Физика твердого тела, 1997, том 39, № 8

Нелинейные взаимодействия продольных звуковых волн в магнетиках вблизи фазового перехода антиферромагнетизм–ферромагнетизм

© И.Ф. Мирсаев

Институт физики металлов Уральского отделения Российской академии наук,
620219 Екатеринбург, Россия

(Поступила в Редакцию 19 февраля 1997 г.)

Исследован, обусловленный обменным магнитоупругим взаимодействием, эффективный упругий ангармонизм антиферромагнетиков типа "легкая плоскость", в которых имеет место фазовый переход антиферромагнетизм–ферромагнетизм. Вблизи перехода такой ангармонизм может проявляться в нелинейных взаимодействиях продольных акустических волн, приводящих к магнитоакустическим эффектам преобразования частоты волн. Показано, что в области фазового превращения происходит усиление этих эффектов за счет возрастания на несколько порядков величины эффективных модулей упругости третьего порядка. В качестве примера рассмотрена генерация вторых продольных звуковых гармоник.

Магнитоупругое (МУ) взаимодействие спиновых и упругих колебаний в магнетиках приводит к изменению модулей упругости. Эти изменения описываются динамическим МУ-вкладом $\Delta\hat{C}$ в эффективные модули упругости ($\hat{C} \to \hat{C}^{\text{ef}} = \hat{C} + \Delta\hat{C}$) и проявляются в различных магнитоакустических эффектах [1–6]. В частности, с модулями второго порядка $\Delta\hat{C}^{(2)}$ связаны эффекты Фарадея и Фогта (или Коттона–Мутона) [3,6,7], а с модулями упругости третьего порядка $\Delta\hat{C}^{(3)}$ — различные нелинейные эффекты, например вынужденное комбинационное рассеяние, а также генерация второй акустической гармоники бегущих звуковых волн [1,2].

В [1,4] появление динамических модулей $\Delta\hat{C}$ в антиферромагнетиках (АФ) вызвано анизотропным МУ-взаимодействием, зависящим от направления антиферромагнитного вектора $\mathbf{L}$. Колебания этого вектора, связаны с упругими деформациями e_{ij} наиболее сильно и приводят к гигантскому ангармонизму [1]: $\Delta C^{(3)} \approx (10^3{-}10^4)\hat{C}^{(2)}$. Вклад же колебаний вектора ферромагнетизма (ФМ) $\mathbf{M}$ в $\Delta\hat{C}$ пренебрежимо мал из-за незначительной величины относительной намагниченности $m_0 = M/2M_0 \approx (H/2H_E) \ll 1$, где H — внешнее поле, а H_E — эффективное обменное поле.

В настоящей работе исследуется эффективный упругий ангармонизм АФ, обусловленный в отличие от [1,4] не анизотропным, а обменным МУ-взаимодействием, наиболее существенным вблизи магнитного фазового перехода АФ–ФМ.

Обменно-стрикционное взаимодействие, а также его вклад $\Delta\hat{C}$ в эффективные модули упругости зависят от величины намагниченности m_0: $\Delta\hat{C} \sim m_0$. В окрестности фазового перехода АФ–ФМ обменное поле $H_E \to 0$, а относительная намагниченность возрастает до своего критического значения $m^0_{\text{Cr}} = (3H/4H_E) \lesssim 1$ [5,8]. Поэтому обменное МУ-взаимодействие и связанные с ним нелинейные акустические эффекты в АФ могут проявляться наиболее сильно именно вблизи такого перехода.

Переходы АФ–ФМ детально изучались в соединении $Mn_{2-x}Cr_xSb$ [5,8–10] с тетрагональной симметрией типа $P4/nmm$. Поэтому рассмотрение акустических свойств АФ, связанных с модулями упругости $\Delta\hat{C}(m_0)$, будем проводить на примере этого соединения.

1. Равновесное состояние

Рассмотрим тетрагональный двухподрешеточный АФ с магнитной анизотропией типа "легкая плоскость". К таким АФ относится, в частности, соединение $Mn_{1.88}Cr_{0.12}Sb$, в котором наблюдается фазовый переход АФ–ФМ. Как показано в [5], его можно описывать на основе двухподрешеточной модели. Запишем плотность термодинамического потенциала в антиферромагнитной области в виде

$$F = 2M_0\left\{H_E^0 m^2 + \frac{1}{2}H_A l_3^2 + \frac{1}{2}h_A m_3^2 - \mathbf{Hm} + \frac{1}{2}\mu_{pq}\frac{\partial \mathbf{l}}{\partial a_p}\frac{\partial \mathbf{l}}{\partial a_q} + \frac{1}{2}\lambda_{pq}\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial a_p}\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial a_q}\right\} + B_{ij}e_{ij} + G_{ij}e_{ij}m^2 + \frac{1}{2}C_{ijkl}e_{ij}e_{kl} + \frac{1}{6}C_{ijklmn}e_{ij}e_{kl}e_{mn} + Pe_{ii}. \qquad (1)$$

