

01

## Проводящее осесимметричное тело в соосном переменном магнитном поле

© А.О. Савченко,<sup>1</sup> О.Я. Савченко<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, 630090 Новосибирск, Россия

<sup>2</sup> Новосибирский государственный университет, 630090 Новосибирск, Россия  
e-mail: savch@ommfao1.sccc.ru

(Поступило в Редакцию 20 июля 2012 г. В окончательной редакции 14 марта 2013 г.)

Определены векторный потенциал и напряженность магнитного поля внутри осесимметричного проводника, который вносится в заданное внешнее соосное магнитное поле, гармонически изменяющееся по времени. Предложенный метод состоит в представлении векторного потенциала в виде суммы сходящегося ряда, каждый член которого является решением уравнения Гельмгольца с постоянным коэффициентом в бесконечной области. Последующие члены каждого ряда находятся из предыдущих с использованием известной функции Грина. Достоверность полученных численных результатов подтверждена их сравнением с точными значениями для шара в однородном магнитном поле, а также сравнением численных результатов, полученных путем использования двух разных рядов для эллипсоида в неоднородном магнитном поле.

### Введение

Обязательным этапом моделирования движения проводящего тела в переменном магнитном поле является создание новых экономичных способов расчета суммарного магнитного поля, гармонически изменяющегося по времени. Амплитуда векторного потенциала этого поля удовлетворяет уравнению Гельмгольца с кусочно-постоянным коэффициентом и граничными условиями, заданными на бесконечности. Для его решения необходимо применять методы специального вида. Один из таких подходов связан с приведением его к интегральному уравнению, аппроксимацией его системой линейных алгебраических уравнений и решений их методом Галёркина или коллокаций [1]. При решении интегрального уравнения методом итерированных ядер [2] получим аппроксимацию искомого решения конечной суммой, слагаемые которой совпадут с членами частичной суммы, в частности рассмотренной и в данной работе. Идея предложенного метода в настоящей работе состоит в том, что решение уравнения Гельмгольца с кусочно-постоянным коэффициентом может быть представлено в виде ряда, каждый член которого является решением уравнения Гельмгольца с постоянным коэффициентом в бесконечной области. При этом члены этого ряда определяются неоднозначно и зависят от вектора параметров, который выбирается из условия наиболее быстрой сходимости ряда или из условия минимального количества вычислений при численном нахождении каждого члена ряда. Выбор подходящих компонент для вектора параметров связан с результатами предыдущих работ авторов. В них в виде суммы конечного числа слагаемых были аналитически определены магнитное поле сверхпроводящего шара, помещенного в осевое магнитное поле, меняющееся как полином степени  $n$  [3], и сверхпроводящего эллипсоида, расположенного соосно такому же магнитному полю [4].

В случае конечной проводимости тела в предлагаемой работе приводится способ определения векторного потенциала в виде аналитически определяемого ряда в любом проводящем осесимметричном теле, помещенном в любое осесимметричное магнитное поле. Последующие члены ряда находятся из предыдущих с помощью известной функции Грина, если магнитное поле меняется по времени по гармоническому закону  $\exp(-i\omega t)$ . Это позволяет, разлагая в ряд Фурье любое зависящее от времени внешнее магнитное поле, определить значение векторного потенциала внутри проводящего тела для более широкого класса магнитных полей. Но практическое использование сходящегося ряда имеет смысл только тогда, когда его частичная сумма невысокого порядка достаточно точно аппроксимирует этот потенциал. Точность аппроксимации векторного потенциала частичными суммами  $n$ -го порядка численно определялась для проводника, имеющего форму эллипсоида вращения. Выбор для такого исследования эллипсоида вращения связан не только с тем, что это — достаточно разнообразный класс тел, но и с тем, что известен векторный потенциал магнитного поля, возмущенного сверхпроводящим эллипсоидом [4]. Это обстоятельство обусловило преимущественный выбор двух рядов для нахождения векторного потенциала. Первый член одного ряда был выбран равным векторному потенциалу внешнего поля, а первый член другого ряда являлся векторным потенциалом внешнего поля, возмущенного сверхпроводящим эллипсоидом. Разница в значениях частичных сумм  $n$ -го порядка первого и второго рядов оценивает сверху точность аппроксимации векторного потенциала этими суммами не только для эллипсоида, но и для произвольного тела, которое может быть вписано в этот эллипсоид.

Предложенная работа состоит из введения, семи разделов и приложения. В первых двух разделах рассматривается постановка задачи, идея и метод решения, а

также аппроксимация и сходимость ряда Неймана в задаче определения векторного потенциала слабопроводящего проводника во внешнем соосном магнитном поле. В третьем разделе предложено обобщение этого метода, которое позволяет определять векторный потенциал произвольного проводника во внешнем соосном поле. В четвертом разделе предложен метод вычисления напряженности магнитного поля на оси проводника на основе сведения уравнения Гельмгольца в бесконечной области к интегральному уравнению. Векторный потенциал определяется в виде суммы ряда, в котором основной вклад дают первые члены, поэтому актуальной является задача наиболее точного определения первых членов этого ряда. Эти вопросы обсуждаются в пятом разделе. В работе уделено внимание проблемам, возникающим при численной реализации предложенных методов. Поскольку функция Грина имеет особенность в точках интегрирования, совпадающих с точками, где вычисляются значения функции, то для вычисления интегралов необходимо применять квадратуры специального вида. Такие квадратуры рассматриваются в шестом разделе. В седьмом разделе приведены результаты численных экспериментов по вычислению потенциала внутри тела и напряженности магнитного поля на его оси. В приложении доказывается теорема о единственности решения внутри проводника при равномерном стремлении потенциала к нулю на бесконечности и предложен итерационный метод решения линейного операторного уравнения в виде суммы ряда, каждый член которого является решением операторного уравнения более простого вида.

