

01  
©1995 г.

## ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ ТЕПЛОВЫХ ВОЛН В СРЕДАХ С ТЕПЛОВОЙ ПАМЯТЬЮ

*И. А. Новиков*

Всероссийский научно-исследовательский институт им. Д.И. Менделеева,  
Санкт-Петербург, Россия  
(Поступило в Редакцию 17 мая 1994 г.)

Поставлена и решена задача о распространении гармонических тепловых волн в бесконечной пластине. Анализ проведен на основе общей теории теплопереноса в средах с тепловой памятью. Показано, что в таких средах возможны заметные эффекты интерференции, что может приводить к эффекту многолучевой интерференции гармонических тепловых волн, аналогично оптическому.

### Введение

Общеизвестны недостатки феноменологической теории теплопроводности, основанной на градиентном соотношении Фурье между плотностью теплового потока  $\mathbf{q}$  и градиентом температуры  $\nabla T$ :

$$\mathbf{q} = -\lambda_0 \nabla T, \quad (1)$$

где  $\lambda_0$  — теплопроводность.

Их анализ проведен, например, в [1]. Учет конечности скорости распространения теплового возмущения в феноменологическом подходе проводится обычно на основе модифицированного соотношения для теплового потока

$$\tau_0 \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{q} = -\lambda_0 \nabla T, \quad (2)$$

где  $\tau_0$  — время релаксации теплового потока.

Краткий анализ современного состояния этой теории, а также ее приложений дан в [1,2].

Более общая феноменологическая теория теплопереноса в средах с памятью (ТСП) построена в [3,4]. Она основана на ливейных интегральных определяющих соотношениях для плотности теплового по-

тока и объемной плотности внутренней энергии  $e$  ( $\rho_0$  — плотность материала)

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}, t) = -\lambda_0 \left[ \lambda_1(0) \nabla T + \int_0^{\infty} \dot{\lambda}_1(\tau) \nabla T(\mathbf{x}, t - \tau) d\tau \right];$$

$$e(\mathbf{x}, t) - e_0 = \rho_0 c_0 \left[ c_1(0) T + \int_0^{\infty} \dot{c}_1(\tau) T(\mathbf{x}, t - \tau) d\tau \right]. \quad (3)$$

Здесь  $c_0$  — объемная теплоемкость,  $\lambda_1(t)$  и  $c_1(t)$  — нормированные релаксационные функции (РФ) теплопроводности и объемной теплоемкости, причем  $\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda_1(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} c_1(t) = 1$ . Применяя к (3) преобразование Фурье, соотношения ТСП можно записать в частотной области. При этом вместо РФ появятся динамические теплофизические характеристики материалов, зависящие от частоты. Частным случаем модели (3) является соотношение Фурье (1), или по терминологии [5] обычная среда Фурье, если принять РФ равными  $\lambda_1(t) = c_1(t) = 1$ , где единичная функция Хевисайда  $H(t) = 0$  при  $t < 0$  и  $H(t) = 1$  при  $t \geq 0$ . Соотношению (2) по терминологии [5] эталонной среде Максвелла соответствуют РФ вида  $\lambda_1(t) = 1 - e^{-t/\tau_0}$ ,  $c_1(t) = H(t)$  или  $c_1(t) = 1 - (1 - c_1(0))e^{-t/\tau_0}$ . Следует отметить, что тепловое возмущение в физической системе включается, начиная с определенного момента времени. Это приводит в интегральных соотношениях (3) к интегрированию от нуля до  $t$ . В соответствии с термодинамическими требованиями в ТСП на РФ налагаются некоторые ограничения [4]. В качестве РФ в физике обычно используется линейная суперпозиция экспоненциальных функций с различными временами релаксации, которая заведомо удовлетворяет термодинамическим требованиям [4].

