

01

## Локализация нелинейной волны переключения в активной бистабильной среде с уединенной неоднородностью

© С.В. Петровский

Институт океанологии им. П.П. Ширшова РАН,  
117851 Москва, Россия

(Поступило в Редакцию 16 декабря 1994 г. В окончательной редакции 26 апреля 1996 г.)

Рассматривается одномерное распространение волны переключения в активной среде в том случае, когда один из параметров среды является функцией координаты внутри некоторой области, оставаясь постоянным вне ее. Исследуется возможность локализации (остановки) волны на неоднородности такого типа. Получено аналитическое выражение для величины сдвига волны в случае неоднородности малой амплитуды. Для неоднородности конечных размеров получены условия на амплитуду и протяженность неоднородности, при которых происходит локализация.

### Введение

Рассмотрению различных аспектов динамики нелинейных волн в активных диссипативных средах посвящено большое количество работ (см., например, [1–7]). Подробное математическое исследование волновых режимов в связи с задачами распространения пламени проведено в монографии [8]. Общие вопросы волновой динамики диссипативных сред различной физической природы рассмотрены в [9–11].

Большинство работ связано с исследованием распространения нелинейных волн в пространственно-однородных средах. Возникает вопрос, в какой степени неоднородность, всегда в той или иной степени присутствующая в реальных системах, может изменять характер динамики. В работе [11] было показано, что точечная неоднородность может приводить к локализации (остановке) волны. В данной работе рассматривается распространение нелинейной волны переключения в активной среде при наличии уединенной неоднородности конечного размера. Показано, что если амплитуда неоднородности невелика, то наличие неоднородного участка приводит только к сдвигу положения волны, выражение для величины сдвига получено в первом порядке теории возмущений. Напротив, при достаточно больших (но конечных) значениях амплитуды неоднородность даже малой протяженности может приводить к остановке волны. Для бистабильной среды с произвольной нелинейностью получены аналитические выражения, описывающие связь между амплитудой и протяженностью неоднородности критического масштаба. Результаты обнаруживают хорошее согласие с данными численных экспериментов.

### Постановка задачи

Во многих физически различных случаях процесс распространения волны в активной среде может быть описан одним уравнением [8–10]

$$\partial_t u = D \partial_{xx}^2 u + f(u). \quad (1)$$

Здесь  $u$  — величина, описывающая состояние среды (например, температура);  $D$  — коэффициент теплопроводности или диффузии;  $x$  — координата;  $t$  — время; функция  $f(u) = -\alpha u + f_1(u)$  описывает кинетику активной среды (типичный вид  $f(u)$  показан на рис. 1, а), где слагаемое  $-\alpha u$  в случае тепловых волн описывает теплопотери, а величина  $\alpha$  зависит, вообще говоря, от координат.

Рассмотрим сначала однородную среду  $\alpha(x) \equiv \alpha_0 = \text{const}$ . Описание процесса с помощью уравнения (1) соответствует в этом случае модели бистабильной среды [10]: вид функции  $f(u)$  допускает (при некоторых ограничениях на значения коэффициента  $\alpha_0$ ) существование в системе трех однородных стационарных состояний  $u = u_2$ ,  $u = u_1$ ,  $u = u_0$ , из которых промежуточное является неустойчивым относительно малых возмущений. Заметим, что величина  $u_2 - u_0$  является естественным масштабным параметром для функции  $u(x, t)$ : при линейном преобразовании зависимой переменной  $\tilde{u} = (u - u_0)/(u_2 - u_0)$ , оставляющем неизменным вид уравнения (1), имеем  $\tilde{u}_0 = 0$ ,  $\tilde{u}_2 = 1$ . Поэтому далее всюду полагаем  $u_0 = 0$ ,  $u_2 = 1$ .

