Сила Казимира с учетом конечной толщины взаимодействующих пластин

© В.В. Брыксин, М.П. Петров

Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе Российской академии наук,
194021 Санкт-Петербург, Россия

E-mail: vvb@mail.ioffe.ru, mpetr.shuv@mail.ioffe.ru

(Поступила в Редакцию 29 июня 2007 г.)

Произведен расчет силы Казимира между двумя тонкими металлическими пленками с учетом конечной толщины пленок и конечного значения плазменной частоты. Найдены условия, при которых возможно значительное (на порядок величины и более) ослабление силы Казимира в пленках по сравнению с объемными металлическими пластинами. Проведено сравнение с известными экспериментальными данными и сделан вывод, что наблюдаемые значения силы Казимира для пленок могут быть объяснены с помощью настоящей теории, если допустить, что в реальных пленках длина волны плазменных колебаний составляет более 1000 nm.

PACS: 05.40.-a, 03.70.+k, 77.22.-d, 81.07.-b

1. Введение

Прошло почти 60 лет с тех пор, когда Казимир [1] теоретически предсказал наличие сил притяжения между незаряженными металлическими пластинами вследствие уменьшения плотности энергии нулевых электромагнитных колебаний в зазоре между пластинами по сравнению с плотностью энергии нулевых колебаний во внешней среде. Позднее Е.М. Лифшиц [2] получил более общий результат при рассмотрении равновесных электромагнитных колебаний для практически произвольных тел. Если в [1] рассматривалось взаимодействие между идеальными проводниками (для которых диэлектрическая проницаемость $\varepsilon \to \infty$) при температуре $T = 0$, то результаты работы [2] справедливы при произвольном виде частотной зависимости диэлектрической проницаемости для любой температуры. Интересно, что результаты Лифшица переходят в результаты Казимира в предельном случае $\varepsilon \to \infty$ и $T = 0$, хотя в случае Казимира рассматриваются нулевые электромагнитные колебания вакуума, а у Лифшица — обмен виртуальными фотонами между взаимодействующими телами. Обсуждение соотношения между этими двумя подходами содержится в обзоре [3]. Результат для давления силы Казимира P_0 между двумя плоскопараллельными идеально проводящими пластинами с зазором между ними Z при $T = 0$ имеет вид

$$P_0 = -\frac{\pi^2}{240}\frac{\hbar c}{Z^4}. \tag{1}$$

Здесь c — скорость света, $\hbar$ — постоянная Планка. По мере роста температуры сила Казимира увеличивается, и этот рост описывается безразмерным параметром $Zk_{\mathrm{B}}T/\hbar c$ [4]. В пределе $Zk_{\mathrm{B}}T/\hbar c \gg 1$ соотношение (1) трансформируется в

$$P_{0T} = -\frac{\xi(3)}{8\pi}\frac{k_{\mathrm{B}}T}{Z^3}, \tag{2}$$

где $\xi(3)$ — дзета-функция Римана при $x = 3$.

Первое сообщение об экспериментальном наблюдении силы Казимира появилось в 1958 г. [5], однако подлинный расцвет исследований этого явления наступил лишь спустя 40 лет в связи с использованием на эксперименте методов баланса крутящегося маятника [6,7] и метода микроскопии атомных сил [8,9]. Подробное описание этих экспериментов и библиографию можно найти в обзорах [3,10]. Недавно предложен новый метод измерения силы Казимира — посредством динамической голографии [11,12]. Однако во всех этих экспериментальных методах возникают две принципиальные проблемы — определения абсолютного значения силы Казимира и определения абсолютного значения зазора между пластинами Z. Первая проблема решается посредством тех или иных градуировок, а величина Z обычно рассматривается как подгоночный параметр при сравнении теории с экспериментом.

В [11,12] для градуировки абсолютного значения силы Казимира использовалось давление лазерного света, т. е. свет использовался в качестве естественного эталона давления. Произведенные в [11,12] измерения показали, что экспериментальное значение силы Казимира по крайней мере на порядок меньше, чем величина, предсказываемая теорией для той геометрии, которая использовалась на эксперименте (взаимодействие плоской и сферической металлических поверхностей). Хорошо известна одна из причин, приводящая к ослаблению силы Казимира — наличие плазменных колебаний в проводнике. Уменьшение величины силы Казимира по сравнению с (1) при переходе к плазменной модели для материала пластин теоретически исследовано в ряде работ, например в [13,14] (см. также далее). Однако при разумных значениях плазменной частоты (ω_p) ослабление силы Казимира на порядок таким способом объяснить не удается.