В соответствии с термодинамическими требованиями все среды с тепловой памятью делятся на два класса [3,5]: среды типа Фурье, в которых мгновенные значения РФ подчиняются соотношениям  $\lambda_1(0) > 0$ ,  $c_1(0) > 0$ ; среды типа Максвелла, в которых мгновенные значения РФ подчиняются соотношениям  $\lambda_1(0) = 0$ ,  $\dot{\lambda}_1(0) > 0$ ,  $c_1(0) > 0$ . В [3,5] показано, что в средах типа Фурье распространение теплового возмущения происходит с бесконечной скоростью. Основные качественные свойства теплопереноса в таких средах совпадают с обычной средой Фурье. В средах типа Максвелла распространение теплового возмущения происходит с конечной скоростью. Это приводит к тому, что основные качественные свойства теплопереноса в них совпадают с особенностями эталонной среды Максвелла.

Интерес к развитию теории ТСП вызван двумя причинами. Первая — это возможность описания более широкого класса физических явлений переноса тепла [6–8], не описываемых соотношениями (1) и (2). Вторая причина — это предсказание разнообразных физических эффектов, возможных в средах с тепловой памятью [9–11].

В полную систему теории ТСП, помимо соотношений (3), входят уравнение баланса внутренней энергии ( $\sigma$  — объемная плотность ис-

точников внутренней энергии в единицу времени)

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} = -\operatorname{div} \mathbf{q} + \sigma \quad (4)$$

и дополнительные условия однозначности (начальные и краевые).

В работе проводится анализ наиболее важной в теоретическом и практическом плане задачи — поведения гармонических тепловых волн (ТВ) в бесконечной пластинке для сред с тепловой памятью. Показано, что в таких средах возможны заметные эффекты интерференции ТВ, аналогичные многолучевой интерференции электромагнитных волн в оптике.

## 1. Постановка и решение задачи о распространении ТВ

Математическая формулировка одномерной задачи о распространении гармонических ТВ в пластинке толщиной  $l$  с теплоизоляцией на одной стороне включает в себя определяющие соотношения (3) и уравнение (4) без источника ( $\sigma = 0$ ); нулевое начальное условие для температуры (а для сред типа Максвелла дополнительное начальное условие [5])

$$T(x, 0) = 0, \quad \left( \frac{\partial T(x, 0)}{\partial t} = 0 \right), \quad (5)$$

условие теплоизоляции при  $x = 0$

$$q(0, t) = 0 \quad (6)$$

и краевое условие для температуры на второй стороне пластины

$$T(l, t) = T_m \cos \omega t. \quad (7)$$

Применяя преобразование Лапласа к (3)–(7), получим изображение решения задачи

$$\bar{T}(x, p) = \frac{T_m}{p - i\omega} \frac{\operatorname{ch} K_0(p) \frac{x}{\sqrt{a_0}}}{\operatorname{ch} K_0(p) l / \sqrt{a_0}}, \quad K_0(p) = \sqrt{\frac{p C_1(p)}{\Lambda_1(p)}}. \quad (8)$$

Здесь  $\Lambda_1(p)$ ,  $C_1(p)$  — изображения соответствующих РФ,  $\bar{T}$  — изображение температуры,  $a_0 = \lambda_0 / \rho_0 c_0$  — температуропроводность. Перейдем от (8) в область оригиналов. Интересующее нас стационарное гармоническое приближение определяется полюсом  $p = i\omega$ , так как вычеты в остальных полюсах содержат экспоненциально затухающие сомножители. Вводя функции

$$f_c \left[ \frac{K_0(i\omega)}{\sqrt{\omega}} z \right] = \operatorname{ch} \left( \frac{K_p(\omega)}{\sqrt{\omega}} z \right) \cos \left( \frac{K_m(\omega)}{\sqrt{\omega}} z \right); \quad K_p(\omega) = \operatorname{Re} K_0(i\omega);$$

$$f_s \left[ \frac{K_0(i\omega)}{\sqrt{\omega}} z \right] = \operatorname{sh} \left( \frac{K_p(\omega)}{\sqrt{\omega}} z \right) \sin \left( \frac{K_m(\omega)}{\sqrt{\omega}} z \right); \quad K_m(\omega) = \operatorname{Im} K_0(i\omega) \quad (9)$$