Определим стандартным образом безразмерные переменные  $x' = x(D/\alpha_0)^{-1/2}$ ,  $t' = t\alpha_0$  (далее штрихи опускаются). Уравнение (1) принимает вид

$$\partial_t u = \partial_{xx}^2 u + F(u), \quad (2)$$

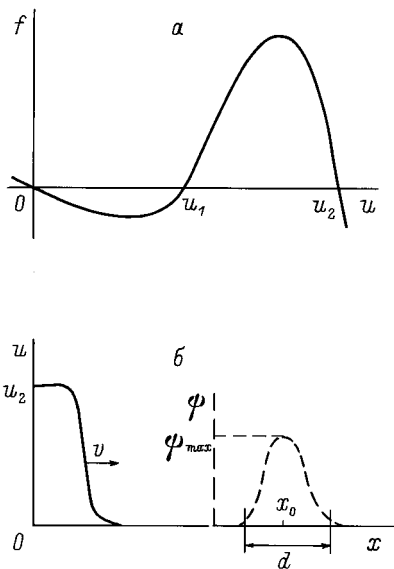
где  $F(u) = -u + (1/\alpha_0)f_1(u)$ .

Хорошо известно [1,2,8–10], что при граничных условиях

$$u(x \rightarrow -\infty, t) = 1, \quad u(x \rightarrow \infty, t) = 0. \quad (3)$$

и переходных начальных условиях решение уравнения (2) при достаточно больших временах представляет собой апериодическую стационарную "волну переключения". Профиль волны описывается следующим уравнением:

$$\Theta''(\xi) + v\Theta'(\xi) + F(\Theta) = 0 \quad (4)$$



**Рис. 1.** Типичный вид функции  $f(u)$  (а) и схема распространения волны в бистабильной среде с уединенной неоднородностью (б).

(где  $\xi = x - vt$ ,  $v$  — скорость волны) с соответствующими условиями на бесконечности

$$\Theta(\xi \rightarrow -\infty) = 1, \quad \Theta(\xi \rightarrow \infty) = 0. \quad (5)$$

Решение нелинейной задачи (4), (5) существует не при любых значениях скорости  $v$  [1,3,5]. Величина скорости волны определяется именно из условия существования решения, являясь собственным значением краевой задачи [1,5,8]. Структура спектра собственных значений определяется видом нелинейности  $F$ .

Для произвольной нелинейности явное решение уравнения стационарной волны (4) неизвестно. Достаточно подробно исследован случай, когда функция  $F(u)$  является полиномом третьей степени. В работах [12,13] получено специальное двухфазное решение диффузионно-реакционного уравнения (2) с кубической нелинейностью, которое в пределе больших времен описывает профиль стационарной волны в виде кинка. В [14,15] найден широкий класс решений стационарного уравнения (4), выражающихся через функцию Вейерштрасса.

При произвольном виде функции  $F(\Theta)$  нетрудно получить асимптотическое представление решения задачи (4)–(5) при  $\xi \rightarrow \pm\infty$ , т.е. для любого конечного значения координаты  $x$  при  $t \rightarrow \mp\infty$ . Действительно, пусть  $t \rightarrow +\infty$ . В этом случае для стационарной волны имеем  $u(x, t) \rightarrow u_2 = 1$  для любого конечного  $x$ , и  $F(u) \simeq -\beta(u - 1)$ , где  $\beta = -F'(u = 1) > 0$ . Таким образом, уравнение (4) становится линейным

$$\Theta''(\xi) + v\Theta'(\xi) - \beta(\Theta - 1) \simeq 0, \quad (6)$$

и его решение (учитывая условие ограниченности при  $\xi \rightarrow -\infty$ ) имеет вид

$$\Theta(\xi) \simeq 1 - \exp[\mu(\xi + \Delta)], \quad (7)$$

где  $\mu = 0.5((v^2 + 4\beta)^{1/2} - v)$ ,  $\Delta$  — произвольная постоянная.

Аналогично при  $t \rightarrow -\infty$  из (4) имеем уравнение

$$\Theta''(\xi) + v\Theta'(\xi) - \alpha\Theta \simeq 0, \quad (8)$$

его решение

$$\Theta(\xi) \simeq \exp[-\lambda(\xi + \Delta)], \quad (9)$$

где  $\lambda = 0.5((v^2 + 4\alpha)^{1/2} + v)$ ,  $\alpha = -F(u = u_0 = 0) > 0$ ,  $\Delta$  — произвольная постоянная, вообще говоря, отличная от содержащейся в (7).

