Письма в ЖТФ, том 16, вып. 9 12 мая 1990 г.

01

К КИНЕТИЧЕСКОМУ ОБОСНОВАНИЮ УРАВНЕНИЙ ГИДРОДИНАМИКИ С УЧЕТОМ САМОДИФФУЗИИ. ВЛИЯНИЕ САМОДИФФУЗИИ НА РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЗВУКА И УДАРНЫХ ВОЛН

Ю.Л. Климонтович

Вопрос об учете самодиффузии в уравнениях гидродинамики рассматривался в [1, 2]. В [3] были выдвинуты два контраргумента: 1) введение самодиффузии нарушает общепринятую структуру уравнений гидродинамики; 2) из кинетических уравнений, например уравнения Больцмана, следует, что самодиффузия в уравнениях гидродинамики отсутствует. Второй аргумент является весомым. Известно, что Больцман дал вывод кинетического уравнения только для пространственно однородных распределений. Последовательное обобщение на пространственно неоднородные состояния до настоящего времени отсутствует (см., в частности, стр. 60 в [4]). Существенно также и следующее.

При выводе уравнений гидродинамики методами Чепмена-Энскога и Грэда отклонение распределения от локально-равновесного мало: $KM \ll 1$. Здесь $K = l/L$ – число Кнудсена, а $M = u/v_T$ – число Маха. Однако малость соответствующих диссипативных членов определяется другим безразмерным параметром $1/Re = K/M \ll 1$. Здесь $Re = uL/\nu$ – число Рейнольдса. Мы видим, что теория возмущений по параметру Кнудсена возможна лишь при $M \sim 1$. Таким образом, для практически важной области малых чисел Рейнольдса традиционные методы обоснования уравнений гидродинамики недостаточны. В связи с этим здесь предлагается дополнить кинетическое уравнение „интегралом столкновений", который определяется крупномасштабными (по сравнению с τ и l) флуктуациями. При этом при выводе уравнений гидродинамики в качестве минимальных крупных масштабов следует принять соответствующие физически бесконечно малые масштабы τ_{ph}, l_{ph}, определенные для гидродинамического уровня описания (гл. 7 [5]). Эти величины связаны диффузионным соотношением $\tau_{ph} = l^2_{ph}/D$, в котором D – одна из трех диффузионных характеристик: коэффициент самодиффузии D, кинематическая вязкость ν и температуропроводность χ. При формулировке кинетического уравнения естественно начать с простейшего случая, когда $D = \nu = \chi$. Необходимые обобщения целесообразно произвести в окончательных уравнениях гидродинамики. В результате приходим к следующему кинетическому уравнению:

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\vec{v}\frac{\partial f}{\partial \vec{R}}+\frac{\vec{F}}{m}\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}=\frac{\partial}{\partial \vec{R}}\left(D\frac{\partial f}{\partial \vec{R}}\right)+I(\vec{R},\vec{v},t). \tag{1}$$

Для газа I – интеграл столкновений Больцмана. Для жидкости структура интеграла I может быть определена, например, на основе принципа максимума энтропии при соответствующих условиях на моменты распределения. В обоих случаях за характерное время τ устанавливается локально-равновесное распределение $f_0(\vec{R},\vec{v},t)$, включающее три гидродинамические функции. Отношение характерных времен τ, $\tau_{ph}=(\tau_D)_{min}$ и длин l, l_{ph} в диссипативных членах уравнения (1) определяется величиной N_{ph} – средним числом частиц в физически бесконечно малом объеме V_{ph}. По определению $N_{ph}\gg 1$. Например, отношение $l^3/l_{ph}^3\sim 1/N_{ph}$. Таким образом, распределение $f_0(\vec{R},\vec{v},t)$ получается в нулевом приближении по параметру $1/N_{ph}$. В этом приближении, когда I = 0, с помощью (1) получаем следующие уравнения гидродинамики:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial \vec{R}}\left(\rho\vec{u}-D\frac{\partial \rho}{\partial \vec{R}}\right)=0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial \rho u_2}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial R_j}\left(\left(\rho u_j-D\frac{\partial \rho}{\partial R_j}\right)u_i\right)=-\frac{\partial p}{\partial R_i}+\eta\frac{\partial^2 u_i}{\partial R_j^2}, \tag{3}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho\vec{u}^2}{2}+\rho\varepsilon\right)+\frac{\partial}{\partial R_i}\left[\left(\rho u_i-D\frac{\partial \rho}{\partial R_i}\right)\left(\frac{\vec{u}^2}{2}+\varepsilon\right)+u_i p-\right.$$
$$\left.-\eta u_j\frac{\partial u_j}{\partial R_i}-\lambda\frac{\partial T}{\partial R_i}\right],\quad \eta=\rho\nu,\quad \lambda=C_V\rho\chi. \tag{4}$$