Другой причиной ослабления силы Казимира может быть конечная толщина взаимодействующих пластин, так как в этом случае уменьшается разность между плотностью энергии в зазоре и вне пластин. Настоящая статья посвящена теоретическому расчету силы Казимира для пластин, обладающих частотно-зависимой диэлектрической проницаемостью $\varepsilon(\omega)$ и имеющих конечную толщину L. Именно при таких условиях проводились эксперименты в [11,12]. Проведенный в настоящей работе расчет показал, что ответ зависит от двух безразмерных параметров: Z/L и $\kappa_p Z$, где $\kappa_p = \omega_p/c$ — волновой вектор, связанный с плазменной длиной волны λ_p стандартным соотношением $\lambda_p = 2\pi/\kappa_p$. При достаточно малом значении этих параметров можно получить сколь угодно сильное уменьшение силы Казимира по сравнению с предельным ее значением (1).

2. Основные уравнения

Рассматриваем пятислойную симметричную структуру (рис. 1), где i есть номер слоя: $i = 1$ соответствует промежутку между пластинами $(-Z/2 < z < Z/2)$ и $\varepsilon_1 = \varepsilon_0$; $i = 2$ при $-L - Z/2 < z < -Z/2$ и $i = 3$ при $L + Z/2 > z > Z/2$ — области металлических пластин, $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon(\omega)$; $i = 4$ при $-\infty > z > -L - z/2$ и $i = 5$ при $L + Z/2 < z < \infty$ — области подложек, $\varepsilon_4 = \varepsilon_5 = \varepsilon_0'$.

Далее ограничиваемся пределом нулевой температуры, когда энергия системы U определяется нулевыми колебаниями фотонного поля и в геометрии плоскопараллельных пластин ее можно записать в виде

$$U = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k},n} \omega_{k,n}. \tag{3}$$

Здесь $\omega_{k,n}$ — частота собственных мод нулевых колебаний, зависящая от $\mathbf{k}$ (двумерного волнового вектора в плоскости пластин x, y) и номера моды n (или проекции волнового вектора на ось z). Таким образом,

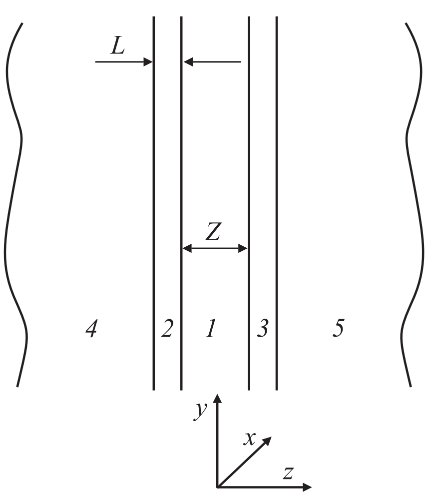

Рис. 1. Структура, состоящая из двух тонких металлических пленок, нанесенных на диэлектрические подложки. *1–5* — номер слоя: *1* — вакуум, *2, 3* — металлические пленки, *4, 5* — диэлектрические подложки.

задача сводится к определению частоты собственных мод фотонов из волнового уравнения

$$\frac{d^2 E_{y,z}}{dz^2} - K_i^2 E_{y,z} = 0, \tag{4}$$

$$K_i = \sqrt{k^2 - \varepsilon_i(\omega)\,\frac{\omega^2}{c^2}} \tag{5}$$

в рассматриваемой геометрии. Здесь $E_{y,z}$ — проекции электрического поля, плоскость x, y совпадает с плоскостью пластин, ось z направлена по нормали, $\varepsilon(\omega)$ — диэлектрическая проницаемость i-го слоя.

