

## СЛОЖНАЯ ДИНАМИКА СПИНОВОЙ СИСТЕМЫ ОПТИЧЕСКИ ОРИЕНТИРОВАННЫХ ЭЛЕКТРОНОВ И ЯДЕР В АЛМАЗОПОДОВНЫХ ПОЛУПРОВОДНИКАХ

© Л.А.Бакалейников, Е.В.Галактионов, И.А.Меркулов,  
Ю.А.Половко, Э.А.Тропп

Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе Российской академии наук,  
194021 Санкт-Петербург, Россия  
(Поступила в Редакцию 5 января 1996 г.)

Проведено теоретическое исследование модели связанной спиновой системы оптически ориентированных электронов и ядер в полупроводниках с кубической кристаллической структурой. Найдены значения физических параметров, обеспечивающие существование в модели режимов с пятью стационарными состояниями, а также ранее наблюдаемых в эксперименте режимов с двумя несоизмеримыми частотами колебаний (тор в фазовом пространстве). Исследованы возможные бифуркационные сценарии возникновения таких режимов. Для случая тора проведено изучение спектра Фурье и автокорреляционной функции, найдена корреляционная размерность аттрактора. Проведено качественное сравнение с экспериментальными данными.

Исследование динамики электронно-ядерной спиновой системы (ЭЯСС) в полупроводниках при условиях оптической ориентации вызывает большой интерес как в связи с экспериментальным обнаружением режимов с двумя несоизмеримыми частотами в твердом растворе AlGaAs [1], так и в связи с получением теоретических результатов [2], указывающих на возможность существования в этой системе пяти стационарных состояний. Теоретическая модель поведения такой системы была предложена в работах [3-5]. В рамках этой модели динамика ЭЯСС определяется двумя процессами: 1) эффектом Ханле для спинов фотовозбужденных электронов в суммарном магнитном поле, создаваемом внешним источником и поляризованными ядрами кристаллической решетки из-за сверхтонкого взаимодействия; 2) поляризацией спинов ядер кристаллической решетки в ходе спиновой релаксации неравновесной поляризации электронов. В [3] было показано, что последний процесс описывается некоторой матрицей  $\hat{a}$ , сложным образом зависящей от ориентации внешнего магнитного поля относительно кристаллографических осей. Развита модель в принципе допускала наличие пяти стационарных состояний ЭЯСС. Однако во всех изученных случаях число имеющих физический смысл стационарных состояний ЭЯСС не превышало трех [5-7]. В упомянутой выше работе [2] найдены значения параметров, обеспечивающие существование ровно пяти стационарных состояний у исходной системы при

условии независимости матрицы  $\hat{a}$  от внешнего поля. Однако эти параметры не удовлетворяли ограничениям, накладываемым на вид матрицы  $\hat{a}$  конкретными механизмами, определяющими обычно поляризацию ядер неравновесными фотоэлектронами. Естественно, возникает вопрос: возможно ли существование режимов с пятью стационарными состояниями в полупроводниках с кубической структурой (типа AlGaAs), когда матрица  $\hat{a}$  специальным образом зависит от внешнего магнитного поля [8]? Настоящая работа дает положительный ответ на этот вопрос. Кроме того, в ней найдены значения физических параметров, обеспечивающие существование режима автоколебаний с двумя несоизмеримыми частотами в математической модели, соответствующей указанному выше случаю.

Уравнения, описывающие динамику поведения связанной спиновой системы оптически ориентированных электронов и ядер в полупроводниках, можно, следуя [8], записать в виде

$$\mathbf{s} - \mathbf{k} = \mathbf{H} \times \mathbf{s}, \quad (1)$$

$$\frac{d\mathbf{H}}{dt} = \mathbf{h} - \mathbf{H} + \hat{a}\mathbf{s}, \quad (2)$$