В неоднородной среде распространение волны, вообще говоря, не является стационарным. Ограничимся здесь рассмотрением случая "уединенной неоднородности": зависимость  $\alpha(x)$  имеет вид

$$\alpha(x) = \alpha_0(1 + \Psi(x)), \quad (10)$$

где функция  $\Psi(x)$  финитна. Ее поведение будем характеризовать двумя величинами: амплитудой неоднородности  $\Psi_{\max}$  и эффективной протяженностью  $d$  (см. рис. 1, б).

В координатах бегущей волны уравнение (2) вместе с (10) принимает вид

$$\partial_t u - v\partial_\xi u = \partial_\xi^2 u + F(u) - \Psi(x + vt)u, \quad (11)$$

где  $v$  — скорость волны в соответствующей однородной среде, т.е. при  $\Psi(x) \equiv 0$ .

Будем считать, что фронт волны сформировался на большом расстоянии от неоднородного участка. Тогда начальное условие для уравнения (11) имеет вид

$$u(\xi, t \rightarrow -\infty) = \Theta(\xi), \quad (12)$$

где  $\Theta(\xi)$  описывает волну в однородной среде, т.е. является решением стационарного уравнения (4).

Целью данной работы является исследование проблемы, как наличие уединенной неоднородности влияет (при различных значениях параметров) на распространение волны.

### Неоднородность малой амплитуды

Очевидно, что при достаточно малых значениях амплитуды неоднородности  $\Psi_{\max}$  волна преодолевает неоднородный участок и со временем (по мере удаления от области неоднородности) форма фронта восстанавливается. Единственно, к чему может приводить наличие неоднородности — это к сдвигу в положении волны.

Таким образом, в этом случае

$$u(\xi, t \rightarrow +\infty) = \Theta(\xi + \delta), \quad (13)$$

где  $\delta$  — величина сдвига, зависящая от параметров задачи.

В том случае, если  $\Psi_{\max} = \varepsilon \ll 1$ , для  $\delta$  можно получить явное выражение.

Обозначая  $\Psi(\xi + vt) = \varepsilon\phi(\xi + vt)$  и подставляя в (11), ищем решение в виде возмущения стационарной волны

$$u(\xi, t) = \Theta(\xi) + \varepsilon w(\xi, t) + \mathbf{0}(\varepsilon). \quad (14)$$

В 1-м порядке по  $\varepsilon$  для  $w(\xi, t)$  возникает уравнение

$$\partial_t w - v\partial_\xi w = \partial_{\xi\xi}^2 w + F'[\Theta(\xi)]w - \Theta(\xi)\phi(x + vt) \quad (15)$$

с краевыми условиями

$$w(\xi \rightarrow \pm\infty, t) = 0, \quad w(\xi, t \rightarrow -\infty) = 0. \quad (16)$$

Используя результаты работы [6], разложим  $w(\xi, t)$  по полной системе собственных функций краевой задачи для уравнения малых возмущений волны в однородной среде

$$w(\xi, t) = \sum_{i=0}^{\infty} G_i(t)\Phi_i(\xi), \quad (17)$$

где  $\Phi_i(\xi)$  является решением следующей задачи:

$$\Phi_i''(\xi) + v\Phi_i'(\xi) + F'[\theta(\xi)]\Phi_i(\xi) = -\lambda_i\Phi_i(\xi), \quad (18)$$

$$\Phi_i(\xi \rightarrow \pm\infty) = 0 \quad (i = 0, 1, 2, \dots).$$

Следует заметить, что задача Штурма–Лиувилля (18), вообще говоря, не тождественна рассмотренной в [6]. Отличие заключается в том, что в данном случае  $F(\Theta)$  не является положительно определенной, что допускает в принципе существование немонотонных решений у уравнения (4). Можно показать, однако, следуя [6], что немонотонные решения не являются устойчивыми относительно малых возмущений и, таким образом, не могут являться промежуточно-асимптотическим пределом для какого-либо класса начальных условий. Ограничивая рассмотрение физически осмысленными волнами с монотонным профилем, сделанные в [6], выводы о свойствах собственных значений и собственных функций можно перенести на задачу (18) без изменений.