Решение волнового уравнения (4) для компоненты поля E_y (TE-моды) с использованием условия ее непрерывности на границах приводит к дисперсионному соотношению для TE-мод

$$f_y = \exp(2K_0 Z) \times \left[\frac{K(K_0 + K_0')\coth(KL) + K_0 K_0' + K^2}{K(K_0' - K_0)\coth(KL) + K^2 - K_0 K'}\right]^2 - 1 = 0. \tag{6}$$

Аналогичное решение для компоненты E_z при условии непрерывности индукции εE_z на границах дает спектр TM-мод

$$f_z = \exp(2K_0 Z) \times \left[\frac{\varepsilon K(\varepsilon_0' K_0 + \varepsilon_0 K_0')\coth(KL) + \varepsilon^2 K_0 K_0' + \varepsilon_0 \varepsilon_0' K^2}{\varepsilon K(\varepsilon_0 K_0' - \varepsilon_0' K_0)\coth(KL) + \varepsilon_0 \varepsilon_0' K^2 - \varepsilon^2 K_0 K_0'}\right]^2 - 1 = 0. \tag{7}$$

Математический метод суммирования энергии собственных мод колебаний (3) был предложен в [15] (см. также [3]), и результат для давления Казимира P имеет вид

$$P = P_y + P_z, \tag{8}$$

$$P_{y,z} = i\,\frac{\hbar}{4\pi^2} \int_0^\infty k\,dk \int_0^{i\infty} d\omega\, \frac{K_0(k,\omega)}{f_{y,z}(k,\omega)}, \tag{9}$$

где функции $f_{y,z}(k,\omega)$ в рассматриваемом нами случае определены соотношениями (6) и (7). Соотношение (9) переходит в известный результат [3] для трехслойной структуры при переходе $L \to \infty$ в (6) и (7).

Далее ограничимся случаем, когда зазор (область *1*) и окружающая пластины среда (области *4* и *5*) заполнены вакуумом, т. е. $\varepsilon_0 = \varepsilon_0' = 1$, $K_0 = K_0' = \sqrt{k^2 - (\omega/c)^2}$. Теперь в (9) от переменных интегрирования k и ω удобно перейти к безразмерным величинам p и y:

$$p = \sqrt{1 - (kc/\omega)^2}, \quad y = -2i\omega p Z/c. \tag{10}$$

Тогда соотношение (9) принимает вид

$$P_{y,z} = -\frac{\hbar c}{32\pi^2 Z^4} \int_0^\infty y^3\,dy \int_1^\infty \frac{dp}{p^2}\,\frac{1}{f_{y,z}(p,y)}, \tag{11}$$

$$f_y(p,y) = \exp(y) \times \left\{ \frac{2G(p,y)\coth\left[yLG(p,y)/(2Z)\right]+1+G^2(p,y)}{1-G^2(p,y)} \right\}^2 - 1, \tag{12}$$

$$f_z(p,y) = \exp(y) \times \left\{ \frac{2\varepsilon(p,y)G(p,y)\coth\left[yLG(p,y)/(2Z)\right] + \varepsilon^2(p,y)+G^2(p,y)}{\varepsilon^2(p,y)-G^2(p,y)} \right\}^2 - 1, \tag{13}$$

где

$$G(p,y) = \sqrt{1+\frac{\varepsilon(p,y)-1}{p^2}}, \tag{14}$$

$$\varepsilon(p,y) = \varepsilon(\omega)\Big|_{\omega=iyc/(pZ)}. \tag{15}$$

Дальнейший расчет силы Казимира зависит от выбора модели частотной зависимости диэлектрической проницаемости пластин $\varepsilon(\omega)$.

3. Плазменная модель

Зависимость силы Казимира от характера частотной зависимости диэлектрической проницаемости $\varepsilon(\omega)$ приводит к определенным принципиальным затруднениям. Дело в том, что диэлектрическая проницаемость является линейным откликом системы на приложенное электрическое поле, когда возникает электрический ток. Описание тока требует нарушения симметрии относительно инверсии во времени и введения взаимодействия системы с термостатом (появление джоулевых потерь). Такая процедура принципиально недопустима в рассматриваемом здесь случае термодинамического равновесия. Иными словами, в том случае, если $\mathrm{Re}\, i\omega\varepsilon(\omega)|_{\omega\to 0} \propto \sigma(0) \neq 0$ ($\sigma(0)$ — статическая электропроводность), применимость соотношений (10)–(12) вызывает сомнение по принципиальным соображениям. Проблема использования в соотношениях такого вида комплексной формы $\varepsilon(\omega)$ (например, типа Друде) с формальной точки зрения обсуждается в ряде работ, например [3,10]. Более того, в [16] указывается, что для систем с конечным значением электропроводности не выполняется теорема Нернста. Эта проблема родственна проблеме шумов в условиях термодинамического равновесия. Все это заставляет проявлять определенную осторожность при использовании вида частотной зависимости диэлектрической проницаемости при расчете силы Казимира.