Здесь

$$\mathbf{m} = \frac{\mathbf{M}^{(1)} + \mathbf{M}^{(2)}}{2M_0}, \quad \mathbf{l} = \frac{\mathbf{M}^{(1)} - \mathbf{M}^{(2)}}{2M_0} \text{ —} \qquad (2)$$

относительные векторы ФМ и АФ, $\mathbf{M}^{(n)} = \rho_0\boldsymbol{\mu}^{(n)}$, где $\mu^{(n)}$ — плотность магнитных моментов подрешеток ($n = 1, 2$), ρ_0 — плотность вещества до деформации, $|\mathbf{M}^{(1)}| = |\mathbf{M}^{(2)}| = M_0$, поэтому

$$\mathbf{ml} = 0, \quad m^2 + l^2 = 1, \qquad (3)$$

H и H_E — внешнее и обменное поля, H_A, h_A — поля магнитной анизотропии, μ_{pq}, λ_{pq} — константы неоднородного обмена, B_{ij}, G_{ij} — обменно-стрикционные константы, C_{ijkl} и C_{ijklmn} — модули упругости второго и третьего порядков при $M_0 = 0$, P — величина гидростатического давления,

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{s,i}u_{s,j}) \text{ —} \tag{4}$$

тензор деформации, где $u_i = (x_i - a_i)$ — упругое смещение, $u_{i,j} \equiv \partial u_i/\partial a_j$, x_i и a_i — координаты точек тела до и после деформации.

Заметим, что в (1) учтено только обменное МУ-взаимодействие, связанное с изменением объема $\Delta V/V_0 = e_{ii}$ кристалла, и отсутствует энергия анизотропного (A) МУ-взаимодействия

$$F^A_{me} = G_{ijkl}e_{ij}m_k m_l + B_{ijkl}e_{ij}l_k l_l. \tag{5}$$

Вблизи фазового перехода АФ–ФМ это взаимодействие (вообще говоря, релятивистского происхождения) является более слабым, чем обменное МУ-взаимодействие, т.е.

$$|G_{ijkl}m_k m_l| \ll |G_{ij}m^2|, \quad |B_{ijkl}l_k l_l| \ll |B_{ij}| \tag{6}$$

при $ij = 11, 22, 33$. Об этом свидетельствует большое изменение объема $\Delta V/V_0$ при переходе АФ–ФМ (например, в соединениях $Mn_{1.88}Cr_{0.12}Sb$ [10] и FeRh [9] $\Delta V/V_0 \approx 0.1\%$).

Предположим, что внешнее магнитное поле $\mathbf{H}$ приложено в базисной плоскости. В этом случае равновесные векторы $m_0 \parallel \mathbf{H}$ и $\mathbf{l}_0 \perp \mathbf{H}$ также лежат в этой плоскости [1].

В дальнейшем удобно перейти к повернутой системе координат $\{a_i\}$, связанной с направлениями внешнего поля $\mathbf{H} \parallel a_1$ и вектора АФ $l_0 \parallel a_2$, а $\mathbf{C} \parallel a_3$, где $\mathbf{C}$ — главная ось кристалла. Эта система получается поворотом кристалло-физической (исходной) системы $\{a_i^0\}$ на угол φ_H вокруг оси $\mathbf{C} \parallel a_3$, где φ_H — угол между осью a_1^0 и полем $\mathbf{H}$.

Из условий минимума энергии $\partial F/\partial e^0_\alpha = 0$ и $\partial F/\partial m_0 = 0$ (с учетом (3)) следует, что равновесные значения деформации e^0_α и намагниченности m_0 определяются из равенств

$$e^0_\alpha = -S_{\alpha\beta}(PE_\beta + B_\beta + G_\beta m_0^2), \tag{7}$$

$$2(H_E - H_{me}m_0^2)m_0 = H. \tag{8}$$

Здесь $\hat{S} = \hat{C}^{-1}$ — тензор упругой податливости, E_β — тензор с компонентами $E_1 = E_2 = E_3 = 1$, H_E — эффективное обменное поле, перенормированное из-за МУ-взаимодействия и давления,

$$H_E = H_E^0 - \frac{1}{2M_0}S_{\alpha\beta}G_\alpha(PE_\beta + B_\beta), \tag{9}$$

$$H_{me} = \frac{1}{2M_0}S_{\alpha\beta}G_\alpha G_\beta. \tag{10}$$

При записи (7), (9) использованы сокращенные обозначения индексов: 11 — 1, 22 — 2, 33 — 3, 23 = 32 — 4, 13 = 31 — 5, 12 = 21 — 6. В дальнейшем индексы α, β, ν пробегают значения $1, 2, \ldots, 6$.

