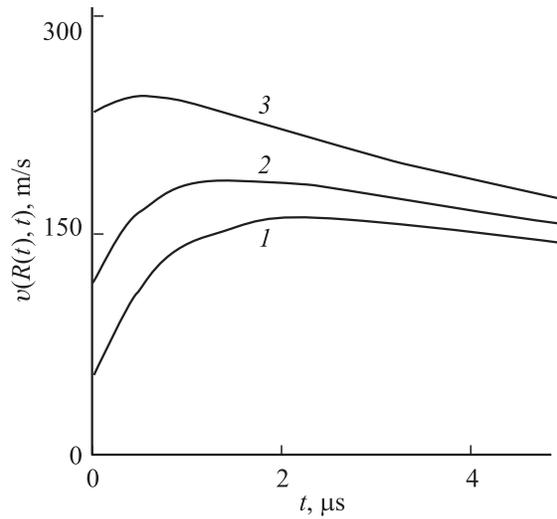


Рис. 2. Изменение во времени скорости $v(R(t), t)$ подвижной границы плазменной полости, расширяющейся в воде (1), в смеси I (2), в смеси II (3).

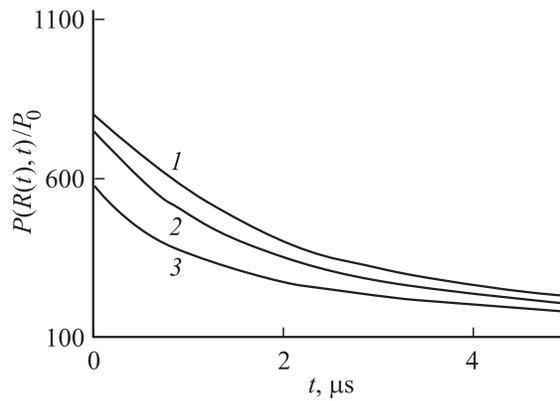


Рис. 3. Изменение во времени давления $P(R(t), t)$, отнесенное к начальному давлению P_0 , на подвижной границе плазменной полости в воде (1), в смеси I (2), в смеси II (3).

Тот факт, что в некоторых случаях полученные значения скорости границы выходят за пределы применимости линейного волнового уравнения, был проанализирован в [7].

Таким образом, описанная методика может быть использована для управления волновыми процессами, т.е. для получения определенной функции давления и скорости в заданной точке волновой зоны (включая ближнюю зону и подвижную границу) в различных многокомпонентных средах путем изменения их плотности и скорости звука в них с помощью изменения состава, варьирования концентраций отдельных компонентов смесей.

Список литературы

- [1] *Гаврилов Л.Р.* // Физика и техника мощного ультразвука. Т. 3. Физические основы ультразвуковой технологии. М.: Наука, 1970. С. 393–426.
- [2] *Сиротюк М.Г.* // Физика и техника мощного ультразвука. Т. 2. Мощные ультразвуковые поля. М.: Наука, 1968. С. 167–220.
- [3] *Ковалев В.Г., Ригина М.Б., Цуркин В.Н.* // Письма в ЖТФ. 1999. Т. 25. В. 6. С. 21–26.
- [4] *Бэтчелор Г.К.* // Механика. Периодич. сб. переводов иностр. статей. 1968. Вып. III. С. 65–84.
- [5] *Anderson A.L., Hampton L.D.* // JASA. 1980. V. 67. N 6. P. 1865–1889.
- [6] *Крутиков В.С.* Одномерные задачи механики сплошной среды с подвижными границами. Киев: Наук. думка, 1985. 125 с.
- [7] *Крутиков В.С.* // Акуст. журн. 1996. Т. 42. № 4. С. 534–540.
- [8] *Крутиков В.С.* // Докл. РАН. Раздел математика. 1999. Т. 364. № 1. С. 17–20.
- [9] *Крутиков В.С.* // Докл. РАН. Раздел физика. 1999. Т. 368. № 6. С. 755–758.