где  $\mathbf{s}$  — средний спин ориентированных электронов,  $\mathbf{H}$  — полное поле, действующее на электронные спины, т. е. сумма постоянного внешнего магнитного поля  $\mathbf{h}$  и эффективного ядерного поля,  $\mathbf{k}$  — единичный вектор начальной ориентации спина,  $\hat{a} = \{a_{ij}\}$  — вещественная  $3 \times 3$  матрица, описывающая поляризацию ядер ориентированными электронами. В качестве единицы времени в уравнении (2) выбрано характерное время энергетической релаксации ядерно-спиновой системы  $T_1$ . Магнитное поле  $\mathbf{H}$  нормировано на полуширину кривой Ханле  $|\mathbf{H}_{1/2}| = \hbar(\tau + \tau_s)/(\mu_B g \tau \tau_s)$ , где  $\mu_B$  — магнетон Бора;  $\tau$ ,  $\tau_s$ ,  $g$  — время жизни, время спиновой релаксации и  $g$ -фактор фотоэлектронов соответственно. Характерным масштабом для спина электронов служит значение среднего спина электронов в отсутствие поля.

В настоящей работе в отличие от работ [2,6,7] предполагается, что матрица  $\hat{a}$  зависит от внешнего магнитного поля  $\mathbf{h}$ . Как показано в [8], при рассмотрении полупроводников с кубической структурой решетки и сильной анизотропией ядерного  $g$ -фактора ( $g_{\perp} \gg g_{\parallel}$ ), таких как AlGaAs, элементы матрицы  $\hat{a}$  определяются следующим образом:

$$a_{ij} = \frac{4}{3} a \delta_{ij} - a \sum_{l=1}^4 \frac{n_{il} n_{jl} h_L^2}{(\mathbf{h}, \mathbf{n}_l)^2 + h_L^2} + b \frac{h_i h_j}{h^2}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (3)$$

где  $h_L = |\mathbf{h}| \frac{g_{\perp}}{g_{\parallel}}$  — величина, характеризующая поле соседних ядер;  $a$  — параметр, описывающий влияние ядер с сильным квадрупольным расщеплением спиновых уровней;  $b$  — параметр, определяющий влияние сверхтонкого взаимодействия между электронами и ядрами;  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера;  $\mathbf{n}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, 1, 1)^T$ ,  $\mathbf{n}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, 1, 1)^T$ ,  $\mathbf{n}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1)^T$ ,  $\mathbf{n}_4 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, -1)^T$  — единичные векторы, направленные по диагоналям куба.

Ранее в динамической системе (1), (2) с произвольной матрицей  $\hat{a}$  была обнаружена возможность существования пяти точек покоя [2]. Оказывается, что и модель (1)–(3) допускает такую возможность. С помощью численного исследования этой модели было обнаружено, что при  $a = 48.8$ ,  $b = 79.6$ ,  $k = (-0.25, -0.82, 0.52)^T$ ,  $h = (46.67, 32.72, 0.)^T$ ,  $h_L = 2.35$  существует пять положений равновесия. Дальнейшее исследование позволило обнаружить области параметров, в которых рассматриваемая динамическая система имеет аттракторы более сложной, чем точки покоя, природы. Так, например, при значениях параметров  $a = 40$ ,  $b = 60$ ,  $k = (0., 1., 0.)^T$ ,  $h = (28.868, -40.825, 0.)^T$ ,  $h_L = 3$  в системе (1)–(3) существует устойчивая траектория  $H(t)$ , не стремящаяся к стационарному состоянию, зависимость которой от времени носит ярко выраженный колебательный характер. Спектр мощности этого