и безразмерные координату  $X = x/l$ , частоту  $\operatorname{Pd} = \omega l^2 / a_0$ , время  $\operatorname{Fo} = a_0 t / l^2$ , температуру в пластине можно записать (аналогично [12]) в

виде гармонического колебания с коэффициентом ослабления  $\xi$  и сдвигом фаз  $\varphi$

$$T(X, Fo) = T_m \xi(X, Pd, K_0) \cos(Pd Fo - \varphi(X, Pd, K_0));$$

$$\xi = \frac{\left[ f_c^2 \left( \frac{K_0}{\sqrt{\omega}} \sqrt{Pd} X \right) + f_s^2 \left( \frac{K_0}{\sqrt{\omega}} \sqrt{Pd} X \right) \right]^{1/2}}{\left[ f_c^2 \left( \frac{K_0}{\sqrt{\omega}} \sqrt{Pd} \right) + f_s^2 \left( \frac{K_0}{\sqrt{\omega}} \sqrt{Pd} \right) \right]^{1/2}};$$

$$\varphi = \text{arctg} \left[ \frac{f_s \left( \frac{K_0}{\sqrt{\omega}} \sqrt{Pd} X \right) f_c \left( \frac{K_0}{\sqrt{\omega}} \sqrt{Pd} \right) - f_c \left( \frac{K_0}{\sqrt{\omega}} \sqrt{Pd} X \right) f_s \left( \frac{K_0}{\sqrt{\omega}} \sqrt{Pd} \right)}{f_c \left( \frac{K_0}{\sqrt{\omega}} \sqrt{Pd} X \right) f_c \left( \frac{K_0}{\sqrt{\omega}} \sqrt{Pd} \right) + f_s \left( \frac{K_0}{\sqrt{\omega}} \sqrt{Pd} X \right) f_s \left( \frac{K_0}{\sqrt{\omega}} \sqrt{Pd} \right)} \right] \quad (10)$$

В аналогичном виде можно записать выражение для теплового потока. Особенно простые выражения формулы (10) принимают при  $X = 0$  (на теплоизолированной стороне пластины)

$$\xi_0 = \xi(X = 0, Pd, K_0) = \left[ \text{ch}^2 \left( \frac{K_p}{\sqrt{\omega}} \sqrt{Pd} \right) \cos^2 \left( \frac{K_m}{\sqrt{\omega}} \sqrt{Pd} \right) + \right. \\ \left. + \text{sh}^2 \left( \frac{K_p}{\sqrt{\omega}} \sqrt{Pd} \right) \sin^2 \left( \frac{K_m}{\sqrt{\omega}} \sqrt{Pd} \right) \right]^{-1/2}$$

$$\varphi_0 = \varphi(X = 0, Pd, K_0) = \text{arctg} \left[ \text{th} \left( \frac{K_p}{\sqrt{\omega}} \sqrt{Pd} \right) \text{tg} \left( \frac{K_m}{\sqrt{\omega}} \sqrt{Pd} \right) \right]. \quad (11)$$

Используя асимптотику разложения РФ при  $t \rightarrow \infty$  [5,9], можно показать, что в любой затухающей тепловой среде с памятью при  $\omega \rightarrow 0$   $K_0(i\omega) \rightarrow \sqrt{i\omega}$ ,  $K_p \rightarrow \sqrt{\omega/2}$ ,  $K_m \rightarrow \sqrt{\omega/2}$  и коэффициент ослабления  $\xi_0$  асимптотически переходит в известное монотонно убывающее решение  $\xi_{\text{кл}}(Pd/2)$  [12] для обычной среды Фурье.