2. Амплитуды связанных колебаний

Перейдем теперь к установлению МУ-связи между амплитудами спиновых и упругих колебаний. Для этого используем уравнения Ландау–Лифшица

$$\dot{\tilde{\mathbf{m}}} = -\gamma\{[\mathbf{m}\mathbf{H}^{(m)}] + [\mathbf{l}\mathbf{H}^{(l)}]\},$$

$$\dot{\tilde{\mathbf{l}}} = -\gamma\{[\mathbf{m}\mathbf{H}^{(l)}] + [\mathbf{l}\mathbf{H}^{(m)}]\}, \tag{11}$$

где $\tilde{\mathbf{m}} = \mathbf{m} - \mathbf{m}_0$, $\tilde{\mathbf{l}} = (\mathbf{l} - \mathbf{l}_0)$ — отклонения этих векторов от их равновесных значений, γ — магнитомеханическое отношение, $\mathbf{H}^{(m)}$ и $\mathbf{H}^{(l)}$ — эффективные поля,

$$H_i^{(m)} = \frac{1}{2M_0}\left\{-\frac{\partial F}{\partial m_i} + \frac{\partial}{\partial a_k}\,\frac{\partial F}{\partial(\partial m_i/\partial a_k)}\right\},$$

$$H_i^{(l)} = \frac{1}{2M_0}\left\{-\frac{\partial F}{\partial l_i} + \frac{\partial}{\partial a_k}\,\frac{\partial F}{\partial(\partial l_i/\partial a_k)}\right\}. \tag{12}$$

Будем считать, что величины m_i, l_i изменяются по закону $\exp\{i(\mathbf{ka} - \omega t)\}$, где ω и $\mathbf{k}$ — частота и волновой вектор МУ-волн. Используя в уравнениях (11) выражение (1) для F, получим в линейном (L) приближении

$$\tilde{m}_1^L = \frac{m_0 l_0^2\gamma^2\big(H_A + \mu(k)\big)}{M_0(\omega^2 - \omega_{ak}^2)}G_\alpha\tilde{e}_\alpha,$$

$$\tilde{l}_2^L = -\frac{m_0}{l_0}\tilde{m}_1^L, \quad \tilde{l}_3^L = -\frac{i\omega\gamma m_0 l_0 G_\alpha\tilde{e}_\alpha}{M_0(\omega^2 - \omega_{ak}^2)}. \tag{13}$$

Здесь $\tilde{e}_\alpha$ — динамическая часть тензора деформации, ω_{ak} — собственные частоты спиновых колебаний, относящихся к "антиферромагнитной" моде [5]

$$\omega_{ak} = \gamma\big\{\big(H_A + \mu(k)\big)\big[2(H_E - H_{me}m_0^2)l_0^2$$

$$+ \mu(k)m_0^2 + \lambda(k)l_0^2\big]\big\}^{1/2},$$

где

$$\mu(k) \equiv \mu_{pq}k_p k_q, \quad \lambda(k) \equiv \lambda_{pq}k_p k_q. \tag{14}$$

Колебания переменных l_1, m_2, m_3, относящиеся к "квазиферромагнитной" моде ω_{fR} [5], не связаны с обменно-стрикционным взаимодействием. В отсутствие анизотропного МУ-взаимодействия ($F^A_{me} = 0$) эти переменные не зависят от упругих деформаций и поэтому в дальнейшем не рассматриваются.

При исследовании нелинейных магнитоакустических эффектов необходимо знать нелинейную зависимость $\tilde{m}_1$ от $\tilde{e}_\alpha$. Ее можно определить из уравнений (11) методом последовательных приближений, принимая за первое приближение соотношения (13).

В дальнейшем ограничимся областью малых k, в которой $\omega_{ak} \approx \omega_{a0}$, где $\omega_{a0} = l_0\gamma[2(H_E - H_{me}m_0^2)H_A]^{1/2}$ — частота активации спиновых колебаний, получаемая из (14) при $k = 0$ (частота АФМР). В этом случае нелинейная (NL) часть $\tilde{m}_1$ имеет вид

$$\tilde{m}_1^{NL} = \frac{\gamma^2\{l_0 H_A f_1(\omega) + (i\omega/\gamma) f_2(\omega)\}}{\omega^2 - \omega_{ak}^2}, \qquad (15)$$

где $f_{1,2}(\omega)$ — представления Фурье-величин,

$$f_1 = 2H_E \tilde{m}_1^L \tilde{l}_2^L + (l_0 \tilde{m}_1^L + m_0 \tilde{l}_2^L)\frac{G_\alpha}{M_0}\tilde{e}_\alpha, \;\; f_2 = H_A \tilde{l}_2^L \tilde{l}_3^L, \quad (16)$$

которые в силу МУ-связи (13) зависят от тензора деформации $\hat{\tilde{e}}$ квадратичным образом.