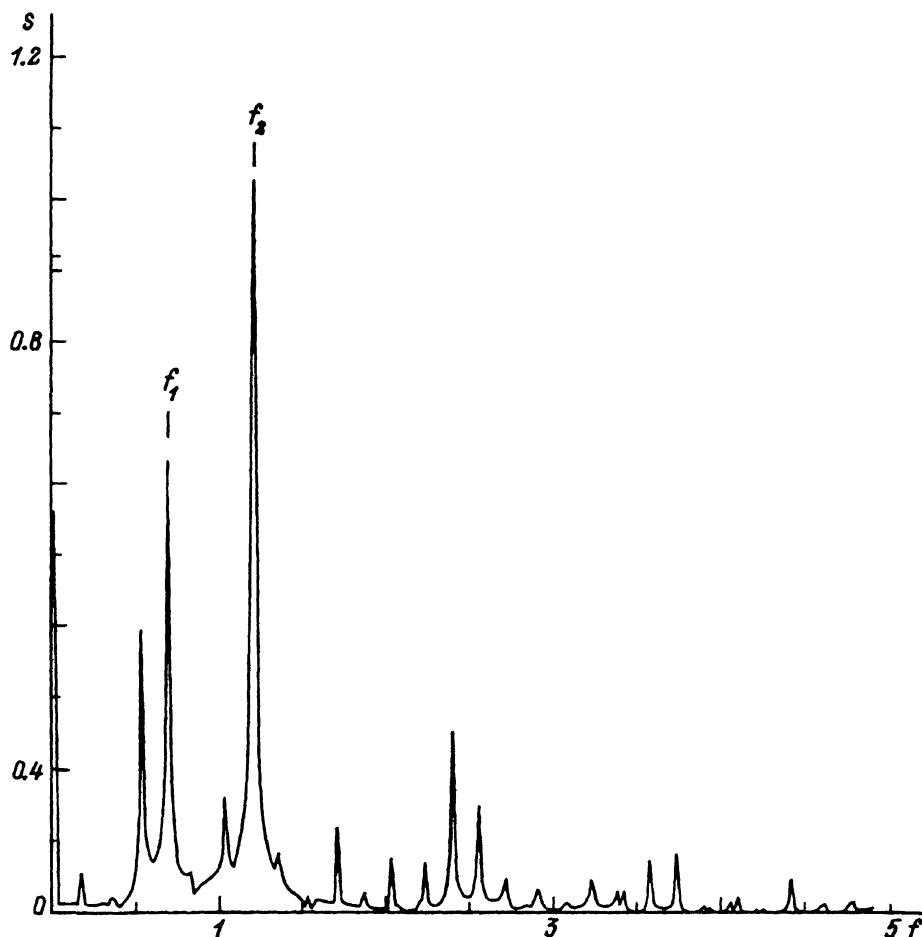


Рис. 1. Спектр мощности  $S$  устойчивой траектории  $H(t)$  динамической системы (1)–(3) при  $a = 40$ ,  $b = 60$ ,  $h = (28.868, -40.825, 0.)^T$ ,  $k = (0., 1., 0.)^T$ ,  $h_L = 3$ . Частота  $f$  измеряется в единицах  $1/T_1$ .

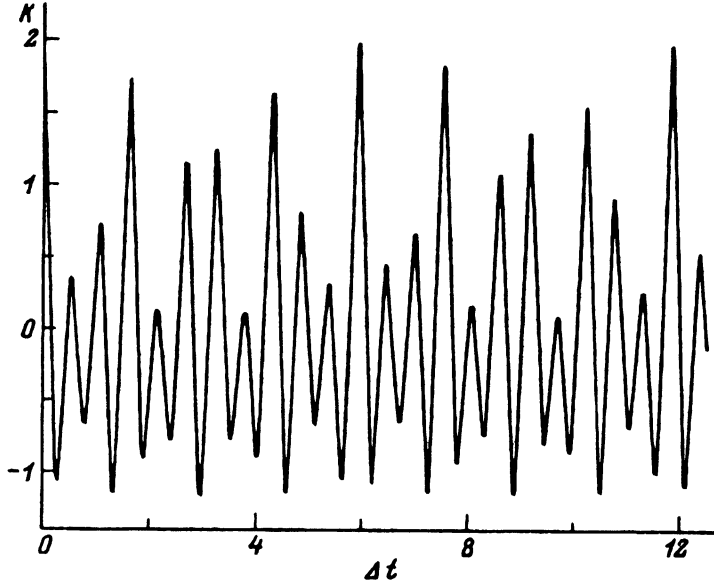


Рис. 2. Автокорреляционная функция  $K(\Delta t)$  траектории  $H(t)$ .