Далее в расчетах используем диэлектрическую проницаемость для плазменных колебаний без учета их затухания

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2},$$

где ω_p — плазменная частота. Тогда в соответствии с (15)

$$\varepsilon(p,y) = 1 + \kappa_p^2 Z^2 \frac{p^2}{y^2}, \tag{16}$$

где $\kappa_p = \omega_p/c$ — волновой вектор плазменной волны (см. выше). В этих обозначениях, согласно (14),

$$G(p,y) = G(y) = \sqrt{1+\frac{\kappa_p^2 Z^2}{y^2}} \tag{17}$$

не зависит от p. В результате вклад в силу Казимира от TE-мод (11) принимает вид

$$P_y = \frac{15P_0}{2\pi^4}(\kappa_p Z)^4 \int_0^\infty y^3 dy \left\{ \exp(\kappa_p Z y)\Big[2y^2+1 + 2y\sqrt{y^2+1}\coth\Big(\frac{1}{2}\kappa_p L\sqrt{y^2+1}\Big)\Big]^2 - 1 \right\}^{-1}, \tag{18}$$

где P_0 — предельное значение давления силы Казимира (1).

$$P_z = \frac{15P_0}{2\pi^4}(\kappa_p Z)^4 \int_0^1 dx \times \int_0^\infty \frac{y^3\,dy}{\exp(\kappa_p Z y)\left\{\frac{2R(x,y)\coth\left[\kappa_p L\sqrt{y^2+1}/2\right]+1+R^2(x,y)}{1-R^2(x,y)}\right\} - 1}, \tag{19}$$

$$R(x,y) = x^2\frac{y\sqrt{y^2+1}}{x^2y^2+1}. \tag{20}$$

Величина приведенной силы Казимира $f_{y,z} = P_{y,z}/P_0 \leq 0.5$, согласно (18), (19), зависит от двух безразмерных параметров $Z\kappa_p$ и $L\kappa_p$. В случае достаточно толстых пластин $L\kappa_p \gg 1$ эти выражения принимают вид

$$f_y = \frac{15}{2\pi^4}(\kappa_p Z)^4 \int_0^\infty \frac{y^3\,dy}{\exp(\kappa_p Z y)\big(y+\sqrt{y^2+1}\big)^4 - 1}, \tag{21}$$

$$f_z = \frac{15}{2\pi^4}(\kappa_p Z) \int_0^1 dx \int_0^\infty \frac{y^3\,dy}{\exp(\kappa_p Z y)\left\{\frac{1+R(x,y)}{1-R(x,y)}\right\}^2 - 1}. \tag{22}$$

При $Z\kappa_p \gg 1$ из (21) и (22) получаем (см. также [3,13,17])

$$f_y \cong \frac{1}{2}\left(1 - \frac{8}{\kappa_p Z} + \frac{360}{(\kappa_p Z)^2} - \ldots\right), \tag{23}$$

$$f_z \cong \frac{1}{2}\left(1 - \frac{8}{3\kappa_p Z} + \frac{120}{(\kappa_p Z)^2} - \ldots\right). \tag{24}$$

Эти ряды знакопеременные и сходятся крайне медленно, а поэтому приближенные выражения (23), (24) дают

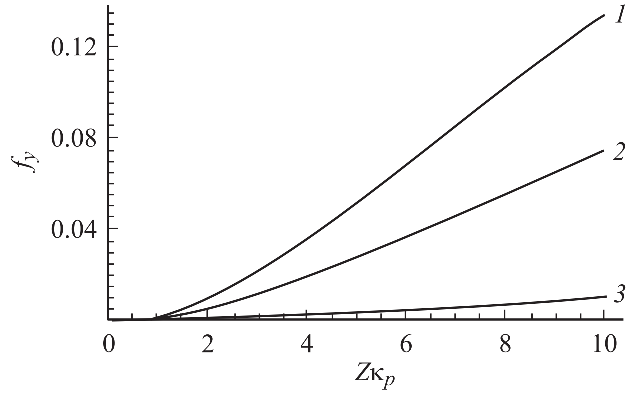

Рис. 2. Зависимость вклада от TE-мод в давление силы Казимира от ширины зазора между пластинами. $L\kappa_p = 10$ (*1*), 1 (*2*), 0.2 (*3*).