Подставляя (17) в (15), с учетом (18) получаем

$$\sum_{i=0}^{\infty} G_i'(t)\Phi_i(\xi) = - \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i G_i(t)\Phi_i(\xi) - \Theta(\xi)\phi(\xi + vt). \quad (19)$$

Умножая (19) скалярно на  $\Phi_k(\xi)$ , приходим к уравнению

$$G_k'(t) + \lambda_k G_k(t) + h_k(t) = 0 \quad (20)$$

с дополнительным условием  $G_k(t \rightarrow -\infty) = 0$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ), где

$$h_k(t) = \|\Phi_k\|^{-2} \int_{-\infty}^{\infty} \Theta(\xi)\phi(\xi + vt)\Phi_k(\xi)d\xi \quad (21)$$

$$\text{и } \|\Phi_k\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_k^2(\xi)d\xi.$$

Решение уравнения (20) имеет вид

$$G_k(t) = - \int_{-\infty}^{\infty} h_k(\tau) \exp[-\lambda_k(t - \tau)]d\tau. \quad (22)$$

Нетрудно убедиться, что для любого  $k \geq 1$   $G_k(t \rightarrow \infty) = 0$ . Действительно, как показано в [6], наименьшее собственное значение задачи (18)  $\lambda_0 = 0$ , и  $\lambda_k > 0$  при  $k \geq 1$ . Далее, обозначая через  $t_0$  момент времени, соответствующий прохождению волны через неоднородность, и учитывая, что функция  $\phi(\xi + vt) = \phi(x)$  локализована вблизи некоторого  $x = x_0$ , для интеграла (22) можно записать

$$G_k(t) = h_k(t_0) \exp[-\lambda_k(t - t_0)]\Delta t, \quad (23)$$

где  $\Delta t$  — время, затрачиваемое волной на прохождение неоднородности. Очевидно, что  $\Delta t$  конечно,  $\Delta t \rightarrow (v/\Delta x)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Отсюда  $G_k(t \rightarrow \infty) = 0$  при всех  $k \geq 1$ .

Таким образом, из (14), (17), (22) получаем

$$u(\xi, t \rightarrow \infty) \cong \Theta(\xi) + \varepsilon g_0\Phi_0(\xi), \quad (24)$$

где обозначено

$$g_0 = G_0(t \rightarrow \infty) = - \int_{-\infty}^{\infty} h_0(t)dt, \quad (25)$$

т.е. с учетом (13)

$$\Theta(\xi + \delta) \cong \theta(\xi) + \varepsilon g_0\Theta'(\xi) \quad (26)$$

(поскольку  $\Phi_0(\xi) = \Theta'(\xi)$  [6]). Отсюда  $\delta = \varepsilon g_0$ .

Далее, подставляя (21) в (25), меняя порядок интегрирования и обозначая  $B \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x)dx$  (где интегрирование фактически проводится по промежутку финитности функции  $\Psi$ ), имеем

$$g_0 = (B/2\varepsilon v \|\Phi_0\|^2)[\Theta^2(-\infty) - \Theta^2(\infty)] \quad (27)$$

или с учетом краевых условий (5)

$$\delta = (B/2) \left( v \int_{-\infty}^{\infty} [\Theta'(\xi)]^2 d\xi \right)^{-1}. \quad (28)$$

Принимая во внимание вид уравнения (4), нетрудно показать, что

$$v \int_{-\infty}^{\infty} [\Theta'(\xi)]^2 d\xi = \int_0^1 F(\Theta)d\Theta \equiv M. \quad (29)$$

Окончательное выражение для величины сдвига

$$\delta = B/2M. \quad (30)$$

Отметим, что формула (30) получена без каких-либо специальных предположений о кинетике среды, т.е. о виде функции  $f_1(u)$ , и для неоднородности  $\Psi(x)$  произвольной формы.

### Локализация волны: результаты численного моделирования

Полученные выше результаты не дают ответа на наиболее интересный вопрос о возможности локализации волны на уединенной неоднородности. При малых значениях амплитуды неоднородности  $\Psi_{\max}$  локализация отсутствует; выражение (30) не описывает никаких критических явлений: монотонно возрастая, величина сдвига волны остается конечной для любых конечных значений параметров неоднородности.