решения  $H(t)$  приведен на рис. 1. Видно, что в спектре преобладают гармоники двух частот  $f_1$  и  $f_2$ . Гармоника  $2f_2$  в спектре также может быть выделена, однако она значительно слабее основной. Исследование автокорреляционной функции, соответствующей тому же выбранному решению (рис. 2), показывает, что она имеет сложную структуру, которая, однако, близка к периодической.

Для более детального анализа исследуемого режима была вычислена корреляционная размерность аттрактора. Для дискретной последовательности точек  $H_n = H(\delta t n)$  на траектории она находится следующим образом (см., например, [9]). Прежде всего вычисляется корреляционный интеграл

$$C(\varepsilon) = \sum_{i,j} \theta(\varepsilon - |H_i - H_j|),$$

где  $\theta(x)$  — ступенчатая функция Хевисайда, а суммирование проводится по всем парам точек. Корреляционная размерность определяется как

$$D_2 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln(C(\varepsilon))/\ln(\varepsilon).$$

Для оценки корреляционной размерности в практических вычислениях обычно строится зависимость  $\ln(C(\varepsilon))$  от  $\ln(\varepsilon)$  для различного числа точек траектории, и величина  $D_2$  определяется по наклону линейного участка. Эта зависимость для исследуемой траектории при различном числе точек представлена на рис. 3. Увеличение наклона кривых при малых  $\varepsilon$  обусловлено уменьшением числа пар точек, расстояние между которыми меньше  $\varepsilon$ . Оценка значения  $D_2$  по наклону кривой в промежуточной области  $-3.5 < \log_2(\varepsilon) < -0.5$  приводит к  $D_2 = 2$ . Это указывает

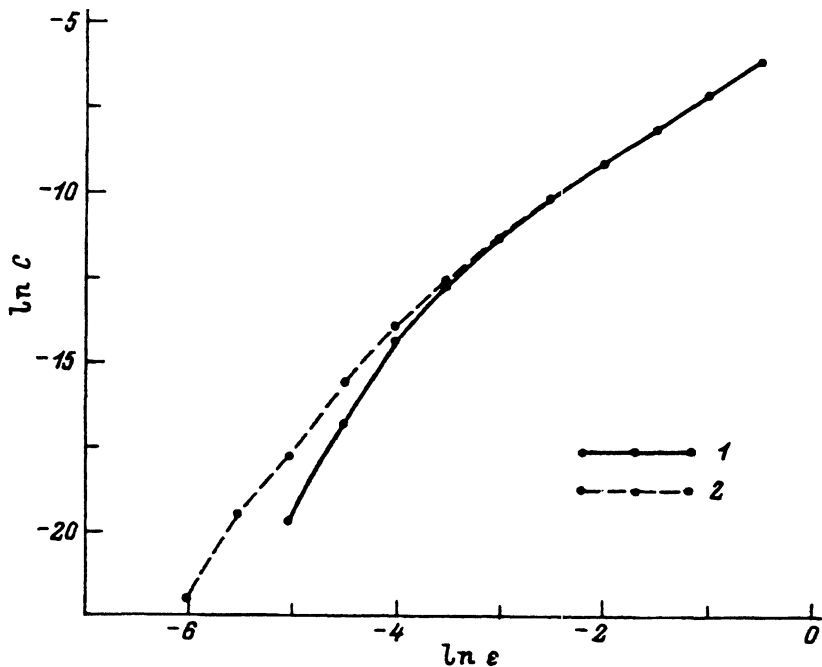


Рис. 3. Зависимость корреляционного интеграла  $C$  от величины  $\epsilon$  в логарифмическом масштабе для различного числа  $N$  точек траектории  $H(t)$ .  
 $N$ : 1 — 5000, 2 — 10000.