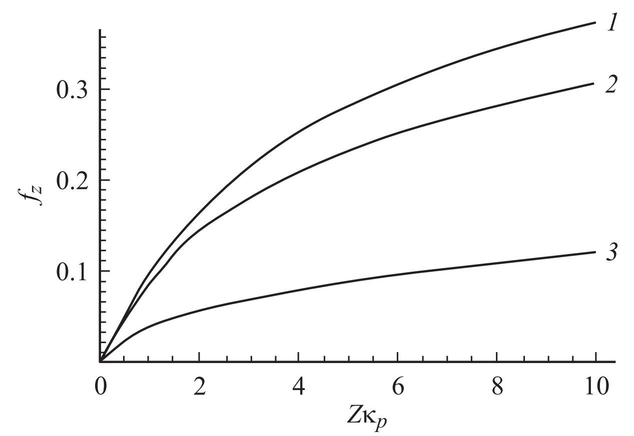

Рис. 3. Зависимость вклада от TM-мод в давление силы Казимира от ширины зазора между пластинами. $L\kappa_p = 10$ (*1*), 1 (*2*), 0.1 (*3*).

удовлетворительный результат в случае, когда параметр $1/\kappa_p Z$ крайне мал (меньше 0.01). Это обстоятельство хорошо иллюстрируется численными расчетами, произведенными по соотношениям (18), (19) и приведенными на рис. 2, 3. Из рисунков видно, что величина f_z и особенно f_y остаются существенно меньшими своих предельных значений $1/2$ с ростом параметра $Z\kappa_p$ вплоть до его значения порядка 10. Это указывает на то, что сила Казимира для реальных металлов существенно меньше своего предельного значения (1) даже в том случае, если зазор между пластинами Z намного превышает величину плазменной длины $\lambda_p = 2\pi/\kappa_p$, а разложения (23), (24) справедливы лишь при очень больших значениях параметра $Z\kappa_p$.

На рис. 4, 5 приведен численный расчет зависимости силы Казимира от толщины пленок по соотношениям (18), (19). Как видно, зависимость быстро насыщается при $L\kappa_p > 2$. При этом сила Казимира быстро спадает до нуля в интервале $0 < L\kappa_p < 2$. При малой толщине пленок сила Казимира описывается безразмерным параметром $ZL\kappa_p^2$, и при малых его значениях из (18) и (19) можно получить приближенные соотношения

$$f_y \cong \frac{15}{32\pi^4}(\kappa_p^2 ZL)^2, \tag{25}$$

$$f_z \cong A\kappa_p\sqrt{LZ}, \tag{26}$$

где численный коэффициент

$$A = \frac{15}{8\pi^4}\int_0^\infty y^{5/2}dy\int_0^\infty du\,\frac{1}{\exp(y)(u^2+1)^2-1} \cong 0.054.$$

Таким образом, при $ZL\kappa_p^2 \ll 1$ имеет место неравенство $f_y \ll f_z$, так что полное давление силы Казимира дается соотношением

$$f \cong 0.054\kappa_p\sqrt{LZ}. \tag{27}$$

Итак, если толщина пленок мала и сравнима с плазменной длиной, то сила Казимира существенно уменьшается по сравнению с P_0. Если воспользоваться данными рис. 2–5 и принять во внимание условия эксперимента [11,12], где $L = 120-150$ nm и $Z = 300-600$ nm, то ослабление силы Казимира в несколько раз будет при $\lambda_p > 1000$ nm. Известно (например, [14]), что для таких

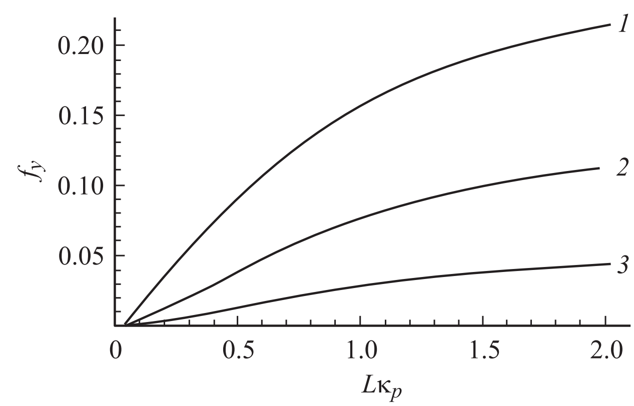

Рис. 4. Зависимость вклада от TE-мод в давление силы Казимира от толщины пленок. $Z\kappa_p = 20$ (*1*), 10 (*2*), 5 (*3*).

