Письма в ЖТФ, том 22, вып. 7 12 апреля 1996 г.

01

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ВОССТАНОВЛЕНИЯ НЕОДНОРОДНЫХ АТТРАКТОРОВ

© *В.С.Анищенко, Н.Б.Янсон, А.Н.Павлов*

В настоящее время разработан ряд методов реконструкции аттракторов динамических систем (ДС) по их одномерным реализациям $a(t)$ [1,2 и ссылки в ней]. Наиболее популярными из них являются метод задержки и метод последовательного дифференцирования, согласно которым вектор состояния в фазовом пространстве определяется следующим образом:

$$\mathbf{x}_i = \Big\{a(t), a(t+\tau), \ldots, a(t+(m-1)\tau)\Big\} \tag{1}$$

или

$$\mathbf{x}_i = \Big\{a(t), da(t)/dt, \ldots, d^{m-1}a(t)/dt^{m-1}\Big\}, \tag{2}$$

где m — размерность пространства вложения, τ — задержка.

Недостатки и достоинства данных методов были указаны в работах [2–5], причем особенно ярко они проявляются при обработке зашумленных неоднородных реализаций.[1]

Поскольку часто задача восстановления аттракторов ДС ставится в связи с решением задачи реконструкции модели ДС в виде системы обыкновенных дифференциальных

[1] Под неоднородностью реализации понимается чередование во времени участков с быстрыми и медленными движениями.

уравнений (ОДУ), метод дифференцирования может оказаться предпочтительнее, поскольку математическая модель будет в этом случае иметь вид

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_3, \ldots, \quad \dot{x}_N = f(x_1, \quad x_2, \ldots, x_N). \qquad (3)$$

Однако при дифференцировании неоднородной реализации мы будем получать зависимость, состоящую из участков еще более медленных и участков с еще более быстрым движением, т. е. еще более неоднородную реализацию. Восстановленный таким образом аттрактор будет в результате более неоднородным, чем при использовании метода задержки, в связи с чем получение модельных уравнений сильно затрудняется.

Предлагаемый нами метод восстановления аттрактора ДС состоит в следующем. Рассмотрим типичную экспериментальную реализацию $a(t)$, которая может быть представлена как сумма четырех слагаемых:

$$a(t) = O(t) + S(t) + N(t) + C, \qquad (4)$$

где $O(t)$ — колебательная составляющая, которая может быть представлена в виде ряда Фурье, причем среднее значение $O(t)$ по времени равно 0; $S(t)$ — компонента, появляющаяся при нестационарности процесса и отвечающая за “плавание” среднего уровня, которое обычно является очень низкочастотным процессом; $N(t)$ — аддитивный шум с малой дисперсией D_N по сравнению с дисперсией динамической составляющей $O(t)$ процесса $a(t) - D_S$: $D_N \ll D_S$; C — постоянная составляющая автоколебательного процесса.

Рассмотрим в качестве одной из реконструированных координат интеграл от исходной реализации $a_1(t) = \int_0^t a(t)dt$. Для стационарной незашумленной реализации с нулевым средним значением

$$a_1(t) = \int\limits_0^t a(t)dt = \int\limits_0^t O(t)dt = O_1(t), \qquad (5)$$

т. е. будет состоять только из колебательной компоненты. Таким образом, поскольку при рассмотрении колебательного процесса нас чаще всего интересует его стационарная часть $O(t)$, координата $a_1(t)$ сохранит всю информацию о ней. При этом в случае работы с неоднородными реализациями интегрирование медленных участков даст более быстроменяющиеся зависимости, в то время как интегрирование быстрых участков даст более медленноменяющиеся