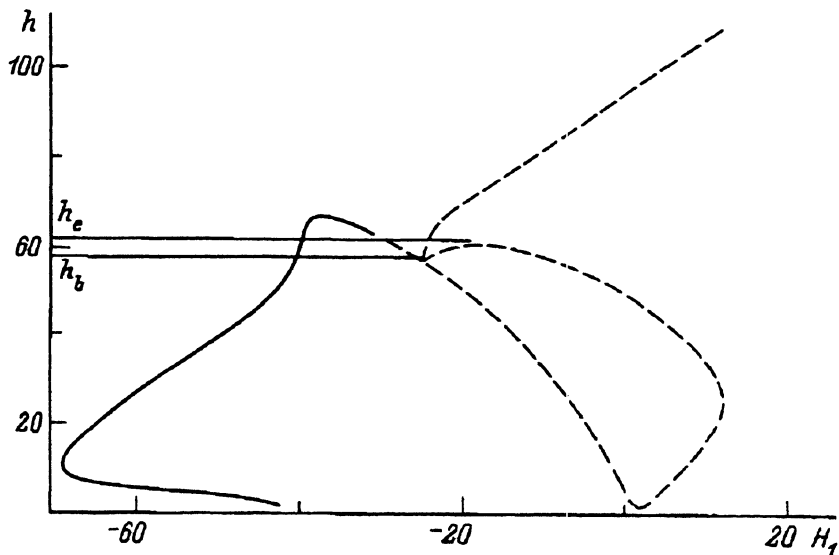


Рис. 4. Зависимость координат  $H_1$  всех существующих в системе (1)-(3) положений равновесия при  $a = 48.8$ ,  $b = 79.6$ ,  $k = (-0.25, -0.82, 0.52)^T$ ,  $h_L = 2.35$  от величины внешнего магнитного поля  $h$ , взятого в качестве бифуркационного параметра.

Неустойчивые положения равновесия отмечены штриховой линией. При  $h_b \leq h \leq h_e$  система имеет пять точек покоя.

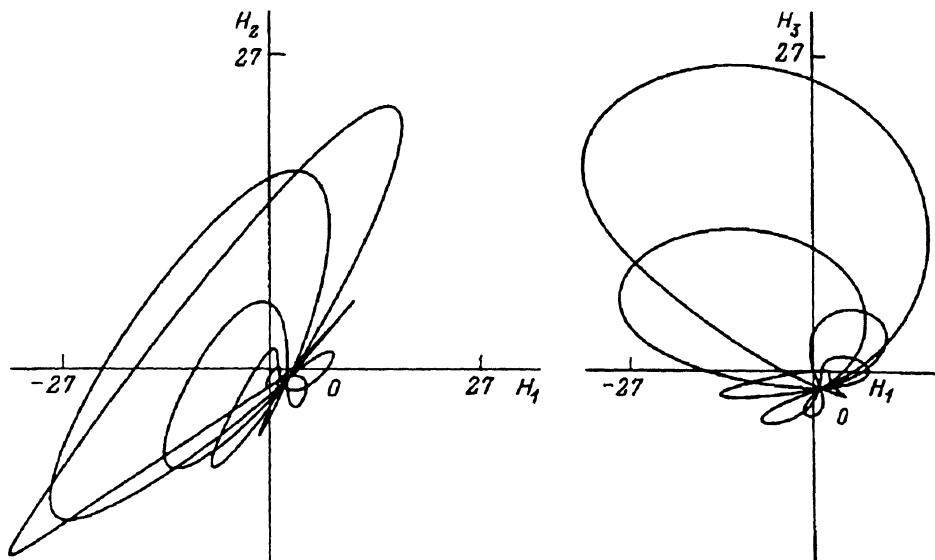


Рис. 5. Устойчивый цикл, возникающий в системе (1)–(3) при  $h = 51.3$ . Остальные параметры те же, что и на рис. 4.

на то, что аттрактор системы (1)–(3) при значениях параметров, приведенных выше, топологически эквивалентен тору. Заметим, что в том случае, когда траектория располагается на торе, однако представляет собой цикл (т.е. спектр мощности содержит соизмеримые частоты), корреляционная размерность оказывается равной единице.