## 2. Анализ особенностей распространения гармонических ТВ

Особенности переноса тепла в средах с тепловой памятью определяются двумя факторами: свойствами самой тепловой среды с памятью и временными характеристиками тепловых режимов нагружения (под ними понимаются дополнительные условия однозначности — начальные и краевые). Вклад памяти самой тепловой среды в процессе теплопереноса определяется набором времен релаксации  $\tau_{\text{РФ}}$  РФ и мгновенными значениями  $\lambda_1(0)$  и  $c_1(0)$  РФ среды. Процесс распространения гармонических ТВ при низких частотах в любой среде с тепловой памятью асимптотически стремится к однотипному процессу теплопереноса в обычной среде Фурье. При высоких частотах особенности распространения тепла определяются типом переноса тепла, поэтому поведение гармонических ТВ в средах с тепловой памятью разного типа может быть различным.

Распространение ТВ в средах типа Фурье. В [9] показано, что при  $\omega \rightarrow \infty$   $K_0(i\omega) = \sqrt{d_1 i \omega} + O(1)$ , где  $d_1 = c_1(0)/\lambda_1(0)$ . Поэтому коэффициент ослабления ТВ  $\xi_0$  на теплоизолированной стороне пластины представляет собой монотонно убывающую функцию частоты, постепенно переходящую от  $\xi_{кл}(Pd/2)$  при малых  $\omega$  к  $\xi_{кл}(d_1 Pd/2)$ . Переход  $\xi_0$  в свою высокочастотную асимптотику происходит при  $Pd > (5-10)/d_1$ .

На рис. 1 показано поведение коэффициента ослабления ТВ для обычной среды Фурье (кривая 1), а также поведение  $\xi_0(Pd)$  для двух физических систем из рассмотренных в экспериментальном обзоре [8]. Кривая 2 описывает поведение ТВ в глицерине в области перехода в стеклообразное состояние, при этом вид РФ, а также типовое значение ее параметров взяты из работ [6,7]. Кривая 3 описывает типичное поведение ТВ в дисперсной среде, при этом вид РФ и типовые значения ее параметров были взяты из [8,13].

Поведение коэффициента  $\xi(X, Pd, K_0)$  в зависимости от координаты  $X$  удобно анализировать, представив  $\xi$  в виде

$$\xi(X, Pd, K_0) = \xi_0 \cdot \xi_1(X, Pd, K_0), \quad (12)$$

где  $\xi_1$  можно привести к виду

$$\xi_1 = \left[ \frac{1}{2} + \text{sh}^2 \left( \frac{K_p}{\sqrt{\omega}} \sqrt{Pd} X \right) + \frac{1}{2} \cos \left( \frac{2K_m}{\sqrt{\omega}} \sqrt{Pd} X \right) \right]^{1/2}. \quad (13)$$

Из формул (12), (13) видно, что коэффициент  $\xi$  в зависимости от  $X$  монотонно убывает от единицы до  $\xi_0$  по мере увеличения расстояния от границы ( $X = 1$ ), где приложено гармоническое тепловое воздействие, до  $X = 0$ .

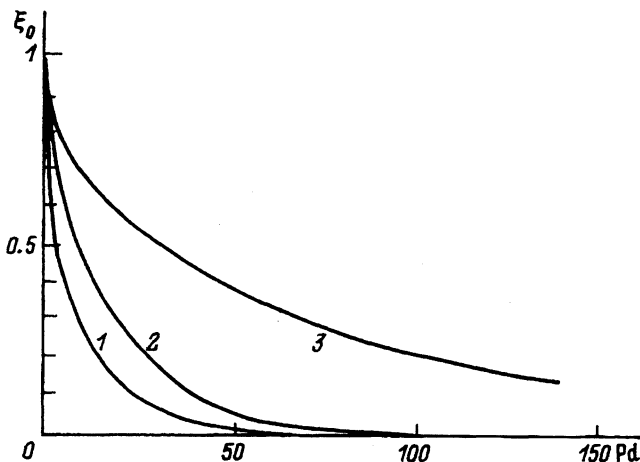


Рис. 1. Зависимость коэффициента ослабления  $\xi_0$  ТВ для сред с памятью типа Фурье.