### 1. Проводник в переменном магнитном поле: постановка задачи и идея решения

Осесимметричное внешнее магнитное поле, имеющее ту же ось симметрии, что и проводящее тело, индуцирует круговые токи вокруг его оси. Поэтому результирующее электромагнитное поле относится к магнитной моде [5], а результирующее магнитное поле имеет ось симметрии, совпадающую с осью симметрии внешнего поля. Если внешнее магнитное поле меняется по времени по гармоническому закону  $\exp(-i\omega t)$ , то через достаточно длинный промежуток времени и результирующее магнитное поле и его векторный потенциал  $\mathbf{A}(\mathbf{R}) \exp(-i\omega t)$  будут меняться по времени по тому же закону. В рассматриваемом случае, как следует из общего уравнения для векторного потенциала [6], амплитуда векторного потенциала  $\mathbf{A}(\mathbf{R})$  удовлетворяет уравнению

$$\Delta \mathbf{A} + \left( \frac{\omega^2}{c^2} + (k')^2 \eta \right) \mathbf{A} = \mathbf{0}, \quad (k')^2 = \frac{4\pi i \omega}{c^2} \sigma, \quad (1)$$

где  $\sigma$  — проводимость тела,  $c$  — скорость света,  $\omega$  — угловая частота,  $\eta$  — функция, значение которой равно

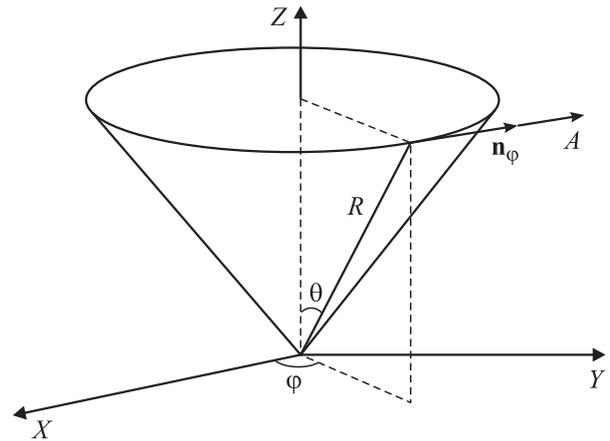


Рис. 1. Сферическая система координат:  $R$ ,  $\theta$  и  $\varphi$  — сферические координаты точки,  $\mathbf{A}$  — амплитуда векторного потенциала,  $\mathbf{n}_\varphi$  — единичный азимутальный вектор. Ось  $Z$  совпадает с осью симметрии тела.

единице внутри тела и нулю вне тела. Поскольку в приведенной на рис. 1 сферической системе координат полярная ось совпадает с осью симметрии, вектор  $\mathbf{A}$  имеет только азимутальную составляющую, которая при заданных значениях  $\theta$  и  $R$  не зависит от угла  $\varphi$ . Пусть  $\mathbf{A}_0$  — амплитуда векторного потенциала в отсутствие тела и существует предел  $\lim_{|R| \rightarrow \infty} \mathbf{A}_0 = \mathbf{A}_0^\infty$ . Предположим, что и решение уравнения (1) удовлетворяет таким же граничным условиям на бесконечности  $\lim_{|R| \rightarrow \infty} \mathbf{A} = \mathbf{A}_0^\infty$ . Уравнение (1) можно записать в безразмерных координатах  $\mathbf{r}$ , равных прежним координатам  $\mathbf{R}$ , деленным на  $R_0$  — минимальный радиус шара, в который может быть заключено проводящее тело:

$$\Delta \mathbf{A} + (\beta^2 + k^2 \eta) \mathbf{A} = \mathbf{0}, \quad \beta = \frac{\omega R_0}{c}, \quad k^2 = i\alpha, \quad (2)$$

где  $\alpha = \frac{4\pi \omega \sigma R_0^2}{c^2}$ , а  $\Delta$  — оператор Лапласа в безразмерных координатах  $\mathbf{r}$ . Уравнение (2) равносильно уравнению

$$\Delta \mathbf{A}' + (\beta^2 + k^2 \eta) \mathbf{A}' = -k^2 \eta \mathbf{A}_0, \quad (3)$$

где функция  $\mathbf{A}' = \mathbf{A} - \mathbf{A}_0$  удовлетворяет нулевому условию на бесконечности  $\lim_{|r| \rightarrow \infty} \mathbf{A}' = \mathbf{0}$ . Здесь и далее мы будем подразумевать под термином „нулевые граничные условия на бесконечности“ равномерное стремление функции к нулю при  $|\mathbf{r}| \rightarrow \infty$ . Сходящийся ряд Неймана [7]

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \sum_{j=0}^{\infty} (-k^2)^j \mathbf{A}_j(\mathbf{r}) \quad (4)$$

будет решением уравнения (2), если каждый член ряда (4), начиная со второго, является решением уравнения Гельмгольца

$$\Delta \mathbf{A}_{j+1} + \beta^2 \mathbf{A}_{j+1} = -\eta \mathbf{A}_j, \quad j = 0, \dots, \infty \quad (5)$$

с нулевыми граничными условиями на бесконечности. Если  $\beta^2$  настолько мало, что его влиянием на решение уравнения (2) можно пренебречь, то уравнения (5) можно заменить уравнениями Пуассона

$$\Delta \mathbf{A}_{j+1} = -\eta \mathbf{A}_j, \quad j = 0, \dots, \infty. \quad (6)$$

Из уравнений (6) следует, что при нулевых граничных условиях каждый последующий член ряда (4) определяется из предыдущего по формуле

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{j+1}(\mathbf{r}) &= \int_{E^3} \eta \mathbf{A}_j(\mathbf{r}') G(0, \rho) dV' \\ &= \int_Q \mathbf{A}_j(\mathbf{r}') G(0, \rho) dV', \end{aligned}$$

где  $Q$  — объем, занимаемый проводящим телом, в евклидовом пространстве  $E^3$ ,  $\rho = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ , а функция  $G(0, \rho)$  является функцией Грина для уравнения Пуассона,  $G(0, \rho) = \frac{1}{4\pi\rho}$ . Это решение является единственным в  $E^3$ . В общем случае при положительном значении  $\beta^2$  аналог формулы (6) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{j+1}(\mathbf{r}) &= \int_{E^3} \eta \mathbf{A}_j(\mathbf{r}') G(\beta, \rho) dV' \\ &= \int_Q \mathbf{A}_j(\mathbf{r}') G(\beta, \rho) dV', \quad (7) \end{aligned}$$

где функция  $G(\beta, \rho)$  является функцией Грина для уравнения Гельмгольца, которая для расходящейся волны равна  $\frac{\exp(i\beta\rho)}{4\pi\rho}$ . Единственность решения уравнения (3) в области  $Q$  при нулевых граничных условиях на бесконечности доказана в первой части приложения. При таком выборе членов ряда решение уравнения (2) будет

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \sum_{j=0}^{\infty} (-k^2 L)^j \mathbf{A}_0(\mathbf{r}), \quad (8)$$

где оператор  $L$  определен на множестве векторов с координатами  $\mathbf{r}$  как

$$L\mathbf{P}(\mathbf{r}) = \int_Q \mathbf{P}(\mathbf{r}') G(\beta, \rho) dV'.$$

Необходимо отметить, что члены ряда, определяющие векторный потенциал, различаются при разных частотах и проводимостях только постоянными коэффициентами при одинаковой координатной зависимости, которая для каждого члена определяется формой тела и конфигурацией внешнего магнитного поля. Эта особенность очень удобна для расчета ускорения этого тела магнитным полем.