3. Динамические модули упругости второго порядка

Для АФ с МУ-связью уравнения движения для упругого смещения $\mathbf{u}$ имеют вид

$$\rho_0 \ddot{u}_i = \frac{\partial \tau_{ik}}{\partial a_k}, \quad \tau_{ik} = \sigma_{kp}\frac{\partial x_i}{\partial a_p}, \quad \sigma_{kp} = \frac{\partial F}{\partial e_{kp}}, \qquad (17)$$

где $\hat{\tau}$ — тензор Пиола–Кирхгофа, $\hat{\sigma}$ — тензор термодинамических напряжений [11]. Согласно (17) и (1),

$$\sigma_\alpha = \sigma_\alpha^e + \sigma_\alpha^{me}, \quad \sigma_\alpha^e = PE_\alpha + C_{\alpha\beta}e_\beta + \frac{1}{2}C_{\alpha\beta\gamma}e_\beta e_\gamma,$$

$$\sigma_\alpha^{me} = B_\alpha + G_\alpha m^2. \qquad (18)$$

Здесь $\hat{\sigma}^e$ и $\hat{\sigma}^{me}$ — упругая и магнитострикционная части тензора $\hat{\sigma}$.

Используя в (18) соотношения МУ-связи (13), представим динамическую часть тензора $\hat{\sigma}$ в виде

$$\tilde{\sigma}_\alpha^L = C_{\alpha\beta}^{\mathrm{ef}}\tilde{e}_\beta, \quad C_{\alpha\beta}^{\mathrm{ef}} = C_{\alpha\beta}(\hat{e}^0) + \Delta C_{\alpha\beta}(\omega),$$

$$C_{\alpha\beta}(\hat{e}^0) = C_{\alpha\beta} + C_{\alpha\beta\gamma}e_\gamma^0,$$

$$\Delta C_{\alpha\beta}(\omega) = \frac{2m_0^2 l_0^2\gamma^2\big(H_A + \mu(k)\big)}{M_0(\omega^2 - \omega_{ak}^2)}G_\alpha G_\beta, \qquad (19)$$

где $C_{\alpha\beta}^{\mathrm{ef}}$ — тензор эффективных модулей упругости второго порядка, $\Delta C_{\alpha\beta}$ — динамические модули, обусловленные МУ-взаимодействием спиновых и упругих колебаний, амплитуды которых связаны соотношением (13).

4. Эффекты смешивания частот

Нелинейная часть тензора напряжений

$$\tilde{\sigma}_\alpha^{NL} = \frac{1}{2}C_{\alpha\beta\gamma}\tilde{e}_\beta\tilde{e}_\gamma + 2G_\alpha m_0\tilde{m}_1^{NL} + G_\alpha(\tilde{m}_1^L)^2, \qquad (20)$$

согласно (13), (15), связана с тензором деформации $\tilde{e}_\alpha$ квадратичной зависимостью. Такая нелинейная связь между упругим напряжением и деформациями приводит к смешиванию частот звуковых колебаний [12], а именно: в результате взаимодействия двух колебаний с частотами ω_1 и ω_2 образуются нелинейные волны с комбинационными частотами $\omega_2 \pm \omega_1$ или удвоенной частоты $2\omega_1$, $2\omega_2$.

Каждому из этих эффектов соответствует определенное значение термодинамического напряжения $\tilde{\sigma}_\alpha^{NL}$ (20). Чтобы определить эти значения, представим упругое смещение в виде суммы двух колебаний

$$\tilde{\mathbf{u}} = \frac{1}{2}\left\{\sum_{n=1}^{2}\tilde{\mathbf{u}}^{(n)}(\mathbf{a})\exp[i(\mathbf{k}^{(n)}\mathbf{a} - \omega_n t)] + \mathrm{c.c}\right\}, \qquad (21)$$

где $k^{(n)}$ — волновые числа на частоте ω_n $(n = 1, 2)$.