Распространение ТВ в средах типа Максвелла. Функцию  $K_0(i\omega)$  удобно представить в средах типа Максвелла в виде

$$K_0(i\omega) = \sqrt{-d_2(\omega)\omega^2 + id_1(\omega)\omega}; \quad K_m(\omega) = \sqrt{\frac{d_1(\omega)\omega}{2} K_1(\omega)};$$

$$K_p(\omega) = \sqrt{\frac{d_1(\omega)\omega}{2K_1(\omega)}}; \quad K_1(\omega) = \sqrt{1 + \frac{d_2^2(\omega)\omega^2}{d_1^2(\omega)} + \frac{d_2(\omega)\omega}{d_1(\omega)}}, \quad (14)$$

где  $d_1(\omega)$  и  $d_2(\omega)$  — вещественные функции.

Используя разложение РФ при малых временах в виде [9], их можно представить при  $\omega \rightarrow \infty$  в виде

$$d_2(\omega) = d_2 + O(\omega^{-2}); \quad d_1(\omega) = d_1 + O(\omega^{-2}); \quad d_1 = d_2 \left( \frac{c_1^{(1)}(0)}{c_1(0)} - \frac{\lambda_1^{(2)}(0)}{\lambda_1^{(1)}(0)} \right);$$

$$K_p = \frac{d_1}{2d_2} + O(\omega^{-2}); \quad K_m = \sqrt{d_2} \omega + O(\omega^{-1}); \quad d_2 = c_1(0)/\lambda_1^{(1)}(0). \quad (15)$$

Коэффициент ослабления ТВ на теплоизолированной стороне пластины в средах типа Максвелла при высоких частотах колеблется между значениями

$$\xi_{\min} = \left[ \operatorname{ch} \left( \frac{d_1 l}{2\sqrt{a_0 d_2}} \right) \right]^{-1}; \quad \xi_{\max} = \left[ \operatorname{sh} \left( \frac{d_1 l}{2\sqrt{a_0 d_2}} \right) \right]^{-1}; \quad \omega \rightarrow \infty. \quad (16)$$

Таким образом, в средах типа Максвелла коэффициент  $\xi_0$  при низких частотах ведет себя как  $\xi_{\text{кл}}(Pd/2)$ , с увеличением  $\omega$  ( $\omega \sim d_1/d_2$ ) он уменьшается все медленнее, а при дальнейшем увеличении частоты у него появляются резонансы. При  $\omega > (5-10)d_1/d_2$  колебания коэффициента определяются формулой (16). При этом свои наименьшие (наибольшие) значения  $\xi_0$  принимает при

$$\omega_n = \frac{n\pi w}{l} \quad \left( \omega_n = \left( n - \frac{1}{2} \right) \frac{\pi w}{l} \right),$$

где  $w = \sqrt{a_0/d_2}$  — скорость распространения фронта теплового возмущения [5]. Этот результат является следствием интерференции первоначальной тепловой волны и отраженных от границ пластины волн. Он физически очевиден, если учесть, что ТВ отражаются от границы  $X = 0$  без изменения фазы, а от  $X = 1$  — с изменением фазы на  $\pi$ . Последнее можно показать, разлагая выражение (8) по экспонентам аналогично тому, как это сделано в [10].