С другой стороны, возможность локализации на сингулярных неоднородностях бесконечно большой амплитуды была показана в [11]. Таким образом, различным предельным значениям  $\Psi_{\max}$  отвечают различные типы динамики системы. Следовательно, можно ожидать, что для каждого значения протяженности  $d$  существует некоторая критическая величина амплитуды неоднородности  $\Psi_{cr}$ , такая что при  $\Psi_{\max} > \Psi_{cr}$  волна останавливается, при  $\Psi_{\max} < \Psi_{cr}$  волна проходит.

Эти качественные выводы подтверждаются результатами компьютерных экспериментов. Ограничимся здесь рассмотрением случая неоднородности в виде прямоугольного барьера

$$\begin{aligned} \Psi(x) &= \Psi_{\max}, & x_1 < x < x_1 + d, \\ \Psi(x) &= 0, & x < x_1 \text{ или } x > x_1 + d \end{aligned} \quad (31)$$

(численные результаты для других случаев см. в [16]).

Кинетику активной среды (следуя, например, [9,10]) будем описывать кубическим полиномом

$$F(u) = -u + au^2 - bu^3. \quad (32)$$

Уравнение (2) вместе с (10), (31), (32) решалось численно конечно-разностным способом в широком диапазоне значений параметров  $\Psi_{\max}$  и  $d$ . Следует отметить, что численное решение нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных может быть связано со значительными трудностями (см., например, [17]). Результаты численных расчетов необходимо тщательно тестировать. Удобную возможность для тестирования представляет аналитическое решение задачи (в том случае, когда оно известно), например решение, описывающее стационарную волну.

Существование и единственность "классического" (т.е. непрерывного и ограниченного) решения задачи (4), (5) для произвольной функции  $F(\Theta)$ , описывающей бистабильную среду, было показано в [7]. Явное аналитическое решение задачи (4), (5) в виде кинка для случая кубической нелинейности было впервые получено в [12,13] (как асимптотика при больших временах более общего двухфазного решения диффузионно-реакционного уравнения (2)). Заметим, что требование ограниченности решения является существенным для его единственности. В работах [14–15] было показано, что при отказе от этого условия у нелинейной задачи

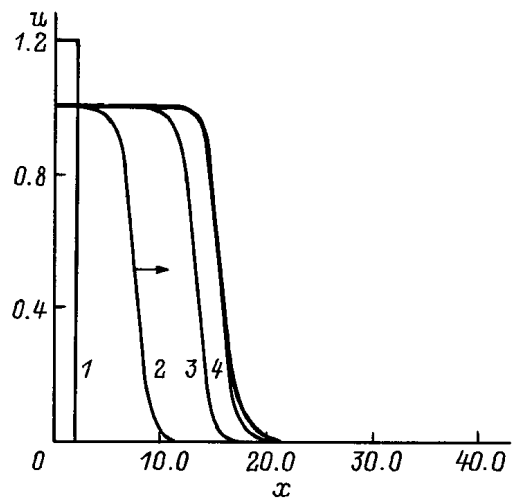


Рис. 2. Профили волны (в безразмерных переменных), рассчитанные для последовательных равноотстоящих моментов времени при закритических значениях параметров неоднородности. 1 — начальное условие, 2–4 — профили волны для последовательных равноотстоящих моментов времени.

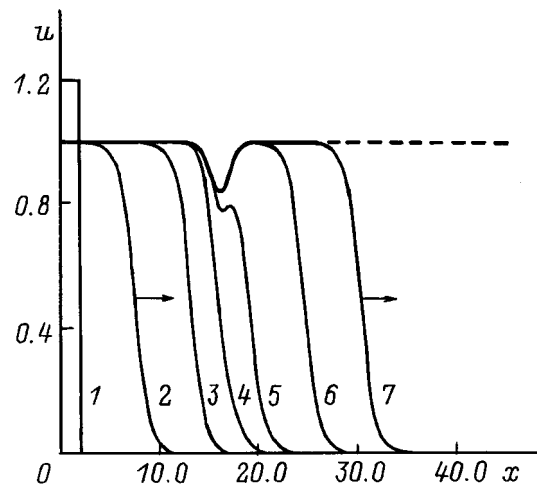
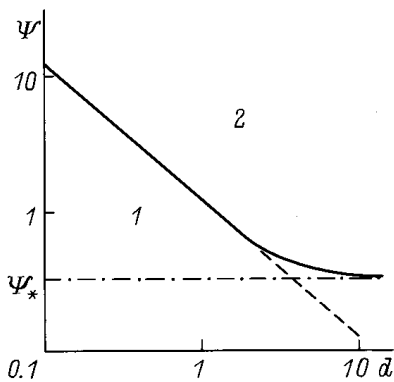


