

01;03

КУМУЛЯЦИЯ СХОДЯЩИХСЯ УДАРНЫХ ВОЛН В ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ПОЛОСТЯХ

© П. А. Войнович, И. В. Соколов

Исследование течений со сходящимися сферическими и цилиндрическими ударными волнами (УВ), начиная с работ Гудереля, Ландау, Станюковича [1,2], привлекает внимание из-за проявляющегося в них эффекта кумуляции [3] — усиления УВ при ее сжатии к центру (оси) симметрии. В последнее время наряду с одномерными течениями со сходящимися волнами исследуются и неоднородные (обзор [4]).

В экспериментах по цилиндрическим сходящимся ударным волнам обычно исследуется фрагмент сходящейся волны, ограниченный двумя плоскими стенками (рис. 1, а), которые могут быть использованы как оптические окна и зеркала [5,6]. Естественным обобщением такого подхода является создание сходящихся УВ в осесимметричных полостях, ограниченных в цилиндрических координатах z, r, φ поверхностями

$$z = \text{const} \cdot r^{n-1} \quad (1)$$

и изображенных на рис. 1 для $n = 1, 2, 3$.

В полости рис. 2, б, ограниченной двумя коническими поверхностями, может создаваться сходящаяся УВ, являющаяся фрагментом сферической УВ. Одной из стенок полости может служить прозрачный рефрактор, а другой — отражатель с углами, подобранными так, чтобы обеспечить параллельность входящего и выходящего оптических лучей.

Наконец, полость на рис. 2, в образована соприкасающимися стенками, имеющими наиболее естественную для оптики форму, — сферической линзой и плоской стенкой, которая может использоваться как оптическое окно или зеркало. Оказывается, что в таком канале эффект кумуляции сходящейся волны выражен еще сильнее, чем для сферической УВ (далее — сверхсферическая кумуляция). Насколько нам известно, такое течение в литературе никогда не обсуждалось.

Выведем уравнения одновременно для случаев $n = 1, 2, 3$, рассматривая n как параметр. Введем сопряженные координаты a, b , так что

$$a^2 = (n-1)z^2 + r^2, \quad b = z/r^{n-1} \quad (2)$$

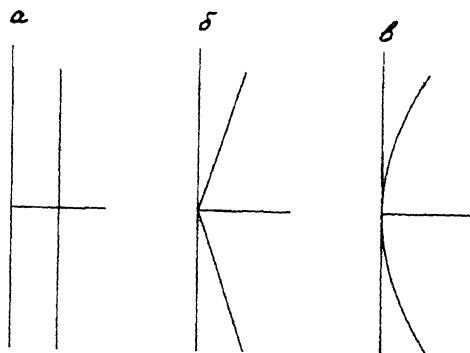


Рис. 1.

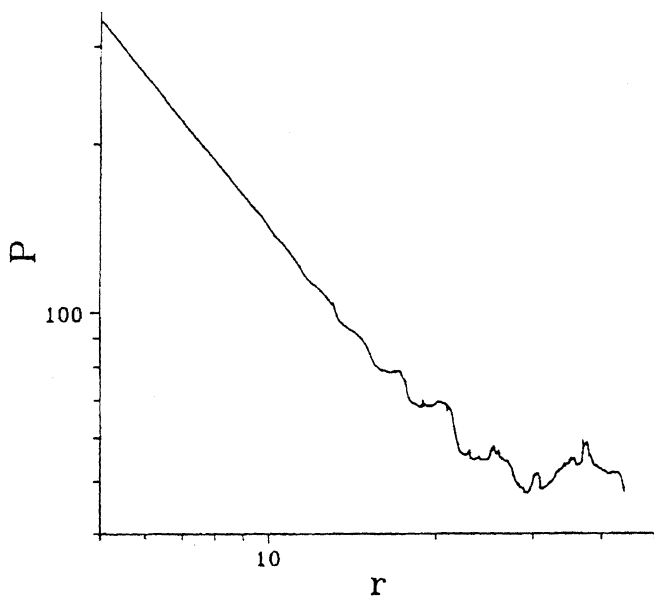


Рис. 2.

Элемент длины в координатах a, b, φ имеет вид

$$dl^2 = A da^2 + B db^2 + \Phi d\varphi^2, \quad (3)$$

$$A = a^2 (a^2 + (n-1)(n-2)b^2 r^{2n-2})^{-1}, \quad (4)$$

$$B = r^{2n} A a^{-2}, \quad (5)$$

$$\Phi = r^2, \quad (6)$$

где r для каждого заданного значения n должно быть выражено через a, b с помощью уравнения

$$r^2 = a^2 - (n-1)b^2 r^{2n-2}. \quad (7)$$

Нас интересует поведение осесимметричного решения уравнений гидродинамики вблизи точки кумуляции, т. е. при малых a и ограниченном b : $0 < b < b_c$, b_c — значение b на сферической стенке полости. Соотношения (4)–(6) подставляются в уравнения гидродинамики в криволинейных координатах [7], которые не приводятся ввиду их громоздкости; при этом в уравнение Эйлера, определяющее движение по “угловой” координате b , помимо градиента давления входит обобщенная сила

$$f = \frac{1}{2} \rho u_a^2 \frac{\partial A}{\partial b}, \quad (8)$$

где u_a — физическая компонента скорости в направлении координаты a , ρ — плотность.