Учитывая в (20) выражения (4), (13), (15), (21), находим

$$\tilde{\sigma}_\alpha^{NL} = \frac{1}{2}\left\{\sigma_\alpha(0) + \sum_{\nu=1}^{4}\sigma_\alpha(\Omega_\nu)\exp(-i\Omega_\nu t) + \mathrm{c.c}\right\}. \quad (22)$$

Здесь введены обозначения

$$\Omega_1 = 2\omega_1, \quad \Omega_2 = 2\omega_2, \quad \Omega_3 = \omega_1 + \omega_2, \quad \Omega_4 = \omega_2 - \omega_1,$$

$$\sigma_\alpha(0) = \frac{1}{4}\Big\{C_{\alpha\beta\gamma}^{\mathrm{ef}}(0;\,\omega_1, -\omega_1)e_\beta^{(1)}e_\gamma^{(1)*}$$
$$+\, C_{\alpha\beta\gamma}^{\mathrm{ef}}(0;\,\omega_2, -\omega_2)e_\beta^{(2)}e_\gamma^{(2)*}\Big\},$$

$$\sigma_\alpha(\Omega_1) = \frac{1}{4}C_{\alpha\beta\gamma}^{\mathrm{ef}}(\Omega_1;\,\omega_1,\,\omega_1)e_\beta^{(1)}e_\gamma^{(1)},$$

$$\sigma_\alpha(\Omega_2) = \frac{1}{4}C_{\alpha\beta\gamma}^{\mathrm{ef}}(\Omega_2;\,\omega_2,\,\omega_2)e_\beta^{(2)}e_\gamma^{(2)},$$

$$\sigma_\alpha(\Omega_3) = \frac{1}{4}C_{\alpha\beta\gamma}^{\mathrm{ef}}(\Omega_3;\,\omega_2,\,\omega_1)(e_\beta^{(1)}e_\gamma^{(2)} + e_\beta^{(2)}e_\gamma^{(1)}),$$

$$\sigma_\alpha(\Omega_4) = \frac{1}{4}C_{\alpha\beta\gamma}^{\mathrm{ef}}(\Omega_4;\,\omega_2, -\omega_1)(e_\beta^{(2)}e_\gamma^{(1)*} + e_\beta^{(1)*}e_\gamma^{(2)}). \qquad (23)$$

Соотношения (22), (23) записаны в квадратичном приближении по тензору дисторсии $\tilde{a}_{i,j}^{(n)} = \partial\tilde{u}_i^{(n)}/\partial a_j$, поэтому тензор деформации $e_\alpha^{(n)}$ линейно зависит от $\tilde{u}_{i,j}^{(n)}$

$$e_\alpha^{(n)} = \tilde{e}_\alpha^{(n)}\exp(i\mathbf{k}^{(n)}\mathbf{a}),\; \tilde{e}_{ij}^{(n)} = \frac{1}{2}(\tilde{u}_{i,j}^{(n)} + \tilde{u}_{j,i}^{(n)}),\; n = 1,\, 2. \qquad (24)$$

В (23) $\sigma_\alpha(0)$ — напряжения, соответствующие обращению частоты в нуль, $\sigma_\alpha(\omega_2 \pm \omega_1)$ и $\sigma_\alpha(2\omega_{1,2})$ — напряжения, возникающие в процессах генерации волн с комбинационными частотами и удвоенной частоты, а $C_{\alpha\beta\gamma}^{\mathrm{ef}}$ — эффективные модули упругости третьего порядка, определяемые из формул

$$C_{\alpha\beta\gamma}^{\mathrm{ef}}(\Omega;\,\omega_n,\omega_p) = C_{\alpha\beta\gamma} + \Delta C_{\alpha\beta\gamma}(\Omega;\,\omega_n,\omega_p),$$

$$\Delta C_{\alpha\beta\gamma}(\Omega;\,\omega_n,\omega_p)$$
$$= \frac{2\gamma^4 m_0^2 l_0^2 H_A^2\{2(l_0^2 - m_0^2)(\omega_n^2 + \omega_p^2 + \omega_n\omega_p) - 3l_0^2\omega_{a0}^2\}}{M_0^2(\omega_n^2 - \omega_{a0}^2)(\omega_p^2 - \omega_{a0}^2)(\Omega^2 - \omega_{a0}^2)}$$
$$\times G_\alpha G_\beta G_\gamma, \qquad (25)$$

где $\Omega = \omega_n + \omega_p$, $n,\, p = 1,\, 2$, $\Delta C_{\alpha\beta\gamma}(\Omega;\,\omega_n,\omega_p)$ — динамические модули упругости третьего порядка, описывающие МУ-вклад в указанные выше эффекты преобразования частоты.