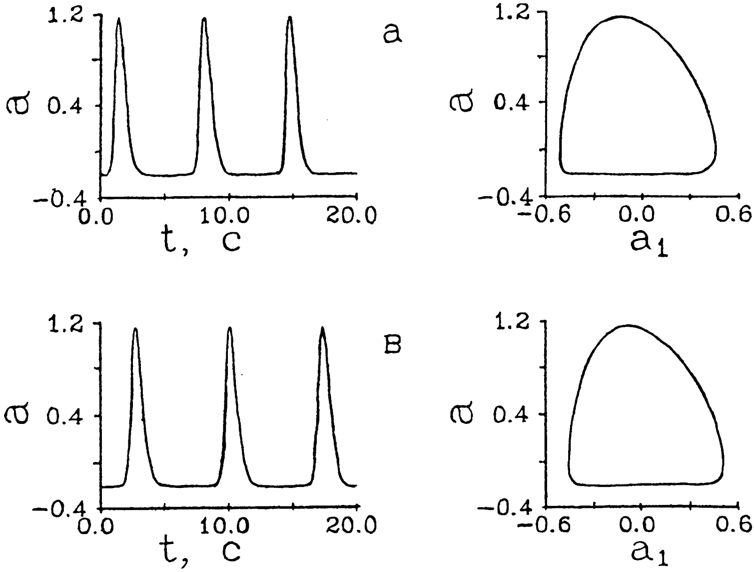

Рис. 1. *а* — исходная реализация $a(t)$ системы (8), преобразованная способом, указанным в тексте; *б* — проекция фазового портрета, восстановленного по данной реализации, на плоскость $a(t)$, $a_1(t) = \int_0^t (t)dt$; *в*, *г* — реализация и проекция аттрактора соответствующей реконструированной ДС.

функции, т. е. $a_1(t)$ будет более однородной, чем $a(t)$, а значит, и аттрактор, восстановленный по формулам

$$\mathbf{x}_i = \left\{ \int_0^t a(t)dt, a(t), da(t)/dt, \ldots, d^{m-2}a(t)/dt^{m-2} \right\} \qquad (6)$$

или

$$\mathbf{x}_i = \left\{ \int_0^t a(t)dt, a(t), a(t+\tau), \ldots, a(t+(m-2)\tau) \right\}, \qquad (7)$$

будет более однородным, чем при использовании формул (1) или (2). Кроме того, при вложении (6) реконструированные ОДУ сохранят простой вид (3).

Проиллюстрируем работу описанного метода на примере известной системы — генератора Ван-дер-Поля:

$$\dot{x}_1 = x_2, \qquad \dot{x}_2 = a \cdot (1 - b \cdot x_1^2) \cdot x_2 - x_1. \qquad (8)$$

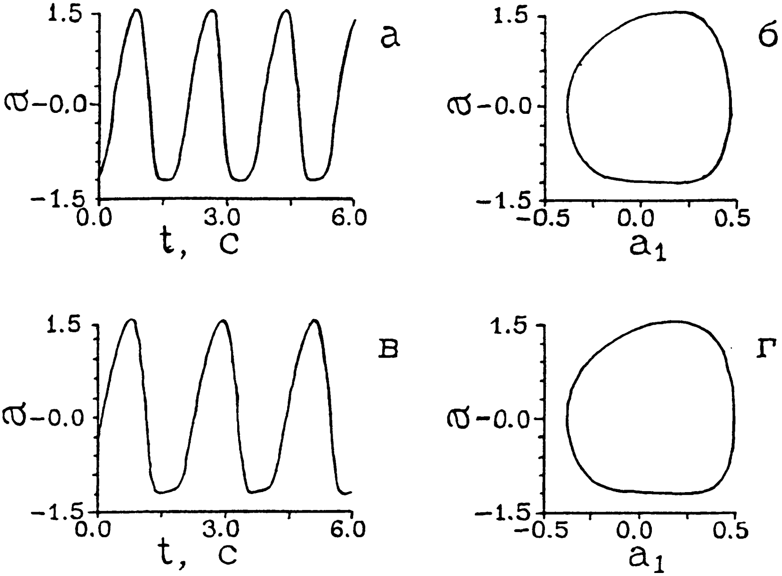

Рис. 2. *а* — исходная реализация $a(t)$ механических колебаний точки на поверхности изолированного сердца лягушки; *б* — проекция фазового портрета, восстановленного по данной реализации, на плоскость $a(t)$, $a_1(t) = \int_0^t a(t)dt$; *в, г* — реализация и проекция аттрактора соответствующей реконструированной ДС.