Легко понять физический смысл появления силы (8): движение со скоростью u_a вдоль, вообще говоря, искривленных координатных линий $b = \text{const}$ порождает ускорение в поперечном направлении, т. е. приводит к изменению скорости u_b . При малых a подстановка (4) в (8) дает

$$f = -(n-1)(n-2)ba^{2n-4}\rho u_a^2. \quad (9)$$

Сила f равна нулю при $n = 1, 2$, поскольку в цилиндрических и сферических координатах движение по радиальной координате a не порождает движения по другим координатам (разделяющиеся координаты). При $n = 3$ сила f отлична от нуля, но стремится к нулю при малых a , так что координаты f, b при малых a являются почти разделяющимися и движение по координате a в нулевом приближении по малому параметру $b^2 a^2$ не зависит от b и u_b и описывается такого же вида уравнениями, как и при $n = 1, 2$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial a} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial a}, & \frac{\partial \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial a} + \frac{\rho}{a^n} \frac{\partial v a^n}{\partial a} &= 0, \\ \frac{\partial s}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial a} &= 0 \end{aligned} \quad (10)$$

где $v = u_a$.

Мы получили, что сверхсферическая кумуляция описывается такими же уравнениями, как цилиндрическая и сферическая с различием только в значении параметра n . Любопытно отметить, что сверхсферическая кумуляция описывается такими же уравнениями, какими описывалась бы

сходящаяся симметричная по трем полярным углам ударная волна в четырехмерном пространстве.

Ясно, что при сверхсферической кумуляции интенсивность сходящейся ударной волны нарастает сильнее, чем для сферической волны, подобно тому как при сферической кумуляции волна усиливается быстрее, чем при цилиндрической. Физическая причина такого различия заключается в более резкой зависимости площади фронта S (на которую концентрируется энергия течения) от его радиуса a_f : $s \sim a_f$.

При малых a сходящаяся ударная волна описывается автомодельным решением уравнений (10), процедура поиска такого решения и определения показателя автомодельности для случаев $n = 1, 2$ многократно описана в литературе (см., например, [1-3]). Повторив эти вычисления для случая $n = 3$, получаем законы роста скорости ударной волны D и давления P_f за ее фронтом при стремлении к нулю радиуса фронта a_f

$$D \sim a_f^{-m}, \quad P_f \sim a_f^{-2m}, \quad m = 0.59 \quad (11)$$

для показателя адиабаты $\gamma = 7/5$. Для сравнения: $m = 0.195$ при $n = 1$ и $m = 0.39$ при $n = 2$.

Вопрос о том, могут ли реальные неоднородные течения выходить асимптотически при малых a на одномерные решения, описываемые уравнениями (10), требует привлечения методов численного моделирования. Подробные результаты такого моделирования будут изложены в последующих публикациях. Здесь мы приведем только график зависимости давления за фронтом сильной ударной волны, сходящейся в полости, изображенной на рис. 1, в. Геометрические размеры в условных единицах: радиус сферической стенки 250, сходящаяся ударная волна имела начальный радиус фронта $a_f = 47$ и сходилась до $a_f = 5$. График $P_f(a_f)$ приведен на рис. 2 в логарифмических координатах (наклон прямой соответствует $m = 0.62$).

Результаты расчетов подтверждают вывод о том, что кумуляция сходящейся ударной волны в осесимметричной полости, изображенной на рис. 1, в, происходит интенсивнее, чем сферическая кумуляция.

Данная работа выполнялась при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 94-02-06691.

Список литературы

- [1] *Станюкович К.П.* Неустановившиеся движения сплошной среды. М.: Гостехиздат, 1955.
- [2] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1985.
- [3] *Забабатин Е.И., Забабатин И.Е.* Явления неограниченной кумуляции. М.: Наука, 1988.
- [4] *Соколов И.В.* // УФН. 1989. 160 (11). С. 143-166.
- [5] *Perry R.W., Kantrowitz A.* // J. Appl. Phys. 1954. V. 51. P. 3126.
- [6] *Takayama K., Kleine H., Groenig H.* // Exp. Fluids. 1987. V. 5. P. 315.
- [7] *Седов Л.И.* Механика сплошных сред. Т.1. М.: Наука, 1976. С. 178-179.
- [8] *Fursenko A.A., Mende N.P., Oshima K. et al.* // Comp. Fluid Dyn. Journal. V. 2. N 1. P. 1-36.

Физико-технический
институт им. А.Ф. Иоффе
РАН
С.-Петербург

Поступило в Редакцию
14 марта 1996 г.