Рис. 3. То же, что и на рис. 2, при докритических значениях параметров — волна проходит. 1 — начальное условие, 2–7 — профили волны для последовательных равноотстоящих моментов времени.

(4), (5) появляется новый богатый класс аналитических решений, выражающихся через функцию Вейерштрасса. Такие решения, имеющие, вообще говоря, разрывы второго рода, описывают физические системы, обладающие довольно экзотическими свойствами. В данной работе мы ограничиваемся рассмотрением динамики непрерывных волновых фронтов, имеющих традиционные физические приложения. Для тестирования результатов численных расчетов использовалось аналитическое решение, описывающее двухфазную волну [12,13].

В качестве начального условия использовалось финитное П-образное распределение с шириной и амплитудой,



**Рис. 4.** Карта на плоскости "протяженность–амплитуда" для уединенной неоднородности. Сплошная кривая — численный эксперимент, штриховая — асимптотика при малых значениях протяженности (формула (49)), штрихпунктир — асимптотика при больших значениях протяженности (формула (34)).

достаточно большими для образования волны [18]. Размеры расчетной области выбирались достаточно большими, так что за рассматриваемые времена возмущение не достигало границы. На рис. 2 и 3 приведены рассчитанные для последовательных равноотстоящих моментов времени профили волны (показана половина области) при значениях параметров, отвечающих различным режимам. На рис. 2 представлены профили, полученные для закритических значений параметров  $d = 2.0$ ,  $\Psi_{\max} = 0.7$  (при  $a = 5$ ,  $b = 4$ , чему соответствуют  $u_2 = 1$ ,  $M = 0.167$ ); кривая 1 — начальное условие, жирная линия соответствует асимптотически устанавливающемуся стационарному распределению. Рис. 3 соответствует случаю докритических параметров  $d = 2.0$ ,  $\Psi_{\max} = 0.5$ . Величина сдвига волны при малых значениях амплитуды неоднородности хорошо согласуется с формулой (30), однако при приближении  $\Psi_{\max}$  к критическому значению возрастает гораздо быстрее.

Проведение достаточно большого числа компьютерных экспериментов для различных значений  $\Psi_{\max}$  и  $d$  позволяет оценить вид критической зависимости  $\Psi_{\text{cr}}(d)$ . На рис. 4 показана карта на плоскости  $(\Psi_{\max}, d)$ , построенная по результатам расчетов. Зависимость  $\Psi_{\text{cr}}(d)$  (сплошная линия) разбивает плоскость параметров неоднородности на две области. При значениях параметров из области 1 (т. е. при достаточно малых амплитуде или ширине) волна преодолевает неоднородность; при значениях параметров из области 2 волна останавливается. Результаты численных экспериментов показывают, что изменение величин параметров активной среды приводит только к изменению положения кривой  $\Psi_{\text{cr}}(d)$  на плоскости  $(\Psi_{\max}, d)$ , характер же критической зависимости от значений  $a$  и  $b$  практически не зависит. Заметим, что, используя известные теоремы сравнения для решений нелинейных параболических уравнений [19], монотонность функции  $\Psi_{\text{cr}}(d)$  может быть доказана математически строго.

## Критерии локализации волны

В рамках данной модели предсказание типа динамики системы (прохождение волны или ее остановка) сводится к расчету зависимости  $\Psi_{\text{cr}}(d)$ . Вывести точный вид этой зависимости не представляется возможным, однако асимптотические формулы при  $d \rightarrow 0$  и  $d \rightarrow \infty$  могут быть получены для весьма общего случая бистабильной среды с произвольной нелинейностью.