Эти уравнения отличаются от традиционных учетом переноса вещества за счет самодиффузии, а также выражением для тензора вязких напряжений. Здесь $\pi_{ij}=-\eta\,\partial u_i/\partial R_j$. В соответствии с этими изменениями выражения для потока и производства энтропии имеют теперь вид

$$\vec{j}_S=\left(\rho\vec{u}-D\frac{\partial \rho}{\partial \vec{R}}\right)s+\frac{k}{m}D\,\mathrm{grad}\,\rho-\frac{\lambda}{T}\mathrm{grad}\,T, \tag{5}$$

$$\sigma=\frac{k}{m}\left[D_p\left(\frac{\mathrm{grad}\,\rho}{\rho}\right)^2+\frac{\eta m}{kT}\left(\frac{\partial u_i}{\partial R_j}\right)^2+\frac{3}{2}\rho\chi\left(\frac{\mathrm{grad}\,T}{T}\right)^2\right]\geqslant 0. \tag{6}$$

При равенстве кинетических коэффициентов $D=\nu=\chi$ уравнение баланса энтропии принимает простой и изящный вид $(\rho s=S(\vec{R},t))$:

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial \vec{R}}(\vec{u}S)-\frac{\partial}{\partial \vec{R}}\left(D\frac{\partial S}{\partial \vec{R}}\right)=\frac{D}{k}\int\left(\frac{dS(\vec{v},\vec{R},t)}{d\vec{R}}\right)^2 nf_0\,d\vec{v}\geqslant 0. \tag{7}$$

Мы видим, что производство энтропии определяется здесь средним значением квадрата производной неусредненной по скоростям локальнай энтропии $S(\vec{v}, \vec{R}, t) = -k \ln f_0(\vec{v}, \vec{R}, t)$.

Коэффициент затухания звука также определяется тремя кинетическими коэффициентами

$$\gamma = a\vec{k}^2; \quad a = \frac{1}{2}\left[\nu + \frac{C_V}{C_p}D + \left(1 - \frac{C_V}{C_p}\right)\chi\right]. \tag{8}$$

Приведем также выражения для профиля ударной волны:

$$p(\eta) = \frac{P_2 + P_1}{2} - \frac{(P_2 - P_1)}{2} th\frac{\eta}{\delta}; \quad \eta = x - v_s t, \quad \delta = \frac{8a\rho v_s}{P_2 - P_1}\,\frac{C_V}{C_p + C_V}. \tag{9}$$

Оно отличается от известного тем, что в нем коэффициент затухания определяется выражением (8) и ширина фронта волны зависит от трех кинетических коэффициентов. В частном случае $D = \chi = \nu$ результат остается прежним. Более существенно меняется распределение энтропии в области перехода: вместо известного выражения (см. (94.14) в [6]) теперь имеем выражение

$$\rho T(s - s_1) = (\chi - D)\frac{C_V}{C_p}\,\frac{P_2 - P_1}{2v_s\delta}\,\frac{1}{ch^2(\eta/\delta)}. \tag{10}$$

Таким образом, знак величины $s - s_1$ зависит от соотношения D, χ. От комбинации трех кинетических коэффициентов D, χ, ν зависит и диссипативный член в уравнении Бюргерса.