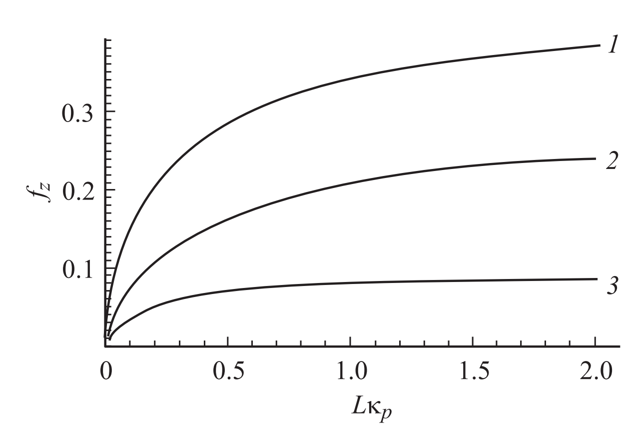

Рис. 5. Зависимость вклада от TM-мод в давление силы Казимира от толщины пленок. $Z\kappa_p = 20$ (*1*), 5 (*2*), 1 (*3*).

металлов, как алюминий, золото или медь, плазменная длина волны λ_p для массивных высококачественных образцов лежит в интервале 100−500 nm, что значительно меньше значения, требуемого для объяснения экспериментальных результатов. Однако плазменная длина волны прямо пропорциональна $N^{-1/2}$ (N — концентрация носителей в металле), а реальные пленки могут быть частично окислены и содержать дефекты, что может значительно снизить концентрацию носителей в пленках. Поэтому, вообще говоря, для таких пленок λ_p может быть в несколько раз больше, чем для чистых массивных металлов, что, возможно, и объясняет данные, полученные в [11,12]. В заключение заметим, что в данной статье расчет произведен для двух параллельных пленок, в то время как экспериментально [4] измерялось взаимодействие плоской и сферической пленок. Это обстоятельство, конечно, важно при определении абсолютного значения силы Казимира, но не существенно, если анализируется относительное ослабление силы Казимира при взаимодействии объемных и тонкопленочных объектов. При рассмотрении взаимодействия плоской и сферической пленок следует рассматривать силу Казимира F между этими объектами (а не давление P, как это имеет место при взаимодействии двух плоских пленок). Можно показать, что эти две величины связаны между собой соотношением $F = 2\pi RZP/(n-1)$, где R — радиус сферы, если давление зависит от расстояния между пленками Z степенным образом, т. е. если $P \propto Z^{-n}$.

Список литературы

[1] H.B.G. Casimir. Proc. Kon. Ned. Akad. Wetenschap B **51**, 793 (1948).
[2] Е.М. Лифшиц. ЖЭТФ **2**, 73 (1956).
[3] S.K. Lamoreaux. Rep. Prog. Phys. **68**, 201 (2005).
[4] Е.М. Лифшиц, Л.П. Питаевский. Статистическая физика. Наука, М. (1978). Ч. 2.
[5] M.J. Sparnaay. Physica **24**, 751 (1958).
[6] S.K. Lamoreaux. Phys. Rev. Lett. **78**, 5 (1997).
[7] S.K. Lamoreaux. Phys. Rev. Lett. **81**, 4549 (1997).
[8] U. Mohideen, A. Roy. Phys. Rev. Lett. **81**, 4549 (1998).
[9] A. Roy, U. Mohideen. Phys. Rev. Lett. **82**, 4380 (1999).
[10] G.L. Klimchitskaya, V.M. Mostepanenko. Contemporary Phys. **47**, 131 (2006).
[11] V. Petrov, M. Petrov, V. Bryksin, J. Petter, T. Tschudi. Opt. Lett. **31**, 3167 (2006).
[12] В.М. Петров, М.П. Петров, В.В. Брыксин, Ё. Петтер, Т. Чуди. ЖЭТФ **131**, 798 (2007).
[13] J. Schwinger, L.L. DeRaad, K.A. Milton. Ann. Phys. (N.Y.) **115**, 1 (1978).
[14] S.K. Lamoreaux. Phys. Rev. A **59**, R3149 (1999).
[15] N.G. Van Kampen, B.R.A. Nijboer, K. Schram. Phys. Lett. A **26**, 307 (1968).
[16] B. Geyer, G.L. Klimchitskaya, V.M. Mostepanenko. Phys. Rev. D **72**, 085 009 (2005).
[17] B. Geyer, G.L. Klimchitskaya, V.M. Mostepanenko. Phys. Rev. A **65**, 062 109 (2002).