Начнем со случая неоднородности в виде прямоугольного барьера большой протяженности. Ключ к решению проблемы заключается в так называемой "теории пределов" распространения волны в однородной среде [4]. Для однокомпонентной бистабильной среды, описываемой одним уравнением (2), это означает, что распространение волны переключения системы из нижнего однородного состояния  $u \equiv 0$  в верхнее  $u \equiv 1$  становится невозможным при  $M \equiv \int_0^1 F(\Theta) d\Theta \leq 0$  [7,10] (при  $M < 0$  имеет место распространение "обратной" волны переключения из верхнего состояния в нижнее, которое мы здесь отдельно не рассматриваем: этот случай сводится к предыдущему формальной заменой переменных  $u \rightarrow 1 - u$ ,  $x \rightarrow -x$ ).

Очевидно, при большой протяженности барьера к внутренней области становятся применимы выводы "теории пределов", а именно волна переключения в области  $x_1 < x < x_1 + d$  отсутствует, если

$$M_{in} = \int_0^1 [-(1 + \Psi_{\max})\Theta + (1/\alpha_0)f_1(\Theta)] d\Theta \leq 0, \quad (33)$$

т. е. при

$$\Psi_{\max} > \Psi_* = 2M. \quad (34)$$

Асимптотика  $\Psi_{\text{cr}}(d \rightarrow \infty) = \Psi_*$  показана на рис. 4 штрихпунктирной линией. Выражение (34), таким образом, обнаруживает прекрасное согласие с результатами численного эксперимента для значений протяженности  $d \gtrsim 10$ .

Рассмотрим теперь случай  $d \rightarrow 0$ . Очевидно, что при произвольном конечном  $\Psi_{\max}$  влияние неоднородности на распространение волны тем меньше, чем меньше протяженность неоднородности  $d$ . В частности, при достаточно малых  $d$  можно пренебречь искажениями формы волны при прохождении через неоднородность. Поэтому в первом приближении будем считать форму волны неизменной, при этом влияние неоднородности сводится к постепенному сдвигу положения волны со временем относительно положения, которое занимала бы волна в соответствующей однородной среде. Это означает, что решение нестационарного уравнения (11) можно искать в следующем виде:

$$u(\xi, t) = \Theta(\xi; \Delta(t)), \quad (35)$$

где  $\Theta(\xi)$  — решение уравнения (4) для стационарной волны,  $\Delta(t)$  — величина сдвига,  $\Delta(t \rightarrow -\infty) = 0$ .

Стационарное уравнение (4) инвариантно относительно сдвига, поэтому  $\Theta(\xi; \Delta(t)) = \Theta(\xi + \Delta(t))$ . Отсюда, подставляя (35) в (11), получаем

$$[\Delta'(t) - v] \partial_\xi \Theta = \partial_{\xi\xi}^2 \Theta + F(\Theta) - \Psi(\xi + vt)\Theta. \quad (36)$$

Домножая уравнение (36) на  $\partial_\xi \Theta$  и интегрируя по  $\xi$  от  $-\infty$  до  $\infty$ , получаем уравнение относительно функции  $\Delta(t)$

$$\begin{aligned} \Delta'(t) = & - (v/M) \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(\xi + vt)\Theta(\xi + \Delta(t)) \\ & \times \partial_\xi \Theta(\xi + \Delta(t)) d\xi \end{aligned} \quad (37)$$

(сходимость интеграла обеспечивается финитностью функции  $\Psi(x)$ ).

Идея дальнейшего анализа заключается в следующем. Решение уравнения (37) в пределе больших времен дает величину полного сдвига  $\Delta(\infty) = \delta$ , которая, как показано выше, возрастает с увеличением параметров неоднородности  $\Psi_{\max}$  и  $d$ . Если при некотором соотношении параметров величина полного сдвига обращается в бесконечность, то это (в рамках данного подхода) означает локализацию волны.