5. Генерация продольных вторых звуковых гармоник

Рассмотрим влияние МУ-взаимодействий на генерацию вторых гармоник продольных звуковых волн. Предположим, что амплитуды гармоник в (21) являются медленно меняющимися функциями координат

$$\left|\frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{u}}^{(n)}}{\partial a_i \partial a_j}\right| \ll k_i^{(n)} \left|\frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}^{(n)}}{\partial a_j}\right| \ll k_i^{(n)} k_j^{(n)} |\tilde{\mathbf{u}}^{(n)}|. \qquad (26)$$

Пусть продольная волна упругого смещения $\mathbf{u}\{0,\ 0,\ u\}$ распространяется вдоль кристаллографической оси a_3: $\mathbf{k} \parallel \mathbf{c} \parallel a_3$. Учитывая в уравнениях движения (17) соотношения (4), (19), (21)–(26) при $\omega_1 = \omega$, $\omega_2 = 2\omega$, получим следующие уравнения для амплитуд звуковых гармоник:

$$\frac{d\tilde{u}^{(1)}}{da} = -\Lambda_1 \tilde{u}^{(1)*} \tilde{u}^{(2)} \exp(-i\Delta ka),$$

$$\frac{d\tilde{u}^{(2)}}{da} = \Lambda_2 (\tilde{u}^{(1)})^2 \exp(i\Delta ka). \qquad (27)$$

Здесь $a \equiv a_3$, $\Delta k = 2k^{(1)} - k^{(2)}$, $k^{(1,2)} = k_3^{(1,2)}$ — волновые числа на частотах ω и 2ω, $\Lambda_1 = k^{(2)}(k^{(2)} - k^{(1)})\Pi_1/4$, $\Lambda_2 = (k^{(1)})^3 \Pi_2 / 4k^{(2)}$ — коэффициенты, связанные с параметром нелинейного взаимодействия

$$\Pi_n = \frac{C_{333}^{\text{ef}} + 2C_{33}^{\text{ef}}(\omega) + C_{33}^{\text{ef}}(2\omega)}{C_{33}^{\text{ef}}(n\omega)}, \quad n = 1,\ 2, \qquad (28)$$

где $C_{33}^{\text{ef}}(\omega)$ и $C_{333}^{\text{ef}} \equiv C_{333}^{\text{ef}}(\omega;\ 2\omega,\ -\omega) = C_{333}^{\text{ef}}(2\omega;\ \omega,\ \omega)$ — эффективные модули, определенные (19) и (25).

При получении (27) использовалось дисперсионное уравнение

$$k^{(n)} = \frac{n\omega}{v_l^{(n)}}, \quad v_l^{(n)} = v_l^0 \left[1 - \frac{\Delta C_{33}(n\omega)}{C_{33}(\hat{e}^0)}\right]^{1/2}, \qquad (29)$$

где $v_l^{(n)}$ — фазовая скорость продольных волн на частоте $n\omega$ $(n = 1,\ 2)$, $v_l^0 = \left(C_{33}(\hat{e}^0)/\rho_0\right)^{1/2}$ — их скорость в отсутствие динамической МУ-связи.

Для решения уравнений (27) представим комплексные амплитуды в виде $\tilde{u}^{(n)}(a) = r_n(a)\exp\{i\varphi_n(a)\}$. При граничном условии $r_2(0) = 0$ имеем

$$r_1 = r_1(0)\{1 - \varkappa sn^2(w,\ \varkappa)\}^{1/2},$$

$$r_2 = r_1(0)\left(\varkappa \frac{\Lambda_2}{\Lambda_1}\right)^{1/2} sn(w,\ \varkappa),$$

$$\cos\theta = \frac{r_1^2(0)}{r_1^2(a)} cn(w,\ \varkappa) dn(w,\ \varkappa). \qquad (30)$$

Здесь $\theta = 2\varphi_1 - \varphi_2 + \Delta ka$, sn, cn, dn — эллиптические функции Якоби, в которых $w = a/d\varkappa^{1/2}$, $\varkappa = [1 + (d\Delta k/4)^2]^{1/2} - d\Delta k/4$, $d^{-1} = r_1(0)(\Lambda_1\Lambda_2)^{1/2}$.

В области низких частот $\omega^2 \ll \omega_{ak}^2 \approx \omega_{a0}^2$ волны основной частоты и второй гармоники имеют одинаковые скорости $(v_l^{(1)} = v_l^{(2)})$, поэтому $\Delta k = 0$. В этом случае $\Lambda_1 = 4\Lambda_2$, $\varkappa = 1$ и решения (30) принимают вид

$$r_1 = r_1(0)\text{sch}(a/\xi),\ r_2 = \frac{1}{2} r_1(0)\text{th}(a/\xi),\ \theta = 0. \quad (31)$$

Здесь $\xi = 2\Lambda_2 r_1(0)$ — характеристическая длина нелинейного взаимодействия. На этом расстоянии около 60% акустической мощности преобразуется во вторую гармонику.