Рассмотрим, как меняются количество и тип аттракторов системы (1)–(3) с увеличением величины внешнего магнитного поля  $h = |\mathbf{h}|$  при фиксированном направлении вектора  $\mathbf{h}$  для набора параметров, обеспечивающего существование ровно пяти стационарных состояний ( $a = 48.8$ ,  $b = 79.6$ ,  $\mathbf{k} = (-0.25, -0.82, 0.52)^T$ ,  $\mathbf{h} = (46.67, 32.72, 0.)^T$ ,  $h_L = 2.35$ ). При этом для отслеживания количества и типов положений равновесия наряду с приведенным далее описанием бифуркационного сценария удобно использовать рис. 4. На нем показана зависимость одной из координат положений равновесия ( $H_1$ ) от выбранного бифуркационного параметра  $h$ . Количество точек пересечения этой кривой с горизонтальной прямой дает число точек покоя системы при значении  $h$ , задающем данную прямую, и значениях остальных параметров, указанных выше. Неустойчивые положения равновесия изображены штриховой линией. Из этого рисунка, в частности, видно, что существует целый интервал значений бифуркационного параметра, при которых исследуемая система имеет пять точек покоя.

Итак, в отсутствие поля ( $h = 0$ ) рассматриваемая динамическая система имеет единственное положение равновесия (устойчивый узел), которое при увеличении поля до  $h = 0.01$  переходит в устойчивый фокус. При дальнейшем росте величины внешнего магнитного поля до  $h = 0.87$  возникает кратная точка покоя, разделяющаяся на два положения равновесия гиперболического типа, одно из которых при  $h = 0.99$  превращается в неустойчивый фокус. При  $h = 1.1$  имеющийся устойчивый фокус превращается в устойчивый узел. Дальнейшее увеличение

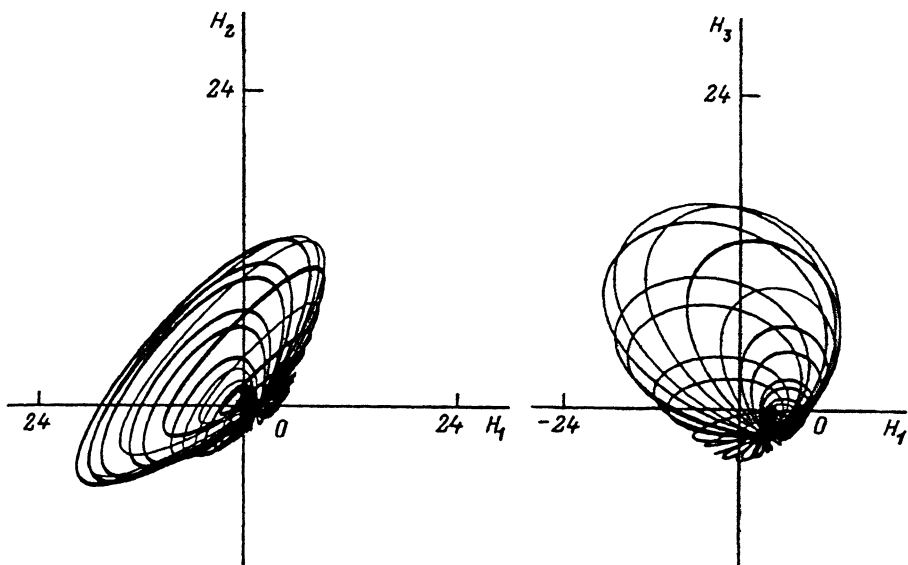


Рис. 6. Устойчивый тор, возникающий в системе (1)–(3) при  $h = 52.7$ .  
Остальные параметры те же, что и на рис. 4.