## 2. Метод решения, аппроксимация и сходимость ряда Неймана

Уравнение (2) является уравнением Гельмгольца с кусочно-постоянным коэффициентом и граничными условиями, заданными на бесконечности. Идея предложенного метода состоит в том, что решение уравнения (2) находится в виде суммы решений уравнений Гельмгольца с постоянными коэффициентами в бесконечной области. Решение каждого такого уравнения может быть найдено путем интегрирования с известной функцией Грина и эти интегралы вычисляются по конечному объему тела. Модификации этого метода, где будут рассмотрены другие ряды для решения уравнения Гельмгольца с кусочно-постоянными коэффициентами, позволяющие получить сходящееся решение при больших значениях коэффициентов  $|k^2|$ , будут рассмотрены в следующих разделах. Найдем достаточное условие сходимости ряда Неймана (4). Из формулы (7) получим оценку

$$\sup_{E^3} |\mathbf{A}_{j+1}(\mathbf{r})| \leq \frac{1}{4\pi} \sup_{E^3} |\mathbf{A}_j(\mathbf{r})| \sup_{\mathbf{r}} \int_{E^3} \frac{\eta}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'.$$

Если область, занимаемая проводящим телом, является шаром единичного радиуса, то интеграл  $\int_{E^3} \frac{\eta}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$  достигает максимума ( $2\pi$ ) при  $\mathbf{r} = 0$ . Поэтому, когда область  $Q$  лежит внутри этого шара, получаем следующую оценку:

$$\sup_{E^3} |\mathbf{A}_{j+1}(\mathbf{r})| < \frac{1}{2} \sup_{E^3} |\mathbf{A}_j(\mathbf{r})|.$$

Следовательно, в этом случае достаточным условием сходимости ряда (4) будет  $|k^2| < 2$ . Частичная сумма ряда

$$\mathbf{C}_n(\mathbf{r}) = \sum_{j=0}^n (-k^2)^j \mathbf{A}_j(\mathbf{r}) \quad (9)$$

аппроксимирует точное решение уравнения (2) с ошибкой, значение которой не превышает

$$\frac{|k^2/2|^{n+1}}{1 - |k^2/2|} \sup_{E^3} |\mathbf{A}_0|.$$

Поэтому при численных расчетах точность аппроксимации искомого решения суммой (9) можно контролировать с помощью этой величины. Теоретически такой контроль возможен лишь при  $|k^2| < 2$ , хотя, как показывают численные эксперименты, сумма (9) при достаточно больших значениях  $n$  сходится и при других значениях  $|k^2|$ , по крайней мере вплоть до  $|k^2| = 9$ . Поэтому при значениях  $|k^2| \leq 9$  вычислять векторный потенциал с помощью (9) нужно до тех пор, пока вклад последующего члена в эту сумму не станет пренебрежимо мал.

### 3. Метод решения уравнения Гельмгольца с большим коэффициентом

При больших значениях  $|k^2|$  (например, для шара при  $|k^2| \geq 10$ ) частичная сумма (9) не может быть использована для аппроксимации решения уравнения (2), так как она хуже аппроксимирует решение с увеличением ее порядка  $n$ . В этом случае решение уравнения (2) можно представить в виде другого ряда, выбранного из семейства рядов, зависящих от вектора параметров  $\mathbf{K}_j$ , частным случаем которого является ряд Неймана. Идея выбора такого ряда основана на разложении в ряд искомого решения на основе метода, изложенного во второй части приложения. Применим этот метод для решения уравнения (2). В этом случае искомое значение амплитуды векторного потенциала можно записать в виде ряда

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{B}_j(\mathbf{r}, \mathbf{K}_j), \quad (10)$$

где  $\mathbf{B}_0(\mathbf{r})$  — решение уравнения

$$\Delta \mathbf{B}_0 + (\beta^2 + k_0^2) \mathbf{B}_0 = \mathbf{0}, \quad (11)$$

удовлетворяющее такому же условию на бесконечности, как и  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ . Все последующие члены ряда (10) — решения неоднородных уравнений Гельмгольца с нулевыми граничными условиями на бесконечности:

$$\Delta \mathbf{B}_{j+1} + (\beta^2 + k_{j+1}^2) \mathbf{B}_{j+1} = (k_j^2 - \eta k^2) \mathbf{B}_j, \quad j = 0, \dots, \infty. \quad (12)$$

Каждый последующий член ряда (10) определяется через предыдущий по формуле [7]

$$\mathbf{B}_{j+1}(\mathbf{r}, \mathbf{K}_{j+1}) = \int_{E^3} (\eta k^2 - k_j^2) \mathbf{B}_j(\mathbf{r}', \mathbf{K}_j) G(k'_{j+1}, \rho) dV', \quad (13)$$

$$j = 1, \dots, \infty,$$

где  $k'_j = \sqrt{\beta^2 + k_j^2}$ , а  $\mathbf{K}_j = (k_0, k_1, \dots, k_j)$  — вектор параметров размера  $j + 1$ . Если ряд (10), в который входят слагаемые (13), сходится, то этот ряд будет решением уравнения (2). Сходимость ряда улучшится, если использовать мнимые значения  $k'_j$ , в частности  $k'_j = i|k|$ . Это связано с тем, что наличие убывающих экспоненциальных функций в правой части формулы (13) уменьшает каждый последующий вычисленный член ряда в большей степени, чем это было в формуле (7).

Рассмотрим другой выбор первых двух членов в ряде (10). Пусть

$$\Delta \mathbf{B}_0 + (\beta^2 + k_0^2) \mathbf{B}_0 = \mathbf{0}, \quad (14)$$

$$\Delta \mathbf{B}_1 + (\beta^2 + k_1^2) \mathbf{B}_1 = \eta(k_0^2 - k^2) \mathbf{B}_0, \quad (15)$$

где параметр  $k_0$  выбирается таким образом, чтобы удовлетворить условию быстрой сходимости ряда (4).

На первый взгляд такой выбор первых двух уравнений является малопривлекательным с практической точки зрения, так как в этом случае необходимо получить решение уравнения (14) в виде ряда Неймана по формулам (7). Однако при таком выборе первых двух уравнений существует один частный случай, когда решение уравнения (14) можно получить аналитически, а решение уравнения (15) свести к вычислению поверхностного потенциала. Этот случай будет рассмотрен более подробно в пятом разделе.

### 4. Приведение к интегральному уравнению и нахождение осевой напряженности поля

Искомое значение векторного потенциала удовлетворяет интегральному уравнению, зависящему от параметра  $k_0$ , если все коэффициенты вектора параметров  $\mathbf{K}_j$  одинаковые, т.е.  $k_j = k_0$  для любого значения  $j$ .

