

01;07;08

Визуализация тепловых полей в нелинейной фотоакустике

© В.Б. Ошурко

Московский инженерно-физический институт
(Государственный университет)
E-mail: avbg@rol.ru

*Поступило в Редакцию 14 ноября 2005 г.
В окончательной редакции 20 марта 2006 г.*

Показано, что форма фотоакустического отклика в термонелинейном случае, т.е. при учете температурной зависимости коэффициента теплового расширения, оказывается результатом естественного вейвлет-преобразования от пространственного распределения тепловых источников.

PACS: 42, 81.70.Cv

Хотя физический принцип фотоакустики прост и давно известен (безызлучательная релаксация, нагрев, тепловое расширение), взаимосвязь между импульсом звукового давления и свойствами вещества может иметь довольно сложный характер. Это часто приводит к трудностям в интерпретации сигнала в реальных средах, поэтому установление каких-либо общих физических закономерностей, связывающих сложную форму акустического сигнала со свойствами среды, всегда оказывается полезным.

В линейной фотоакустике такой установленной закономерностью является тот факт, что форма акустического импульса определяется пространственным распределением источников тепла (или, точнее, представляет свертку формы лазерного импульса и функции распре-

деления тепловых источников) [1]. В частности, этот принцип используется для так называемой оптоакустической томографии [2].

Однако для нелинейного случая такая закономерность пока не установлена. Из различных нелинейных эффектов, известных в фотоакустике, одним из наиболее важных является зависимость термодинамических параметров (прежде всего, коэффициента теплового расширения) от температуры. Так, например, в воде коэффициент теплового расширения увеличивается от $\sim 0.2 \cdot 10^{-3}$ до $\sim 0.7 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$ (т.е. почти в 4 раза) с ростом температуры от 20 до 80°C [3], при температурах ниже 4°C этот коэффициент становится отрицательным. Очевидно, что даже при умеренных интенсивностях света, соответствующих нагреву в десятки градусов, этот эффект может существенно влиять на форму акустического сигнала.

Собственно, в оптоакустической томографии давно известно [4], что переход в термонелинейный режим может значительно улучшить качество томограммы и увеличить разрешение изображения, однако физические причины этого улучшения пока не были ясны. Попытаемся выяснить эти причины.

Рассмотрим для простоты вначале одномерный случай. Традиционным приближением в фотоакустике обычно является пренебрежение диффузией тепла. Это приближение справедливо для большинства практических случаев: так, например, в воде время диффузии тепла на расстояние $\sim 1 \mu\text{m}$ составляет около $\sim 1 \text{ ms}$, что гораздо больше не только времени формирования звукового отклика, но и времени прихода акустического сигнала на датчик.

Тогда, пренебрегая диффузией тепла (температуропроводность $\chi \rightarrow 0$), непосредственно из уравнения теплопроводности получаем

$$T(r, t) \approx \frac{kI_0 \cdot \tau_L}{\rho \cdot C_p} \cdot q(r) \cdot \int f(t) dt = T_0 \cdot q(r) \cdot \int f(t) dt, \quad (1)$$

где I_0 — интенсивность излучения, ρ — плотность, C_p — теплоемкость, k — коэффициент поглощения, T_0 — максимальное значение температуры во времени и пространстве. Нормированные функции $f(t)$ и $q(r)$ описывают распределение лазерного излучения во времени и пространстве, $T(r, t)$ — искомое распределение температуры. Легко видеть, что это решение справедливо и в трехмерном случае и, кроме того, не зависит от выбора вида системы координат (декартовой, сферической или цилиндрической).

Зная поле температуры, можно получить форму звукового давления во времени и в пространстве в одномерном случае из уравнения

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} (\beta(T) \cdot T) \equiv \frac{\partial G(t, x)}{\partial t}, \quad (2)$$

где акустический потенциал φ определяется как $p = -\rho \partial \varphi / \partial t$ (c — скорость звука, p — акустическое давление). Зависимость коэффициента теплового расширения от температуры, собственно и определяющую нелинейный характер звукового отклика, можно ввести как

$$\beta(T) = \beta_0 + \left(\frac{\partial \beta}{\partial T} \right) \cdot T = \beta_0 + \alpha \cdot T, \quad (3)$$

где $\alpha \approx 8 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-2}$ — нелинейный коэффициент теплового расширения. Тогда

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \beta_0 \cdot \frac{dT}{dt} + 2\alpha \cdot T \cdot \frac{dT}{dt}. \quad (4)$$

В силу линейности уравнения (2) импульс давления, очевидно, будет представлять собой сумму обычного линейного отклика (первый член в (4)) и чисто нелинейного (второй член в (4)). Далее рассмотрим только чисто нелинейную часть отклика. (В эксперименте это соответствует исходной температуре 4°C , при которой линейный коэффициент теплового расширения β обращается в нуль).