При учете затухания МУ-волн уравнение для амплитуды второй гармоники в (27) преобразуется в следующее [13]:

$$\frac{d\tilde{u}^{(2)}}{da} + \Gamma_2 \tilde{u}^{(2)} = \Lambda_2 (\tilde{u}^{(1)})^2 \exp(i\Delta ka), \qquad (32)$$

где $\Gamma_n = \Gamma(n\omega)$ — коэффициент затухания волн на частоте $n\omega$ $(n = 1,\ 2)$.

Запишем амплитуды гармоник в виде $\tilde{u}^{(n)} = r_n(a)\exp\{-\Gamma_n a + i\varphi_n a\}$. В приближении заданного поля $\tilde{u}^{(1)} = r_1(0)\exp\{-\Gamma_1 a + i\varphi_1(0)\}$ зависимость амплитуды второй гармоники от расстояния с учетом затухания определяется из соотношения

$$R_2 = r_2 \exp(-\Gamma_2 a)$$
$$= \frac{\Lambda_2 r_1^2(0)\exp(-\Gamma_2 a)}{[(\Gamma_2 - 2\Gamma_1)^2 + (\Delta k)^2]^{1/2}}$$
$$\times \Big\{ \big(\exp[(\Gamma_2 - 2\Gamma_1)a] - \cos\Delta ka\big)^2$$
$$+ \sin^2 \Delta ka \Big\}^{1/2}. \qquad (33)$$

При точном согласовании фазовых скоростей волн $(\Delta k = 0,\ \Gamma_2 = 4\Gamma_1)$ максимальное значение второй гармоники

$$\left|\frac{\max R_2}{r_1(0)}\right| = \frac{1}{32} Q\Pi_0 \varepsilon_0 \qquad (34)$$

достигается на расстоянии $a_0 = \ln 2/2\Gamma_1$. Здесь Π_0 — значение Π_2 (28) при $\omega^2 \ll \omega_{a0}^2$, $Q = k^{(1)}/2\Gamma^{(1)}$ — добротность, а $\varepsilon_0 = k^{(1)} r_1(0)$ — амплитуда деформации волны накачки $\tilde{u}^{(1)}$.

Выше исследовалась генерация вторых гармоник при $\mathbf{k} \parallel \mathbf{C} \perp \mathbf{H}$. В случае распространения волн вдоль координатных осей $a_1^0(\mathbf{k} \parallel \mathbf{H} \parallel a_1^0)$ или $a_2^0(\mathbf{k} \parallel \mathbf{l}_0 \parallel a_2^0)$ исходной (кристаллофизической) системы координат полученные результаты (30), (31), (33) также справедливы при замене модулей упругости C_{33}^{ef} и C_{333}^{ef} на C_{11}^{ef} и C_{111}^{ef} или на C_{22}^{ef} и C_{222}^{ef}, определяемые по формулам (19) и (25).

6. Обсуждение результатов

Обменное МУ-взаимодействие связано с изменением объема $\Delta V/V_0 = e_{ii}$ кристалла, поэтому создаваемый им дополнительный ангармонизм отражается в нелинейных взаимодействиях продольных упругих волн, приводящих к магнитоакустическим эффектам преобразования частоты этих волн. В трехчастотных процессах взаимодействия волн с частотами ω_1 и ω_2 образуются нелинейные волны с комбинационными частотами $\omega_2 \pm \omega_1$ или удвоенной частоты $2\omega_1$, $2\omega_2$. Вклад обменно-стрикционного взаимодействия в эти процессы описывается динамическими модулями упругости $\Delta C_{\alpha\beta\gamma}$ (25), зависящими от частоты волн, а также от величины относительной намагниченности m_0.

Вблизи магнитного фазового перехода происходит усиление вклада $\Delta C_{\alpha\beta}$ (19) и $\Delta C_{\alpha\beta\gamma}$ (25) в эффективные модули упругости $\hat{C}^{\text{ef}}$. Усиление $\Delta\hat{C}$ обусловлено [5] уменьшением эффективного обменного поля H_E до критического значения $(H_E)_{\text{cr}} = 3(H^2 H_{me}/16)^{1/3}$ при $T = T_{\text{AF}}$, где T_{AF} — температура потери устойчивости антиферромагнитной фазы, а H_{me} — МУ-поле, определенное (10). Из-за убывания H_E вблизи переходов АФ–ФМ, во-первых, возрастает относительная намагниченность m_0 (при $T = T_{\text{AF}}$ $m_0 = m^0_{\text{cr}} = (3H/4H_E) \lesssim 1$) и, во-вторых, уменьшается собственная частота $\omega_{ak} \approx \omega_{a0} = l_0\gamma(HH_A/m_0)^{1/2}$ спиновых колебаний "антиферромагнитной" моды. Оба эти фактора при постоянном поле H приводят к усилению модулей $\Delta\hat{C}$ в окрестности температуры T_{AF}, а следовательно, и к возрастанию эффективности нелинейных процессов, связанных с этими модулями.