Действительно, из (10) и (13) получим

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{B}_0(\mathbf{r}) + \int_{E^3} (\eta k^2 - k_0^2) \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{B}_j(\mathbf{r}') G(k'_0, \rho) dV'.$$

Отсюда

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{B}_0(\mathbf{r}) + \int_{E^3} (\eta k^2 - k_0^2) \mathbf{A}(\mathbf{r}') G(k'_0, \rho) dV'. \quad (16)$$

Интегральное уравнение для векторного потенциала можно получить и тогда, когда два первых члена ряда заданы уравнениями (14), (15), а все остальные значения вектора параметров одинаковые, т.е.  $k_j = k_1$  для любого значения  $j, j \neq 0$ . Обозначим  $\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) = \mathbf{A}(\mathbf{r}) - \mathbf{B}_0(\mathbf{r})$ . Тогда

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{B}_0(\mathbf{r}) + \mathbf{B}_1(\mathbf{r}) + \int_{E^3} (\eta k^2 - k_1^2) \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{B}_j(\mathbf{r}') G(k'_1, \rho) dV'$$

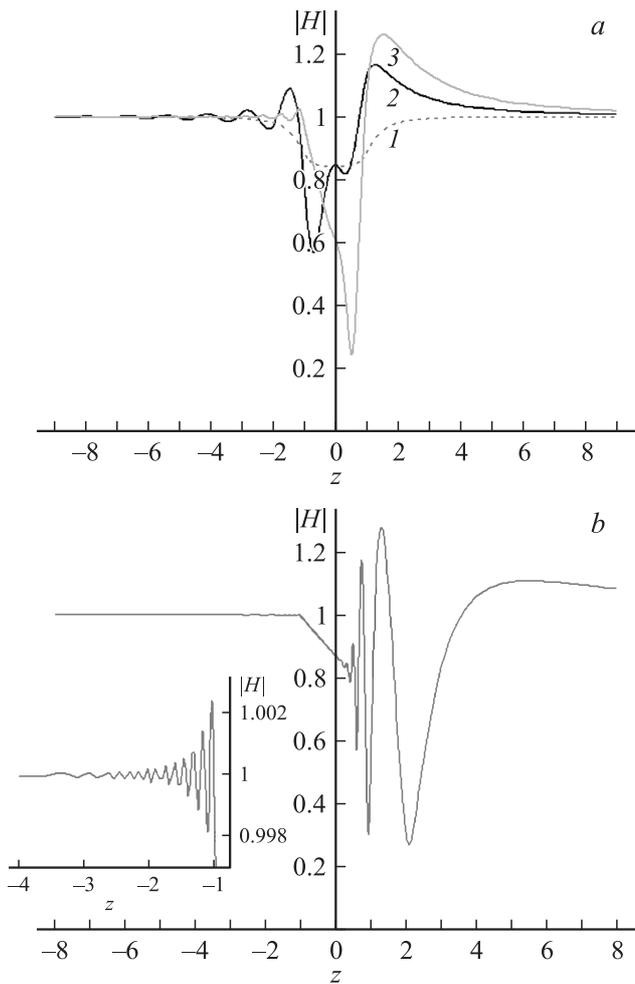
и

$$\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) = \mathbf{B}_1(\mathbf{r}) + \int_{E^3} (\eta k^2 - k_1^2) \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{r}') G(k'_1, \rho) dV'. \quad (17)$$

Интегральное представление векторного потенциала является удобным инструментом для нахождения модуля напряженности магнитного поля  $\mathbf{H}$  на оси тела. Поскольку вектор  $\mathbf{A}$  имеет только азимутальную составляющую, то модуль напряженности магнитного поля в произвольной точке пространства равен

$$|H| = \frac{1}{r} \sqrt{\left| \frac{\partial r A}{\partial r} \right|^2 + \left| \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A \sin \theta}{\partial \theta} \right|^2}. \quad (18)$$

Однако формула (18) является непригодной для вычисления напряженности на оси тела, поскольку в ней присутствует неопределенность при  $\theta \rightarrow 0$ . Нетрудно показать, что осевая напряженность поля равна



**Рис. 2.** *a* — зависимости амплитуды осевого магнитного поля от осевой координаты  $z$  при  $|k^2| = 6$  и разных значениях  $\beta^2$ : 1 —  $\beta^2 = 0$ , 2 — 6, 3 — 30. *b* — зависимость амплитуды осевого магнитного поля от осевой координаты  $z$  при  $|k^2| = 6$  и  $\beta^2 = 480$ .

$H(r) = \frac{2}{r} \left( \frac{\partial A}{\partial \theta} \right)_{\theta=0}$ . Тогда из (16) следует, что напряженность магнитного поля на оси может быть определена по формуле

$$H(r) = H_0(r) + \frac{2}{r} \int_{E^3} (\eta k^2 - k_0^2) A(r', \theta') \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} G(k'_0, \rho) \right]_{\theta=0} \cos \varphi' dV', \tag{19}$$

где  $H_0(r) = \frac{2}{r} \left( \frac{\partial B_0}{\partial \theta} \right)_{\theta=0}$ , когда члены ряда определены формулами (11) и (12), при условии, что  $k_j = k_0$  для любого значения  $j$ , и

$$H(r) = H_1(r) + \frac{2}{r} \int_{E^3} (\eta k^2 - k_1^2) \tilde{A}(r', \theta') \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} G(k'_1, \rho) \right]_{\theta=0} \cos \varphi' dV', \tag{20}$$

где  $H_1(r) = \frac{2}{r} \left( \frac{\partial (B_0 + B_1)}{\partial \theta} \right)_{\theta=0}$ , когда члены ряда определены формулами (14), (15) и (12), при условии, что  $k_j = k_1$  для любого значения  $j$ . Здесь, а также и в формуле (12)  $k = 1, \dots, \infty$ .

Формула (19) использовалась для вычисления напряженности магнитного поля на оси шара при  $|k^2| = 6$ , для вычисления векторного потенциала использовались формулы (10)–(12). На рис. 2 приведены зависимости амплитуды осевого магнитного поля от осевой координаты  $z$ . Векторные потенциалы внешних полей, бегущих справа налево, определялись по формуле

$$\mathbf{A}_0(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} r \sin \theta \exp(i\beta r \cos \theta) \mathbf{n}_\varphi,$$

где  $\mathbf{n}_\varphi = (\mathbf{i}_x \sin \varphi - \mathbf{i}_y \cos \varphi)$  — единичный азимутальный вектор (рис. 1), а  $\beta^2$  принимало значения 0, 6, 30, 480.