При $a > 0$, $b > 0$ единственным аттрактором системы является предельный цикл [6]. Чтобы получить неоднородную реализацию (чередование "пауз" и быстрых участков), было осуществлено нелинейное преобразование координаты $x_1(t)$, полученной при численном решении уравнений (8) (для случая $a = 1$, $b = 1$), состоявшее в том, что сигнал, условно говоря, пропускался через выпрямитель с заданной нелинейной характеристикой. В результате полученная реализация, показанная на рис. 1,*а*, имела требуемый вид и, будучи приведена к нулевому среднему значению, была использована для реконструкции аттрактора (рис. 1,*б*) способом (6). Далее методом, описанным в [7,8], была восстановлена 4-мерная ДС с реализацией $a(t)$ и аттрактором, изображенными на рис. 1,*в, г*. Заметим, что наши попытки использовать метод (1) или (2) для создания глобальной модели данного режима не были успешными.

Искусственный прием для получения реализации с "паузами" был использован только для тестирования метода.

Но в реальной жизни такие зависимости встречаются достаточно часто, фактически к ним относятся все реализации, описывающие деятельность сердец различных организмов.

Убедившись в работоспособности приведенного метода при восстановлении ДС по неоднородным реализациям, мы применили его к реальному временно́му ряду биологического происхождения, описывающему механические колебания точки на поверхности изолированного сердца лягушки, предварительно подвергнутого фильтрации шума методом [9]. Эта реализация имеет достаточно простой вид и в то же время является неоднородной в силу наличия в ней "пауз" (рис. 2, *а*). Аттрактор системы был также восстановлен методом (6) (рис. 2, *б*). Реконструированная нами ДС, моделирующая данный режим, имеет аттрактор, идентичный исходному (рис. 2, *б* и *г*), реализация которого показана на рис. 2, *в*.

Приведенные примеры применения предложенного нами метода подтверждают его работоспособность.

В заключение перечислим основные преимущества и недостатки описанного метода.

1. Существенным ограничением метода является требование стационарности исходных данных. Влияние даже слабой нестационарности при интегрировании резко возрастает.

2. Метод достаточно прост в использовании.

3. Применение метода интегрирования уменьшает неоднородность восстановленного аттрактора, что существенно увеличивает вероятность получения удачной модели при реконструкции уравнений методом наименьших квадратов.

4. При восстановлении ДС с его помощью уравнения имеют простую форму (3).

Мы благодарим Г.Е. Брилля, Ю. Порозова и П.И. Сапарина за предоставленные нам реализации колебаний точки на поверхности сердца лягушки.

Список литературы

[1] *Takens F.* // Dynamical Systems and Turbulence / Ed. by D.A. Rang and L.S. Young. Lecture Notes in Mathematics // Springer-Verlag, New York, 1980. P. 366–381.
[2] *Breeden J.L., Packard N.H.* // Int. J. of Bif. and Chaos. 1994. V. 4. N 2. P. 311–326.
[3] *Малинецкий Г.Г., Потапов А.Б., Рахманов А.И.* / Препринт Ин. прикл. матем. им. В.М. Келдыша АН СССР. 1993. N 10.
[4] *Потапов А.Б.* / Препринт Ин. прикл. матем. им. М.В. Келдыша РАН. 1995. № 13.

[5] *Landa P.S., Rosenblum M.G.* // Physica D. 1991. V. 48. P. 232–254.
[6] *Неймарк Ю.И., Ланда П.С.* Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987. 424 с.
[7] *Cremers J., Hübler A.Z.* // Z. Naturforsch. A. 1987. V. 42. N 8. P. 797–802.
[8] *Грибков Д.А., Грибкова В.В., Кравцов Ю.А.* // Радиотехника и электроника. 1994. В. 2. С. 269–277.
[9] *Press W.H., Teukolsky S.A., Vetterling W.T.* Numerical Recipies in FORTRAN: the art of scientific computing / 2nd ed. Cambridge University Press, 1992. P. 644–649.

Саратовский государственный
университет
кафедра радиофизики
Лаборатория
нелинейной динамики

Поступило в Редакцию
29 января 1996 г.