Рассмотрим поведение ТВ в эталонной среде Максвелла, соответствующей гиперболическому уравнению теплопроводности (соотношению (2)). Так как  $K_0(p) = \sqrt{\tau_0 p^2 + p}$ , то, вводя безразмерные частоту  $\omega_1 = \tau_0 \omega$  и параметр релаксации  $\tau_{00} = \sqrt{l^2/a_0 \tau_0}$ , формулу для  $\xi_0$

можно записать в виде

$$\xi_0(\omega_1) = \left[ \frac{1}{2} + \text{sh}^2(\tau_{00}z) + \frac{1}{2} \cos(2\tau_{00}y) \right]^{-1/2};$$

$$z = \sqrt{\frac{\tilde{r} - \omega_1^2}{2}}; \quad y = \sqrt{\frac{\tilde{r} + \omega_1^2}{2}}; \quad \tilde{r} = \omega_1 \sqrt{1 + \omega_1^2}. \quad (17)$$

При высоких частотах ( $\tau_{00}\omega_1 > 5$ ) функция  $\tau_0$  принимает вид

$$\xi_0(\omega_1) = \left[ \frac{1}{2} + \text{sh}^2\left(\frac{\tau_{00}}{2}\right) + \frac{1}{2} \cos(2\tau_{00}\omega_1) \right]^{-1/2}. \quad (18)$$

Свои максимальные  $\xi_{\max} = (\text{sh}(\tau_{00}/2))^{-1}$  и минимальные  $\xi_{\min} = (\text{ch}(\tau_{00}/2))^{-1}$  значения коэффициент  $\xi_0$  принимает соответственно при  $\omega_n = (n + \frac{1}{2})\pi/\tau_{00}$  и  $\omega_n = n\pi/\tau_{00}$ ;  $n = 1, 2, \dots$ . На рис. 2 показана зависимость  $\xi_0(\omega_1)$  для различных параметров релаксации, при этом штриховыми линиями показаны соответствующие асимптотические значения  $\xi_{\min}$  и  $\xi_{\max}$ . При уменьшении параметра релаксации ( $\tau_{00} < 1$ ) максимумы  $\xi_{\max}$  резко возрастают, а минимумы стремятся к единице. При этом форма кривой  $\xi_0(\omega_1)$  становится несимметричной: максимумы — более узкими, минимумы — более широкими (рис. 2, а). Физически это соответствует уменьшению объемного поглощения ТВ в пластине, что приводит к увеличению числа эффективно интерферирующих отраженных ТВ. Такое явление аналогично переходу в оптике от двухлучевой к многолучевой интерференции.

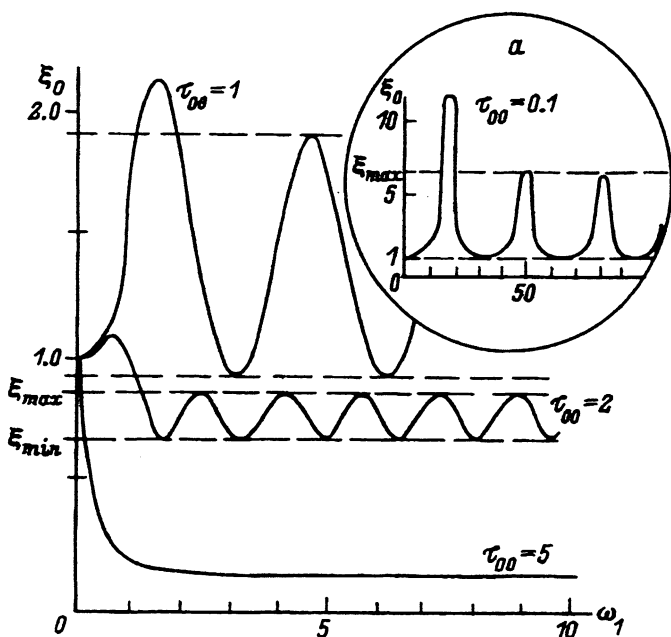


Рис. 2. Зависимость коэффициента ослабления  $\xi_0$  ТВ для эталонной среды Максвелла при разных значениях параметра релаксации.

Зависимость коэффициента ослабления  $\xi$  от координаты  $X$  в эталонной среде Максвелла удобно анализировать, используя представление (12), причем функция  $\xi_1$  принимает вид

$$\xi_1 = \left[ \frac{1}{2} + \operatorname{sh}^2(\tau_{00} z X) + \frac{1}{2} \cos(2\tau_{00} y X) \right]^{1/2}, \quad (19)$$

где  $\tau_{00}$ ,  $z$ ,  $y$  определены формулой (17).