### 5. Выбор первого члена суммы

Для ряда (10) частичная сумма

$$\mathbf{D}_n(\mathbf{r}, \mathbf{K}_n) = \sum_{j=0}^n \mathbf{B}_j(\mathbf{r}, \mathbf{K}_j) \tag{21}$$

может быть применена для нахождения приближенного решения при больших значениях  $|k^2|$ . В последующих численных экспериментах значением величины  $\beta^2$  пренебрегалось, поскольку при движении проводящего тела в переменном магнитном поле она обычно существенно меньше, чем  $|k^2|$ . Поскольку основной вклад в сумму (21) определяется ее первыми членами, то необходимо иметь достаточно точное решение уравнения (11), чтобы избежать дополнительных погрешностей при дальнейших итерациях. Один из очевидных вариантов — выбор в формуле (11) значения параметра  $k_0 = 0$ , тогда первый член в сумме (21) совпадет с потенциалом внешнего магнитного поля, невозмущенного проводящим телом. В этом случае для сферической системы координат первый член  $\mathbf{B}_0(\mathbf{r})$  в однородном магнитном поле определяется формулой

$$\mathbf{B}_0(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} r \sin \theta \mathbf{n}_\varphi. \tag{22}$$

Для тела, помещенного в магнитное поле, амплитуда которого вдоль оси симметрии пропорциональна осевой координате  $z$ , значение первого члена  $\mathbf{B}_0(\mathbf{r})$  в сферической системе координат определяется по формуле

$$\mathbf{B}_0(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} r^2 \sin \theta \cos \theta \mathbf{n}_\varphi, \tag{23}$$

а при квадратной зависимости амплитуды вдоль оси от осевой координаты, значение первого члена ряда будет равно

$$\mathbf{B}_0(\mathbf{r}) = \frac{1}{8} r^3 \sin \theta (5 \cos^2 \theta - 1) \mathbf{n}_\varphi. \tag{24}$$

Другой, менее очевидный вариант — выбор  $|k_0^2| \rightarrow \infty$ . Тогда первый член частичной суммы (21) совпадет с

векторным потенциалом внешнего магнитного поля, возмущенного сверхпроводящим телом (значения этого потенциала были получены авторами в работе [3]). В этом случае  $\mathbf{B}_0(\mathbf{r})$  вне тела состоит из суммы потенциалов внешнего поля и поверхностных токов и определяется формулой

$$\mathbf{B}_0(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} r \mathbf{n}_\varphi \sin \theta - \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\mathbf{j}(\theta')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS', \quad (25)$$

где  $S$  — поверхность тела, а  $\mathbf{j}(\theta)$  — приведенная поверхностная плотность токов тела. Внутри тела значение  $\mathbf{B}_0(\mathbf{r}) = 0$ , а следующий член ряда  $\mathbf{B}_1(\mathbf{r})$  определяется формулой

$$\mathbf{B}_1(\mathbf{r}) = \int_S \mathbf{j}(\theta') G(k'_1, \rho) dS'. \quad (26)$$

Необходимо отметить, что если для всех последующих членов частичной суммы в (21) значения параметров будут выбраны из условия  $k_j = k$ ,  $j = 1, \dots, \infty$ , то интегрирование в формулах (13) будет производиться только в области  $E^3 \setminus Q$ , где  $Q$  — область, занимаемая телом.

В работе [4] была определена плотность поверхностного тока сверхпроводящего эллипсоида вращения с полуосями, соответственно равными 1 и  $\gamma$  (полуось единичной длины направлена по оси симметрии), расположенного на оси осесимметричного магнитного поля, которое изменяется на этой оси как полином степени  $n$ . Для случаев однородного магнитного поля, поля с амплитудой на оси симметрии, пропорционального осевой координате  $z$ , и при квадратной зависимости амплитуды вдоль оси от осевой координаты, значения плотности поверхностного тока примут следующий вид соответственно:

$$\mathbf{j}_0(\theta) = \mu(\gamma, \theta) G_{11} \mathbf{n}_\varphi, \quad \mathbf{j}_1(\theta) = \mu(\gamma, \theta) (G_{22} z) \mathbf{n}_\varphi, \\ \mathbf{j}_2(\theta) = \mu(\gamma, \theta) (G_{13} + G_{33} z^2) \mathbf{n}_\varphi, \quad (27)$$

где

$$\mu(\gamma, \theta) = \frac{\sin \theta}{\sqrt{\sin^2 \theta + \gamma^4 \cos^2 \theta}},$$

значение осевой координаты  $z$  связано с текущими сферическими координатами соотношением

$$z = \gamma \frac{\cos \theta}{\sqrt{\sin^2 \theta + \gamma^2 \cos^2 \theta}},$$

а значения коэффициентов  $G_{11}$ ,  $G_{13}$ ,  $G_{22}$ ,  $G_{33}$  определены в [4]. Для шара ( $\gamma = 1$ ) значения этих коэффициентов принимают более простой вид, и они равны  $G_{11} = 1.5$ ,  $G_{13} = -0.875$ ,  $G_{22} = 2.5$ ,  $G_{33} = 4.375$ .

В настоящей работе мы также будем рассматривать проводник эллипсоидальной формы с такими же параметрами. Поскольку векторный потенциал и все члены ряда в его разложении имеют только азимутальные

составляющие, то все поверхностные и объемные интегралы от некоторых функций  $\mathbf{P}_S(\mathbf{r})$  и  $\mathbf{P}_Q(\mathbf{r})$ , заданных на поверхности и в объеме тела соответственно, могут быть представлены в сферических координатах в следующем виде:

$$\int_S \mathbf{P}_S(\mathbf{r}') dS' = \gamma^2 \\ \times \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{\sin^2 \theta' + \gamma^4 \cos^2 \theta'} \sin \theta' \cos \varphi'}{(\sin^2 \theta' + \gamma^2 \cos^2 \theta')^2} P_S(\theta', \varphi') \mathbf{n}_\varphi d\varphi' d\theta', \quad (28)$$

$$\int_Q \mathbf{P}_Q(\mathbf{r}') dV' \\ = \int_0^\pi \sin \theta' \int_0^{2\pi} \cos \varphi' \int_0^{R(\theta')} r'^2 P_Q(r', \theta', \varphi') \mathbf{n}_\varphi dr' d\varphi' d\theta', \quad (29)$$

где

$$R(\theta') = \frac{\gamma}{\sqrt{\sin^2 \theta' + \gamma^2 \cos^2 \theta'}}.$$

Формулы (28) и (29) использовались при вычислении интегралов.

## 6. Вычисление компонентов суммы

Функция Грина имеет особенность в точках интегрирования  $\mathbf{r}' = \mathbf{r}$ . По этой причине для численного интегрирования необходимо применять квадратурные формулы специального вида, учитывающие эту особенность. Все интегралы, вычисляемые в формулах (7), (13), являются объемными потенциалами с некоторыми заданными распределениями плотности и для их численного вычисления использовались результаты работы [8]. В ней предложен достаточно простой по идее и численной реализации полуаналитический метод вычисления потенциала для тел эллипсоидальной формы. При вычислении интеграла по каждой из переменных получаются квадратурные формулы, не только не имеющие особенностей в узлах интегрирования, но и не принимающие в них большие значения.

