Письма в ЖТФ, том 22, вып. 10 26 мая 1996 г.

03;01

О НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПЕРЕДНЕЙ КРОМКИ ПЛЕНКИ НЕНЬЮТОНОВСКОЙ ЖИДКОСТИ

© *С.М.Батурин, Г.А.Павлов*

Исследование устойчивости передней кромки при растекании определенного объема жидкости по поверхностям различной формы представляет интерес как с точки зрения механики жидкостей, так и в прикладном плане, поскольку с неустойчивостью передней кромки связано, в частности, образование неоднородностей в различного рода покрытиях. Известны исследования [1], в которых проведен анализ устойчивости поверхности пленок в случае растекания ньютоновских жидкостей. В то же время большинство покрытий образуются неньютоновскими жидкостями — растворами полиметров, многокомпонентными полимерными суспензиями, различными лаками и т. п. Поэтому ниже рассмотрим растекание неньютоновской жидкости по поверхностям простой формы: наклонной плоскости и вращающемуся диску.

Движение пленки несжимаемой жидкости по наклонной поверхности со скоростью u в пренебрежении инерционными членами и при условии, что все переменные зависят лишь от координат вдоль поверхности x и поперек поверхности z в приближении смазки [2], описывается уравнением (для ньютоновской жидкости $n = 1$):

$$\rho g \sin\alpha + \sigma \cdot (\partial/\partial x)(\partial^2 h/\partial x^2) + \eta(\partial/\partial z)(\partial u/\partial z)^n = 0. \qquad (1)$$

В (1) ρ, σ, h, g — плотность, коэффициент поверхностного натяжения, толщина пленки жидкости и ускорение свободного падения соответственно; α — угол наклона плоскости. При этом вязкий тензор напряжений неньютоновской жидкости выбран в форме [3]:

$$\tau' = 2\eta \cdot S^{n-1} \cdot D. \qquad (2)$$

В (2) S — удвоенная свертка тензоров скоростей растяжения $D = (1/2)(\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T)$, η и n — параметры неньютоновской жидкости. Поскольку целью работы является анализ устойчивости поверхности пленки, представим в усредненное по толщине пленки уравнение неразрывности (V — усредненная по координате z скорость)

$$\partial h/\partial t + \nabla \cdot h\mathbf{V} = 0 \qquad (3)$$

— результат интегрирования уравнения движения (1). После преобразований найдем уравнение для формы поверхности. В безразмерных переменных данное уравнение имеет вид

$$\partial\delta/\partial\tau + (\partial/\partial x^*)(\delta^{1+2n} + \varepsilon^3\delta^{1+2n}\partial^3\delta/\partial x^{*3})^{1/n} = 0, \qquad (4)$$

$$x^* = x/L, \quad \tau = t/t_0, \quad \delta = h/H, \quad \varepsilon^3 = \sigma H(\rho g \sin\alpha L^3)^{-1},$$

$$t_0^{-1} = H^{1/n+1}(\rho g \sin\alpha/\eta)^{1/n}(n/(2n+1))L^{-1}.$$

В (4) H и L — характерные толщина и длина пленки, причем $H/L \ll 1$. Безразмерная толщина δ в уравнении (4) вдали от фронта имеет почти плоскую форму, и там, где $\partial^3\delta/\partial x^{*3} \ll \varepsilon^{-3}$, можно пренебречь вторым членом в скобках в уравнении (4); за фронтом происходит переход в прекурсионную пленку [4], толщина которой $\delta_c \ll 1$. Рассмотрим уравнение (4) в окрестности фронта растекающейся пленки — x_f^* в области размером порядка капиллярной длины ($l^2 \sim \sigma/\rho g$). Введем переменную $x^{**} = (x^* - x_f^*)/\varepsilon$, т.е. перейдем в систему координат, связанную с фронтом. Тогда в квазистационарном приближении ($\varepsilon \ll 1$) и при условии, что скорость фронта ($w = \dot{x}_f$) может быть определена из массового баланса при растекании пленки вдали от фронта, уравнение для формы пленки есть

$$(1-b^{2+1/n})(\varkappa-1)(b-1)^{-1}-1+(1+\partial^3\varkappa/\partial\zeta^3)^{1/n}\varkappa^{2+1/n} = 0, \quad (5)$$

$$b = \delta_c/\delta_f, \varkappa = \delta/\delta_f, \zeta = \delta_f^{1/3}x^{**}.$$

В (5) $\delta_f(t)$ есть толщина пленки во фронте, время играет роль параметра, так как $b = b(t)$. Уравнение (5) представляет собой, по существу, обыкновенное дифференциальное уравнение со следующими граничными условиями:

$$\varkappa \Rightarrow 1 \text{ при } \zeta \Rightarrow -\infty; \quad \varkappa \Rightarrow b \text{ при } \zeta \Rightarrow \infty. \qquad (6)$$

Поскольку (5) не содержит ζ непосредственно, нет необходимости в третьем граничном условии, решение зависит от значения параметра b.