Анализ поведения  $\xi_1$  от  $X$  указывает на наложение монотонно убывающей и осциллирующей зависимостей. Таким образом, колебательный характер функции  $\xi$  от  $X$  имеет более сложный вид, чем в оптике. По мере увеличения параметра  $\tau_{00}$  (уменьшение времени релаксации) размах колебаний в функции  $\xi$  уменьшается, а при  $\tau_{00} > 5$  практически исчезает. При этом зависимость  $\xi$  от  $X$  приобретает монотонный характер и приближается к аналогичной зависимости для обычной среды Фурье.

Отметим, что реально интерференцию гармонических ТВ можно наблюдать в  $\text{He}_4$  при распространении тепла в режиме второго звука (в диапазоне температур  $T \sim 1.0\text{--}1.8$  К). В [14] экспериментально наблюдалось отражение тепловых волн прямоугольной формы для  $\text{He}_4$ , а в [1] проведено теоретическое описание этих экспериментов.

## Выводы

Проведенный анализ позволяет сделать вывод о том, что в средах с тепловой памятью различного типа гармонические ТВ ведут себя принципиально по-разному. В средах типа Фурье при  $\omega \rightarrow \infty$  при воздействии гармонических ТВ на одну сторону пластины амплитуда ТВ на второй стороне пластины стремится монотонно к нулю. В средах типа Максвелла при  $\omega \rightarrow \infty$  амплитуда гармонических ТВ колеблется между максимальными и минимальными значениями, которые определяются равновесными и релаксационными теплофизическими свойствами среды, а также толщиной пластины. В средах типа Максвелла в области частот  $\omega > (5\text{--}10)d_1/d_2$  заметным образом могут проявляться при распространении ТВ такие волновые явления, как интерференция. Следует отметить, что в принципе (при достаточно малом параметре релаксации  $\tau_{00}$ ) возможна передача с усилением гармонических ТВ через пластину.

## Список литературы

- [1] Frankel J.I., Vick B., Ozisik M.N. // *IJHMT*. 1987. Vol. 30. N 7. P. 1293–1305.
- [2] Шашков А.Г., Бубнов В.А., Яновский С. Волновые явления теплопроводности. Минск: Наука и техника, 1993. 274 с.
- [3] Nunziato J.W. // *Quart. Appl. Math.* 1971. Vol. 29. N 7. P. 187–204.
- [4] Колпацников В.Л., Новиков И.А., Шнип А.И. // Матер. VII Всесоюз. конф. по тепломассообмену. Т. 7. Теплопроводность. Минск. 1984. С. 40–45.
- [5] Новиков И.А. // *ИФЖ*. 1983. Т. 44. № 4. С. 664–672.
- [6] Birge N.O. // *Phys. Rev.* 1986. В. 34. P. 1631–1642.
- [7] Birge N.O., Nagel S.L. // *Phys. Rev. Lett.* 1985. Vol. 54. N 25. P. 2674–2677.
- [8] Новиков И.А., Колпацников В.Л., Шнип А.И. // *Реофизика и теплофизика неравновесных систем*. Ч. 1. Минск, 1991. С. 58–64.
- [9] Новиков И.А. // *ЖТФ*. 1987. Т. 57. Вып. 6. С. 1061–1064.



- [10] *Новиков И.А.* // ЖТФ. 1994. Т. 64. Вып. 4. С. 3–8.
- [11] *Новиков И.А.* // ИФЖ. 1988. Т. 55. № 4. С. 643–650.
- [12] *Лыков А.В.* Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967. 599 с.
- [13] *Буевич Ю.А.* // ИФЖ. 1989. Т. 56. № 5. С. 779–787.
- [14] *Torczynski J.R.* // Phys. Fluids. 1984. Vol. 27. N 11. P. 2636–2644.
-