Аналогичный подход может быть применен и для численного вычисления поверхностных интегралов. Как уже было отмечено ранее, для более точного вычисления искомой амплитуды векторного потенциала необходимо получить хорошее приближение для первого члена суммы в (21). Если  $|k_0^2| \rightarrow \infty$ , то необходимо вычислить значение  $\mathbf{B}_1(\mathbf{r})$  по формуле (26), которая также имеет особенность в точках  $\mathbf{r}$  на поверхности тела. Изложим метод вычисления этого интеграла, основываясь на общем подходе, изложенном в [8], и с учетом того, что в [8] проблема вычисления поверхностных интегралов не

рассматривалась. Интеграл (26) в сферической системе координат может быть записан в виде

$$B_1(r, \theta) = \frac{\gamma^2}{2\pi} \times \int_0^\pi \frac{j_l \sin^2 \theta'}{(\sin^2 \theta' + \gamma^2 \cos^2 \theta')^2} \int_0^\pi \frac{\exp(ik_1 \rho)}{\rho} \cos \varphi' d\varphi' d\theta', \quad (30)$$

где

$$k_1 = \sqrt{\frac{\alpha}{2}}(1+i)$$

(см. формулу (2)),  $\rho = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{r^2 + r_\theta^2 - 2rr_\theta \cos \psi}$ ,  $r_\theta = \frac{\gamma}{\sqrt{\sin^2 \theta' + \gamma^2 \cos^2 \theta'}}$ ,  $\cos \psi = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos \varphi'$ , а функция  $j_l$  ( $l = 0, 1, 2$ ) равна второму множителю одной из формул в (27) в зависимости от рассматриваемого случая. Для фиксированного значения переменной  $\theta'$  обозначим  $u(\varphi') = \exp(ik_1 \rho) \cos \varphi'$ ,  $v(\varphi') = \frac{1}{\rho}$ . Зададим по переменным  $\theta'$  и  $\varphi'$  равномерную сетку с узлами  $\theta_j$  и  $\varphi_i$ , несмещенную по переменной  $\theta'$  и смещенную по  $\varphi'$ :

$$\theta_j = \frac{\pi}{N_\theta - 1}(j - 1), \quad j = 1, \dots, N_\theta,$$

$$\varphi_i = \frac{\pi}{N_\varphi}(i - 0.5), \quad \varphi_{i+1/2} = \frac{\varphi_i + \varphi_{i+1}}{2}, \quad \varphi_{1/2} = 0,$$

$$\varphi_{N_\varphi+1/2} = \pi, \quad i = 1, \dots, N_\varphi.$$

Тогда

$$\int_{\varphi_{i-1/2}}^{\varphi_{i+1/2}} v(\varphi') d\varphi' = \frac{2}{\sqrt{a+b}} \left( V^{(0)}(\varphi_{i+1/2}) - V^{(0)}(\varphi_{i-1/2}) \right),$$

где

$$a = r^2 + r_\theta^2 - 2rr_\theta \cos \theta \cos \theta',$$

$$b = 2rr_\theta \sin \theta \sin \theta', \quad V^{(0)}(\varphi') = F\left(\delta, \sqrt{\frac{2b}{a+b}}\right),$$

$$\delta = \arcsin \sqrt{\frac{(a+b)(1 - \cos \varphi')}{2(a - b \cos \varphi')}},$$

а функция  $F$  — эллиптический интеграл первого рода. Квадратурная формула, аппроксимирующая внутренний интеграл в (30), имеет вид [8]

$$\int_0^\pi u(\varphi') v(\varphi') d\varphi' \approx \frac{2}{\sqrt{a+b}} \sum_{i=1}^{N_\varphi} u(\varphi_i) \left( V^{(0)}(\varphi_{i+1/2}) - V^{(0)}(\varphi_{i-1/2}) \right).$$

Функция  $V^{(0)}(\varphi')$  уже не имеет особенностей, и потому для численного интегрирования внешнего интеграла в (30) применялась квадратурная формула Симпсона.

## 7. Численные эксперименты

Формулы (13), (22)–(27) использовались для численного определения азимутальной компоненты векторного потенциала  $A(r, \theta)$  при различных значениях параметра  $k$ . Напряженность магнитного поля на оси тела определялась по формулам (19), (20). Отметим, что постоянные  $k_j$  у вектора параметров  $\mathbf{K}_j$  могут быть произвольными, а потому их выбор определялся двумя факторами: условием на сходимость частичной суммы (21) к решению уравнения (3) и экономичностью численного алгоритма. Исходя из этих соображений, для однородного магнитного поля эти постоянные выбирались как  $k_j = 0$  при  $|k^2| \leq 6$  и  $k_j^2 = k^2$  при  $|k^2| > 6$ . Из формулы (13) следует, что при таком выборе коэффициентов в первом случае интегрирование производится только внутри поверхности тела, а во втором случае — только вне его поверхности. Сходимость ряда во втором случае будет медленней, чем в первом, но наличие быстро затухающего экспоненциального множителя в правой части уравнений (13) позволяет получить сходящийся ряд при больших значениях  $|k^2|$ . В численных экспериментах количество точек  $N_r$  и  $N_\theta$  по каждой из координат выбиралось равным 200, а по координате  $r$  была задана неравномерная сетка со сгущением в точках, близких к границе осесимметричного тела.

Точность расчетов определялась либо сравнением значений модулей азимутальной составляющей векторного потенциала  $|A^{(1)}|$  и  $|A^{(2)}|$ , вычисленных с помощью двух разных частичных сумм, либо сравнением модуля векторного потенциала и модуля напряженности магнитного поля на оси с точными значениями для шара [9]. Первый член первой суммы — векторный потенциал внешнего поля, когда проводящее тело не возмущает внешнее поле, первый член второй суммы — векторный потенциал магнитного поля, когда внешнее поле максимально возмущено сверхпроводящим телом.