Общее решение уравнения (2) с определенными граничными условиями также хорошо известно [1,4]. Применяя к (2) последовательно Фурье-преобразование по времени и преобразование Лапласа по пространству, получим выражение для акустического давления p в точке наблюдения x в виде свертки пространственной и временной форм функции введенной выше функции $G(t, x) = F(t)H(x)$ [1]

$$p(x, t) = \frac{1}{2} \rho c \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} F\left(\tau - \frac{\xi}{c}\right) H^{ext}(\xi) d\xi, \quad (5)$$

где $\tau = t - x/c$ — время в движущейся системе отсчета; $H^{ext}(x)$ представляет собой, в зависимости от граничных условий, четкое (жесткая граница в $x = 0$) или нечетное (свободная граница) продолжение пространственной части функции $G(t, x)$ в область отрицательных x [1].

Рассмотрим для определенности, например, самый распространенный случай гауссова импульса $f(t) = \exp(-t^2/\tau_L^2)$. Тогда зависимость

от времени под интегралом (5) становится $F_\tau(t) = \exp(-t^2/\tau_L^2)\text{erf}(t/\tau_L)$. Для упрощения дальнейших выражений эту функцию можно хорошо аппроксимировать первой производной от гауссовой функции

$$F^*(t) = \exp(-t^2)\text{erf}(t) \approx -2t \exp(-t^2). \quad (6)$$

Легко убедиться, что это далеко не грубая аппроксимация. Можно оценить, что точность такой аппроксимации не хуже нескольких процентов, тогда как типичная экспериментальная ошибка аппроксимации лазерного импульса гауссовой функцией обычно превышает эту величину. Тогда (5) для нелинейного отклика окончательно имеет вид

$$p(x, t) = \alpha T_0^2 \rho c \int_{-\infty}^{\infty} F^* \left(\frac{\tau - \xi/c}{\tau_L} \right) q^{ext}(\xi)^2 d\xi, \quad (7)$$

где F^* определяется выражением (6).

Как можно видеть, мы получили выражение, эквивалентное известному в математике вейвлет-преобразованию [5] по базисным функциям F^* от пространственной функции $q(x)^2$.

Физически вейвлет-преобразование представляет собой аналог Фурье-преобразования, но по ограниченным во времени базисным функциям („всплескам“). Тем самым, в отличие от Фурье, вейвлет-преобразование, в принципе, позволяет проводить спектральный анализ (или фильтрацию) в ограниченном временном окне. Кроме того, задание спектрального окна (или так называемого вейвлет-коэффициента) позволяет изучать динамику некоторого сигнала на заданном уровне или масштабе временного разрешения (так называемый многомасштабный анализ).

Открытие вейвлет-преобразования часто считают одним из наиболее значительных достижений прикладной математики прошлого века. Это преобразование обеспечивает лучшие на сегодняшний день возможности выделения сигнала из шума. Кроме того, оно широко используется для сжатия и коррекции изображений, анализа поведения динамических систем, выделения скрытых особенностей сигналов на заданном временном масштабе [5]. (В частности, известный jpeg-формат изображений использует вейвлет-преобразование).

Как видно из (7), в нашем случае роль вейвлет-частоты (или масштаба разложения) играет величина $1/\tau_L$, определяемая импульсом света.

Однако далеко не любая функция (даже ограниченная во времени) может являться базисной для вейвлет-преобразования. Для обеспечения устойчивого разложения (5) и для возможности обратного преобразования от функции $p(x, t)$ к функции $q^{ext}(x)$, базисные функции вейвлет-разложения должны удовлетворять ряду требований, важнейшим из которых является требование ортогональности базисных функций, приводящее к требованию знакопеременности базисной функции ψ , так что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0.$$

Функция F^* , определяемая выражением (6), очевидно, удовлетворяет этому требованию. Более того, она является известной вейвлет-базисной функцией (gauss-1, [6]). Ясно, что в общем случае произвольной формы светового импульса требование знакопеременности будет выполняться всегда, если форма импульса симметрична, так что ее производная определяет некоторую знакопеременную функцию. Также легко видеть, что в случае линейного отклика подобное разложение не имеет места.

Таким образом, для одномерного случая искомую закономерность можно сформулировать следующим образом: временная форма нелинейного фотоакустического отклика представляет собой вейвлет-образ от квадрата пространственного распределения тепловых источников в случае симметричного (во времени) импульса света. При этом параметры вейвлет-разложения определяются характеристиками светового импульса — интенсивностью и длительностью.