При рассматриваемом описании гидродинамического движения малый параметр, который используется при выводе уравнения Бюргерса и в теории слабых ударных волн, определяется величиной $1/N_{ph}$ В частности, ширина ударной волны не может быть меньше величины l_{ph}, т.е. $\delta > l_{ph}$. Величина l_{ph} в жидкости много больше среднего расстояния между атомами, а в газе, при гидродинамическом описании, много больше и длины свободного пробега. Таким образом, теория сильных ударных волн может быть построена лишь на основе кинетической теории, в которой физически бесконечно малые масштабы значительно меньше, чем в гидродинамике. Так, для Больцмана $l_{ph} \sim \sqrt{\varepsilon}\, l$, $\tau_{ph} \sim \sqrt{\varepsilon}\, \tau$, где $\varepsilon = nr_0^3$ – малый параметр разреженного газа – параметр плотности [5].

Отметим аналогию кинетического уравнения (1) и обобщенных уравнений кинетической теории автоволновых процессов [7]. В них также имеются два „интеграла столкновений", которые описывают, соответственно, диффузию внутри отдельных элементов „непрерывной" активной среды и пространственную диффузию этих элементов. Без учета „внутренней диффузии" обобщенные кинетические уравнения могут быть сведены к уравнениям реакционно-диффузионного типа, примерами которых служат известные уравнения Фишера и Колмогорова–Петровского–Пискунова.

В заключение отметим следующее. Широко распространено мнение, что макроскопически самодиффузию наблюдать нельзя, так как из-за тождественности молекул она не может проявиться ни при каком макроскопическом явлении. Для наблюдения самодиффузии надо как-то "пометить" часть молекул (см. стр. 347 в [8]). Из изложенного следует, что возможно наблюдение макроскопических проявлений самодиффузии, например, по затуханию звука, а также, разумеется, по спектрам рассеянного излучения.

Список литературы

[1] Валандер С.В. // ДАН СССР. 1951. Т. 78. С. 25.
[2] Слезкин Н.А. // ДАН СССР. 1951. Т. 77. С. 205.
[3] Шапошников И.Г. // ЖЭТФ. 1951. Т. 21. С. 1309
[4] Кац М. Несколько вероятностных задач физики и математики. М.: Наука, 1967.
[5] Климонтович Ю.Л. Статистическая физика. М.: Наука, 1982.
[6] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986.
[7] Климонтович Ю.Л. // УФН. 1989. Т. 158. С. 59
[8] Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т. 11. М.: Наука, 1975.

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Поступило в Редакцию 23 февраля 1990 г.

Письма в ЖТФ, том 16, вып. 9 12 мая 1990 г.

КОЛЛИНЕАРНОЕ МЕЖМОДОВОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ TE–TM В ПЛАНАРНОМ ВОЛНОВОДЕ $LiNbO_3:Ti:Fe$

И.И. Иткин, С.М. Шандаров

Преобразование мод TE–TM, обусловленное фоторефрактивным эффектом, в полосковых волноводах $LiNbO_3:Ti$ наблюдалось в работах [1, 2]. Волноводы $LiNbO_3:Ti:Fe$ обладают более высокой фоторефрактивной чувствительностью и позволяют наблюдать такие эффекты, как межмодовое (TE_m–TE_n) рассеяние голографического типа [3]. В настоящей работе изучены особенности взаимодействия коллинеарно распространяющихся в планарном волноводе $LiNbO_3:Ti:Fe$ Y-среза мод TE_3 и TM_3 (λ=0.63 мкм) при котором формируется планарная голографическая решетка (ГР) и наблюдается перекачка световой мощности из моды TM_3 в моду TE_3.

Особенностью данного волновода, методика изготовления и основные параметры которого приведены в работе [3], является вы-