Значение квадратичной погрешности  $\sigma$  модулей амплитуды векторного потенциала, вычисленных по разным формулам, в расчетных точках области  $r_k$  и  $\theta_j$ ,  $k = 1, \dots, N_r$ ,  $j = 1, \dots, N_\theta$ , определялась формулой

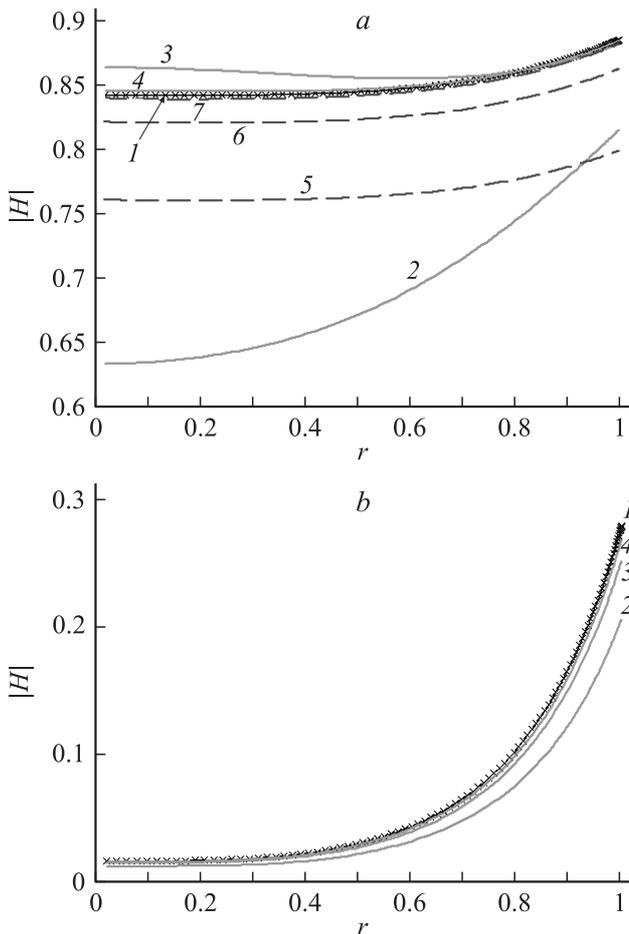
$$\sigma = \frac{1}{N_r N_\theta} \sqrt{\sum_{k,j} (|A^{(1)}(r_k, \theta_j)| - |A^{(2)}(r_k, \theta_j)|)^2}. \quad (31)$$

Для шара в формуле (31) считались квадратичные отклонения вычисленного модуля векторного потенциала от точных значений в узлах сетки.

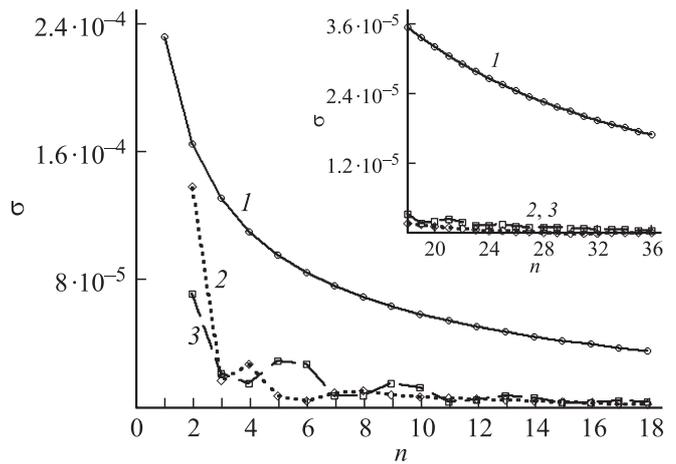
Рис. 3 иллюстрирует сходимость метода, когда осевое магнитное поле вычислялось одним из способов, описанных выше, для шаров с разной проводимостью, помещенных в однородное магнитное поле. Приведены графики точного и численного решений для разного порядка частичных сумм в формуле (21) и разного выбора параметра  $k_j$  в формулах (11), (14), (15) и (12).

Сходимость метода иллюстрируется также на рис. 4 графиками квадратичных погрешностей вычисления азимутальной составляющей векторного потенциала для эллипсоида в зависимости от порядка частичных сумм. Для однородного поля производилось сравнение с точным решением, а для неоднородного поля решения, полученные двумя разными частичными суммами, сравнивались друг с другом. Первый график демонстрирует типичное монотонное, но более медленное уменьшение погрешности при выборе параметра  $k_j$  из условия  $k_j^2 = k^2$ . При  $k_j = 0$  погрешность уменьшается немонотонным образом.

Данные численных расчетов позволяют сделать вывод о том, что частичная сумма ряда (21), вычисленная предложенными методами, хорошо приближает искомое значение векторного потенциала в уравнении (3), а выбор параметров  $k_j$  позволяет получить сходящееся численное решение для уравнения (3) при различных значениях параметра  $k^2$  в уравнении Гельмгольца.



**Рис. 3.** *a* — зависимость амплитуды осевого магнитного поля от расстояния  $r$  до центра проводящего шара,  $|k^2| = 6$ . 1 — точное решение (точки на графике обозначены „\*“). Сплошные линии:  $k_j = 0$  и  $n = 3$  (2),  $n = 6$  (3),  $n = 10$  (4). Штриховые линии:  $k_j^2 = k^2$  и  $n = 3$  (5);  $n = 6$  (6);  $n = 10$  (7). *b* — зависимость амплитуды осевого магнитного поля от расстояния  $r$  до центра проводящего шара,  $|k^2| = 100$ . Точное решение (1),  $n = 3$  (2),  $n = 12$  (3),  $n = 24$  (4).



**Рис. 4.** Убывание среднеквадратичной погрешности в зависимости от порядка частичной суммы: 1 —  $|k^2| = 100$ ,  $\gamma = 1$ , однородное поле; 2 —  $|k^2| = 25$ ,  $\gamma = 0.5$ , линейное поле; 3 —  $|k^2| = 25$ ,  $\gamma = 0.5$ , квадратичное поле.

Новый метод расчета разработан в основном для создания математической модели бесконтактного ускорения металлического тела и металлической пыли переменным магнитным полем [10,11].

## ПРИЛОЖЕНИЕ

### 1. Единственность решения в области, занимаемой проводящим телом

Пусть  $\theta$  — объем, занимаемый проводящим телом в евклидовом пространстве  $E^3$ , ограниченный кусочно-гладкой поверхностью  $S$ .

**Теорема.** Уравнение (3) с нулевыми граничными условиями на бесконечности имеет единственное решение в области  $\bar{Q}$ , если компоненты вектора  $A'$  — непрерывные функции с непрерывной производной по нормали к поверхности  $S$ , имеющие непрерывные вторые производные в областях  $Q$  и  $E^3 \setminus \bar{Q}$  и непрерывные первые производные в  $\bar{Q}$  и  $E^3 \setminus Q$ .

Здесь, как и ранее, предполагается, что функция  $A'$  стремится к нулю равномерно при  $|r| \rightarrow \infty$ .