Отсюда также ясна причина улучшения томографического анализа в термонелинейном режиме: вейвлет-разложение, как обычно при применении вейвлетов [5], по сути, осуществляет спектральную фильтрацию сигнала из шума на заданном масштабе (τ_L). Пример одномерной фильтрации приведен на рис. 1.

Гораздо менее очевидна справедливость сделанного утверждения в трехмерном случае. В общем случае звуковое давление $p(t)$ на датчике будет определяться суперпозицией звуковых волн, приходящих по каждому направлению в пространстве.

Конечно, если тепловое поле некоторого источника (например, поглощающей свет неоднородности) сферически-симметрично, а размер источника мал по сравнению с расстоянием до точки наблюдения, то этот случай сводится к одномерному простой заменой переменных. В этом случае все сделанные выводы справедливы.

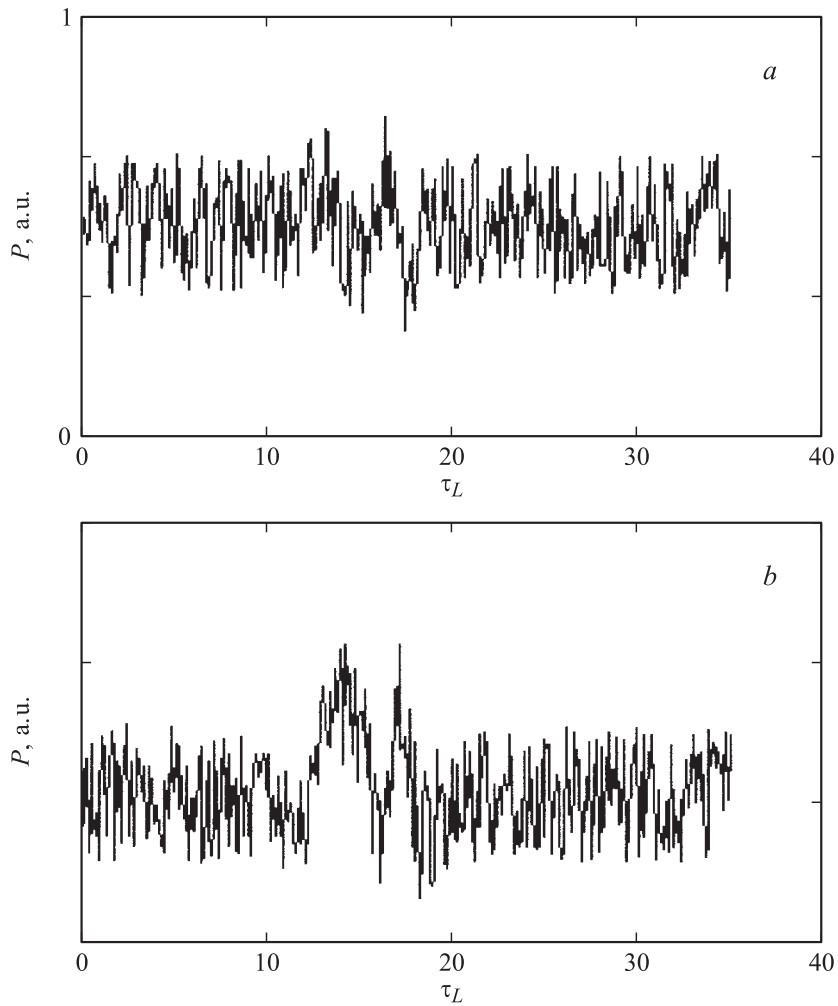


Рис. 1. Модельный фотоакустический отклик системы двух сферических частиц размерами $R = 30 \mu\text{m}$ и $1 \mu\text{m}$ с расстоянием между ними $50 \mu\text{m}$: *a* — линейный отклик при длительности лазерного импульса $\tau_L = 10 \text{ ns}$, *b* — нелинейный при длительности $\tau_L = 10 \text{ ns}$.