поля до  $h = 4.7$  приводит к обратному превращению неустойчивого фокуса в седло. При  $h = 33.2$  устойчивый узел переходит в устойчивый фокус. Величина внешнего поля  $h = 51.3$  соответствует возникновению устойчивого предельного цикла сложной формы, показанного на рис. 5. Этот цикл при  $h = 52.7$  превращается в тор (рис. 6). Наконец, при  $h = 56.6$  рождаются еще две гиперболические точки покоя, в результате чего исследуемая система обладает уже пятью положениями равновесия и одним устойчивым движением типа двумерного тора, демонстрируя, таким образом, весьма сложную структуру фазового пространства. Тор распадается при  $h = 57.4$ , снова переходя в предельный цикл сложного вида. Значение  $h = 58.9$  соответствует слиянию двух гиперболических точек равновесия и их исчезновению. Дальнейшее увеличение поля до величины  $h = 61.1$  снова приводит к возникновению тора. При значении  $h = 64.0$  одно из положений равновесия гиперболического типа и устойчивый фокус сливаются и исчезают. В фазовом пространстве системы остаются тор и одно положение равновесия гиперболического типа. Далее, при  $h = 66.0$ , тор превращается в цикл, а при  $h = 70.0$  оставшаяся гиперболическая точка покоя превращается в неустойчивый фокус. Наконец, при  $h = 96.7$  происходит бифуркация Андронова–Хопфа, устойчивый цикл «садится» на неустойчивый фокус, передавая ему свою устойчивость. В результате остается единственное описываемое системой устойчивое движение — положение равновесия (фокус). Дальнейшее увеличение поля уже не приводит ни к каким видимым качественным изменениям в фазовом пространстве. Таким образом, рост величины внешнего поля сопровождается большим количеством разного типа бифуркаций, в результате чего исследуемая система может описывать весьма сложные типы движений.

Таким образом, обнаруженные динамические режимы, реализующиеся в системе, обладают теми же особенностями поведения, что и экспериментально исследованные в [1] особенности поведения поляризации ЭЯСС полупроводника. Это позволяет сделать заключение о возможности использования системы (1)–(3) для моделирования динамики ЭЯСС.

Хотелось бы подчеркнуть, что в предыдущих работах [2,6,7], посвященных исследованию динамики ЭЯСС, были обнаружены только аттракторы простой структуры (стационарные состояния и циклы). Обнаружение в системе (1)–(3) аттракторов сложной структуры дает основание предполагать наличие в ней и странного аттрактора. Исследованию этого вопроса будет посвящена следующая публикация.

Авторы благодарны Б.П. Захарчене за интерес к проведенным исследованиям и В.Г. Флейшеру и В.К. Калевичу за полезные обсуждения.

Настоящая работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований по проекту 93-02-2611.

#### Список литературы

- [1] В.К. Калевич, В.Л. Корнев, А. Ченис. ФТТ **35**, 6, 1651 (1993).
- [2] Е.В. Галактионов, А.С. Зильберглейт, П.Л. Роскин. Препринт ФТИ № 1622. СПб. (1994). 11 с.
- [3] М.И. Дьяконов, И.А. Меркулов, В.И. Перель. ЖЭТФ **76**, 1, 314 (1979).
- [4] М.И. Дьяконов, И.А. Меркулов, В.И. Перель. ЖЭТФ **78**, 1, 349 (1980).
- [5] Оптическая ориентация / Под ред. Б.П. Захарчени, Ф. Майера. Наука. Л. (1989). С. 137–207.
- [6] Е.С. Артемова, Е.В. Галактионов, А.С. Зильберглейт. Препринт ФТИ № 1264. Л. (1988). 38 с.
- [7] Е.В. Галактионов, А.С. Зильберглейт. Препринт ФТИ № 1473. Л. (1990). 12 с.
- [8] E.S. Artemova, E.V. Galaktionov, V.K. Kalevich, V.L. Korenev, I.A. Merkulov, A.S. Silbergleit. Nonlinearity **4**, 49 (1991).
- [9] Г. Шустер. Детерминированный хаос. Мир. М. (1988). 240 с.