*Доказательство.* Предположим, что существуют два различных решения уравнения (3)  $A_1$  и  $A_2$ :

$$\Delta A_1 + (\beta^2 + k^2 \eta) A_1 = -k^2 \eta A_0,$$

$$\Delta A_2 + (\beta^2 + k^2 \eta) A_2 = -k^2 \eta A_0.$$

Вычитая из первого уравнения второе, получаем

$$\Delta C + (\beta^2 + k^2 \eta) C = 0, \quad C = A_1 - A_2.$$

Для вектора  $C^*$ , комплексно сопряженного с  $C$ , справедливо уравнение

$$\Delta C^* + (\beta^2 - k^2 \eta) C^* = 0.$$

Поэтому для компонент  $C_i$  и  $C_i^*$  векторов  $\mathbf{C}$  и  $\mathbf{C}^*$  ( $i = 1, 2, 3$ ) справедливы равенства

$$C_i^* (\Delta C_i + (\beta^2 + k^2 \eta) C_i) = 0,$$

$$C_i (\Delta C_i^* + (\beta^2 - k^2 \eta) C_i^*) = 0.$$

Вычитая из первого равенства второе, получим

$$(C_i^* \Delta C_i - C_i \Delta C_i^*) + 2k^2 \eta C_i^* C_i = 0.$$

После интегрирования последнего равенства по бесконечной области интеграл от первого слагаемого будет равен нулю. Действительно, интеграл по бесконечной области равен сумме интегралов по областям  $Q$  и  $E^3/Q$ . Применяя к каждому из интегралов вторую формулу Грина и учитывая непрерывность производных по нормали для функций  $C_i$  и  $C_i^*$  на границе области  $Q$  и нулевые граничные условия для этих функций на бесконечности, получим требуемое утверждение. Таким образом,

$$\int_{E^3} \eta C_i C_i^* dV' = \int_Q C_i C_i^* dV' = 0.$$

Поскольку подинтегральная функция всегда неотрицательна, равенство интеграла нулю возможно только при выполнении следующего условия:  $\mathbf{C} = \mathbf{0}$  в области  $Q$ . Следовательно, решение уравнения (3) в области  $Q$  единственно.

Отметим, что при добавлении к положительному коэффициенту в уравнении Гельмгольца сколь угодно малого мнимого слагаемого, решение волнового уравнения в бесконечной области с нулевыми граничными условиями будет единственным (принцип предельного поглощения) [12]. В условии вышеприведенной теоремы мнимое слагаемое добавляется к положительному коэффициенту уравнения Гельмгольца только в подобласти всего пространства, и этого достаточно для единственности решения в подобласти. В частном случае, когда  $\beta^2 = 0$ , решение уравнения (3) будет единственным во всем пространстве, поскольку значения искомого решения определяются на границе тела  $S$  однозначно, а внешняя краевая задача Дирихле для уравнения Лапласа имеет единственное решение при нулевых граничных условиях.

## 2. Разложение в ряд решения линейного операторного уравнения

Решение уравнения с линейным оператором  $L$ , заданным на пространстве функций

$$L\psi = 0 \quad (32)$$

и граничным условием

$$\psi|_S = \psi^{(0)}, \quad (33)$$

будем искать по итерационной процедуре

$$(L + H_0)\psi_0 = 0, \quad (34)$$

$$(L + H_i)\psi_i = H_{i-1}\psi_{i-1}, \quad i \geq 1, \quad (35)$$

где  $H_i$  — операторы произвольного вида, а в уравнениях (34), (35) одна из функций  $\psi_i$  удовлетворяет граничному условию (33), все остальные функции имеют нулевые граничные условия на границе. Если все уравнения (34), (35) разрешимы и выполняется условие

$$\lim_{n \rightarrow \infty} H_n \psi_n = 0, \quad (36)$$

то ряд

$$\sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \quad (37)$$

является решением уравнения (32) с граничными условиями (33). Нетрудно заметить, что если ряд (37) — сходится, а  $H_i$  являются линейными ограниченными операторами, то условие (36) выполнено.

Учет граничного условия в уравнении (32) может быть осуществлен не только при решении уравнений (34), (35), но и выбором частного решения из всего множества решений, определяемых формулой (37), удовлетворяющего условию (33).

Для иллюстрации вышесказанного найдем функцию  $\psi$ , когда оператор  $L$  в (32) определен формулой

$$L = \frac{d^2}{dx^2} - \lambda^2 x^k, \quad (38)$$

где  $\lambda^2$  и  $k$  — постоянные. Пусть  $H_i = \lambda^2 x^k$  для любых  $i \geq 1$ . Тогда уравнения (34) и (35) примут следующий вид:

$$\frac{d^2 \psi_0}{dx^2} = 0, \quad (39)$$

$$\frac{d^2 \psi_i}{dx^2} = \lambda^2 x^k \psi_{i-1}. \quad (40)$$

Общее решение уравнения (38) будет равно сумме общего решения уравнения (39) и частных решений уравнений (40)

$$\psi_0 = c_1 + c_2 x,$$

$$\psi_i = \frac{\lambda^{2i} x^{i(k+2)}}{i!(k+2)^i} \left[ \frac{c_1}{(k+1)(2k+3) \dots (ik+2i-1)} + \frac{c_2 x}{(k+3)(2k+5) \dots (ik+2i+1)} \right],$$

где  $c_1$  и  $c_2$  — произвольные постоянные. Таким образом, общее решение уравнения (32) для оператора  $L$ , заданного в (38), примет следующий вид:

$$\psi = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^{ik}}{i!(k+2)^i} \left[ \frac{b_1 (\lambda x)^{2i}}{(k+1)(2k+3) \dots (ik+2i-1)} + \frac{b_2 (\lambda x)^{2i+1}}{(k+3)(2k+5) \dots (ik+2i+1)} \right],$$

где  $b_1$  и  $b_2$  — произвольные постоянные. При  $k = 0$  решение этого уравнения определяется очевидным равенством

$$\psi = b_1 \operatorname{ch}(\lambda x) + b_2 \operatorname{sh}(\lambda x).$$

## Список литературы

- [1] Самохин А.Б. Интегральные уравнения и итерационные методы в электромагнитном рассеянии. М.: Радио и связь, 1998.
- [2] Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Интегральные уравнения. Киев: Наукова думка, 1986.
- [3] Савченко А.О., Савченко О.Я. // ЖТФ. 2007. Т. 77. Вып. 7. С. 130–133.
- [4] Савченко А.О., Савченко О.Я. // ТМФ. 2012. Т. 170. № 3. С. 381–392.
- [5] Дмитриев В.И., Захаров Е.В. Интегральные уравнения в краевых задачах электродинамики. М.: Изд-во МГУ, 1987.
- [6] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. М.: Наука, 1973.
- [7] Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981.
- [8] Савченко А.О. // СибЖИМ. 2012. Т. 15. № 1(49). С. 123–131.
- [9] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1992.
- [10] Савченко А.Я., Савченко О.Я. // Вопр. оборон. техн. 1990. Сер. № 11.
- [11] Воробьев И.И. Задачи по физике: Учеб. пособие / Воробьев И.И., Зубков П.И., Кутузова Г.А. и др. / Под ред. О.Я. Савченко. СПб.: Лань, 2001. Задачи 11.5.14–22.
- [12] Свешников А.Г. // ДАН СССР. 1950. Т. 73. № 5. С. 917–920.