В области низких частот $\omega^2 \ll \omega^2_{ak} \approx \omega^2_{a0}$ выражения (19) и (25) для динамических модулей $\Delta\hat{C}$ упрощаются

$$\Delta C_{\alpha\beta} = -\frac{2m_0^3 G_\alpha G_\beta}{M_0 H}, \quad \Delta C_{\alpha\beta\gamma} = \frac{6m_0^4 G_\alpha G_\beta G_\gamma}{M_0^2 H^2}. \quad (35)$$

Обменно-стрикционные константы G_α, определяющие величину $\Delta\hat{C}$, могут иметь значения порядка $10^8\,\text{N/m}^2$. Например, для соединения $Mn_{1.88}Cr_{0.12}Sb$, у которого температура перехода $T_s = 316\,\text{K}$ [10], константы $G_1 = G_2 \approx 0.8\cdot 10^8\,\text{N/m}^2$, $G_3 \approx -2\cdot 10^8\,\text{N/m}^2$ [5]. Оценки, проведенные для этого соединения при $T = 303\,\text{K}$, $H = 8\cdot 10^4\,\text{A/m}$, с использованием экспериментальных данных $m_0(T, H) \approx 0.34$ [10], $M_0 \approx 8.2\cdot 10^{-3}\,\text{T}$ [14] дают $\Delta C_{11} = \Delta C_{22} = -8\cdot 10^{10}\,\text{N/m}^2$, $\Delta C_{111} = \Delta C_{222} = 9\cdot 10^{14}\,\text{N/m}^2$, тогда как $C_{11} = C_{22} = 9.9\cdot 10^{10}\,\text{N/m}^2$ [10]. При таких значениях $\Delta\hat{C}$ максимальный выход второй гармоники при $\mathbf{k} \parallel a^0_1$ (или $\mathbf{k} \parallel a^0_2$) определяется из соотношения

$$\left|\frac{\max R_2}{r_1(0)}\right| \approx 10^3 Q\varepsilon_0. \quad (36)$$

Таким образом, при добротности волн $Q \approx 10^2 - 10^3$ и амплитуде деформации $\varepsilon_0 \approx 10^{-6}$ выход второй гармоники в сплаве $Mn_{1.88}Cr_{0.12}Sb$ может составлять вблизи перехода АФ–ФМ десятки процентов, а вдали от перехода ($\Delta\hat{C} = 0$) он составляет всего доли процента.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 96-02-16489).

Список литературы

[1] В.И. Ожогин, В.Л. Преображенский. УФН **155**, *4*, 593 (1988).
[2] И.Ф. Мирсаев, В.В. Меньшенин, Е.А. Туров. ФТТ **28**, *8*, 2428 (1986).
[3] Е.А. Туров. Кинетические, оптические и акустические свойства антиферромагнетиков. Изд-во УрО АН СССР, Свердловск (1990). 136 с.
[4] И.Ф. Мирсаев. ФТТ **36**, *8*, 2430 (1994).
[5] И.Ф. Мирсаев, Е.А. Туров. ФММ **81**, *4*, 68 (1996).
[6] И.Ф. Мирсаев, Е.А. Туров. ФММ **82**, *1*, 4 (1996).
[7] Е.А. Туров. ЖЭТФ **96**, *6*, 2140 (1989).
[8] Н.П. Гражданкина. УФН **96**, *2*, 291 (1968).
[9] Э.А. Завадский, В.И. Вальков. Магнитные фазовые переходы. Наук. думка, Киев (1980). 196 с.
[10] Н.П. Гражданкина, А.М. Бурханов, Ю.С. Берсенев, Р.И. Зайнуллина, Г.А. Матвеев. ЖЭТФ **58**, *4*, 1178 (1970).
[11] Физическая акустика / Под ред. У. Мэзона. Мир, М. (1966). Т. 1. Ч. *А*. 592 с.
[12] Л.К. Зарембо, В.А. Красильников. УФН **102**, *4*, 549 (1970).
[13] Н. Бломберген. Нелинейная оптика. Мир, М. (1966). 424 с.
[14] T.J. Swoboda, W.H. Cloud, T.A. Bither, M.S. Sadler, H.S. Jarrett. Phys. Rev. Lett. **4**, *10*, 509 (1960).