Исследуем линейную устойчивость решения в окрестности фронта растекающейся пленки. Для этого в уравнении (3), переписанном в соответствующей системе координат, введем переменные $\xi = (x - x_f)/l$, $s = y/1$, $f = h/l$, представим f в виде $f_0(\xi) + f_1(\xi, s, t)$, пусть $f_1/f_0 \ll 1$. В системе координат, связанной с фронтом, запишем

$$(\partial f_0/\partial\xi)(\partial\xi/\partial\tau) + \partial f_1/\partial\tau + (\partial f_1/\partial\xi)(\partial\xi/\partial\tau) + \beta\nabla\cdot vf = 0.$$

Здесь $\tau = l/u_0$, $u_0 = \rho g l^2/\sin\alpha(n/(2n+1))/\mu$, $\beta = (\rho g\sin\alpha/\eta)^{1/n} l^{l/n+1} u_0^{-1}$, $v = u\cdot u_0^{-1}\cdot\beta^{-1}$, μ-const; заметим, что параметр $\beta = 1$ для ньютоновской жидкости. После подстановки в v суммы $f_0 + f_1$ и линеаризации найдем

$$\partial f_1/\partial\tau = -(\partial/\partial\xi)\Big\{\nabla_\xi(f_{1\xi\xi} + f_{1ss})f_0^{n+2}/n +$$

$$+(1+1/n)f_1 + (1-\beta)f_1\Big\}\beta. \tag{7}$$

Уравнение (7), полученное с использованием (5) для f_0 (при $b \Rightarrow 0$) и пригодное для качественного анализа устойчивости передней кромки растекающейся жидкости, следует решать с соответствующим возмущением "границы": $\xi_b = A(s)B(t)$, $A(s) = \cos qs$ (где $-\pi/2 < qS < \pi/2$ образует так наываемый "палец", который растет при $\partial B/\partial t > 0$, $B(t) = B_0\exp(\theta\tau)$); при этом f_1 можно представить в виде

$$f_1(\xi, s, \tau) = A(s)G(\xi)e^{\theta\tau}. \tag{8}$$

Граничные условия для f_1 таковы: при $\xi \Rightarrow -\infty$, $\xi_b f_1 \Rightarrow 0$.

Рассмотрим в длинноволновом пределе устойчивость формы пленки. Подстановка (8) в (7) дает лишь четные степени q в (7), поэтому для качественного анализа устойчивости используем разложения для G и θ: $G = g_0(\xi) + q^2 g_1(\xi) + \ldots$, $\theta = \theta_0 + q^2\theta_1 + q^4\theta_2 + \ldots$; подставляя указанные разложения в (7), найдем в нулевом порядке по q^2:

$$\theta_0 g_0 = -(\partial/\partial\xi)(f_0^{n+2}\partial^3 g_0/\partial\xi^3 + kng_0)/n; \quad k = 2 + 1/n - \beta. \tag{9}$$

В случае ньютоновской жидкости ($\beta = 1$) при $g_0 \sim \partial f_0/\partial\xi$ и принимая во внимание (5) (при $b \Rightarrow 0$), получим $\theta_0 = 0$. Для неньютоновской жидкости ($kn \neq n+1$) $\theta_0 > 0$ при $n > \beta$. Другими словами, в указанном случае кривая $\theta(q)$ начинается с положительной полуоси θ и в точках максимума этой кривой реализуются наиболее растущие возмущения.

Аналогичный анализ для случая растекания неньютоновской жидкости по вращающемуся цилиндру, при котором τz-компонента вязкого тензора напряжений τ' в цилиндрических координатах записана в форме [5]: $\tau'_{\tau z} = K(\partial v/\partial z)^n$, также показывает неустойчивость передней кромки пленки в длинноволновом пределе. Заметим, что определить характер функции $\theta(q)$ в широком диапазоне q и, следовательно, выявить рельеф передней кромки пленки на начальной стадии развития неустойчивости позволит лишь численное решение задачи (5),(7),(8) в варианте $b \neq 0$.

Таким образом, используя уравнения (5),(7), определяющие форму и устойчивость пленки неньютоновской жидкости, растекающейся по поверхностям, с τ' в виде (2) в области передней кромки, показана неустойчивость формы кромки. При экспериментальной проверке результатов проведенного теоретического анализа необходимо учитывать природу растекающейся жидкости. Неньютоновская жидкость может, вообще говоря, соответствовать жидкости Рейнера–Ривлина, проявлять вязкоэластичные свойства и т. п. Течение пленок таких жидкостей определяется иными, чем (5),(7), основными уравнениями.

Список литературы

[1] *Hoking L.M.* // J. Fluid. Mech. 1990. V. 211. P. 373.

[2] *Goodwin R., Homsy G.M.* // Phys. Fl. A. 1991. V. 3. N 4. P. 515.

[3] *Яхно О.М., Дубовицкий В.Ф.* Основы реологии полимеров. Киев, 1976.

[4] *Де Жен П.-Ж.* // УФН. 1987. Т. 151. № 4. С. 619.

[5] *Acrivos A., Shan M.J., Petersen E.E.* // J. Appl. Phys. 1960. V. 31. N 6. P. 963.

Институт химической
физики РАН
п. Черноголовка

Поступило в Редакцию
4 апреля 1996 г.