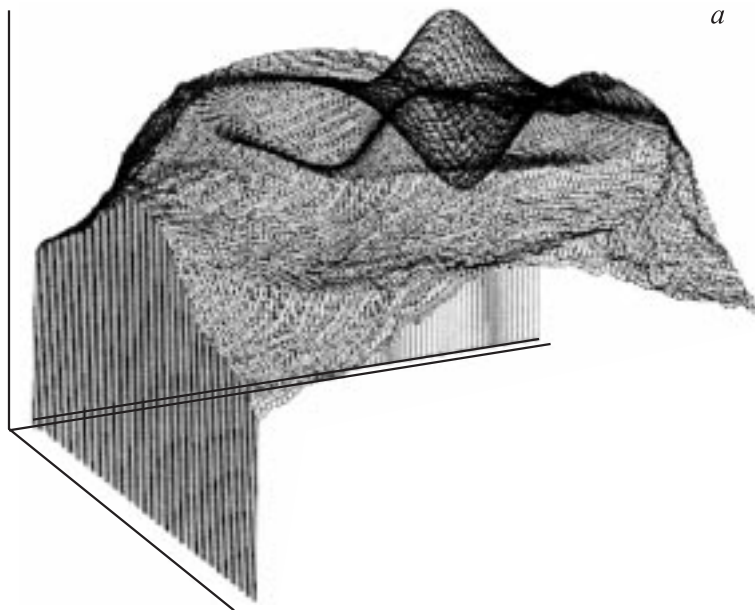


Рис. 2. Восстановление теплового поля по модельным откликам в двумерном случае для двух сферических частиц размерами $R = 30 \mu\text{m}$: a — линейный отклик при длительности лазерного импульса $\tau_L = 10 \text{ ns}$, b — нелинейный при длительности $\tau_L = 10 \text{ ns}$. Сигналы регистрировались в пяти точках по оси x и в пяти по оси y .

В общем же трехмерном случае решение по форме совпадает с (5), только в качестве функции $H(\xi)$ имеем суперпозицию волн, пришедших из всех точек теплового поля $q(r)$ [1]:

$$H(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \exp(-i\omega\xi) \iiint_{-\infty}^{\infty} q^{ext}(\mathbf{r})^2 \exp\left(-i \frac{\omega}{c} (\mathbf{n}\mathbf{r})\right) dx dy dz, \quad (8)$$

где \mathbf{n} — единичный радиус-вектор из начала координат в точку наблюдения. Однако, пользуясь (8), нетрудно численно смоделировать звуковой

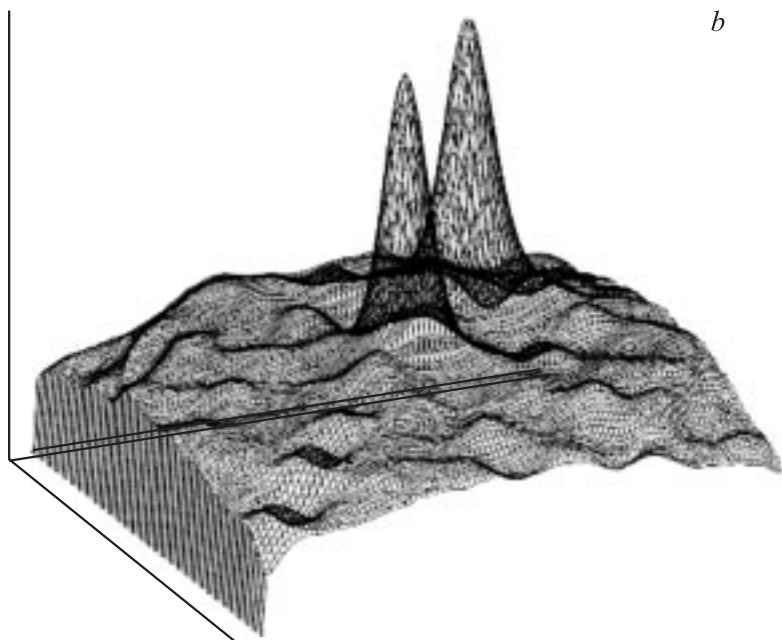


Рис. 2 (продолжение).

отклик некоторого теплового поля в различных точках наблюдения. Пример приведен на рис. 2. Для удобства визуализации приведен случай двумерного теплового поля, хотя совершенно аналогичные результаты получаются и в трехмерном случае. На рис. 2 показаны результаты восстановления теплового поля двух неоднородностей (их положение видно из рисунка) по стандартной процедуре [1] для линейного и нелинейного случая.

Как можно видеть, если в линейном случае определить положение неоднородностей довольно трудно, при нелинейном отклике результат очевиден. Это подтверждает сделанное утверждение (о нелинейном отклике как результате естественного вейвлет-преобразования теплового поля) для двумерного случая.

Список литературы

- [1] Гусев В.Э., Карabutov А.А. // Лазерная оптоакустика. М.: Наука, 1991.
- [2] Karabutov A.A., Pelivanov I.M., Podymova N.B. et al. // JETP Lett. 1999. V. 70. N 3. P. 183.
- [3] Справочник физических величин. М.: Энергоатомиздат, 1991. С. 222.
- [4] Inkov V.N., Karabutov A.A., Pelivanov I.M. // Laser Physics. 2001. V. 11. P. 1–9.
- [5] Дремин И.М., Иванов О.В., Нечитайло В.А. // УФН. 2001. Т. 171 (5). С. 465.
- [6] Daubechies I. Ten Lectures On Wavelets. New York, USA. SIAM ed., 1992.