Решение стационарного уравнения (4) при произвольном виде нелинейности  $F(\Theta)$  неизвестно, поэтому получить решение уравнения (37) также не представляется возможным. Вызывает, однако, интерес прежде всего поведение решения при  $t \rightarrow +\infty$ . В этом случае (т.е. для любого конечного  $x$  при  $\xi \rightarrow -\infty$ ) для стационарной волны имеет место асимптотическое представление (7). Подставляя (7) в (37), получаем следующее уравнение для  $\Delta(t)$ :

$$\begin{aligned} \Delta'(t) \simeq & (v\mu/M) \left( L \exp[\mu(\Delta - vt)] \right. \\ & \left. - N \exp[2\mu(\Delta - vt)] \right), \end{aligned} \quad (38)$$

где  $L = \int_0^d \Psi(x) \exp(\mu x) dx$ ,  $N = \int_0^d \Psi(x) \exp(2\mu x) dx$  (полагая без ограничения общности  $x_1 = 0$ ).

Учитывая малость величины  $\exp(\mu\xi)$  при  $\xi \rightarrow -\infty$ , ограничимся в (38) слагаемым линейным по  $\exp(\mu\xi)$ , тогда

$$\Delta'(t) \simeq (v\mu L/M) \exp[\mu(\Delta - vt)]. \quad (39)$$

Решение уравнения (39) может быть получено без труда

$$\Delta(t) \simeq -(1/\mu) \ln(C + (\mu L/M) \exp(-\mu vt)). \quad (40)$$

Константа интегрирования  $C$  в (40) не может быть определена непосредственно, так как "начальное" условие имеет вид  $\Delta(-\infty) = 0$ , в то время как асимптотическое представление (39) можно считать приближенно справедливым, только начиная с некоторого  $t_0$ . Величина

$C$  может быть определена из условий сшивки асимптотических представлений решения при  $t \rightarrow \infty$  и  $t \rightarrow -\infty$ .

Асимптотическое поведение решения уравнения (37) при  $t \rightarrow -\infty$  определяется поведением решения стационарного уравнения (4) при  $\xi \rightarrow \infty$ . Подставляя (9) в (37), получаем

$$\Delta'_{(-)}(t) \simeq (v\lambda K/M) \exp[-2\lambda(\Delta - vt)], \quad (41)$$

где  $K = \int_0^d \Psi(x) \exp(-2\lambda x) dx$ , откуда

$$\Delta_{(-)}(t) \simeq (1/2\lambda) \ln(1 + (\lambda K/M) \exp(2\lambda vt)). \quad (42)$$

Простейшее условие  $\Delta_{(-)}(t_0) = \Delta(t_0)$ , однако, не является удовлетворительным, так как при этом из рассмотрения выпадают времена, для которых взаимодействие волны с неоднородностью наиболее сильно. Описать вклад этих времен можно, введя параметр эффективного сдвига  $\Delta_0$ . Условие сшивки принимает вид

$$\Delta_{(-)}(0) + \Delta_0 = \Delta(0) \quad (43)$$

(полагая  $t_0 = 0$ ). Из (40), (42), (43) для константы интегрирования получаем

$$C = \exp(-\mu\Delta_0) [1 + (\lambda K/M)]^{-\mu/2\lambda} - (\mu L/M). \quad (44)$$

Легко видеть из (40), что величина полного сдвига обращается в бесконечность при условии  $C = 0$ . Таким образом, неоднородность становится непроходимой для волны при следующем соотношении между параметрами задачи:

$$(\mu L/M) [1 + (\lambda K/M)]^{\mu/2\lambda} = A, \quad (45)$$

где  $A = \exp(-\mu\Delta_0)$ ; величины  $K, L, N$  — интегральные характеристики функции  $\Psi(x)$ .

Подчеркнем, что выражение (45) получено для бистабильной среды с произвольной нелинейностью и уединенной неоднородности произвольной формы. Для каждой конкретной формы  $\Psi(x)$  принадлежит некоторому двухпараметрическому семейству,  $\Psi = \Psi(x; \Psi_{\max}, d)$ . В этом случае величины  $K, L$ , и  $M$  являются функциями амплитуды неоднородности  $\Psi_{\max}$  и протяженности  $d$  и выражение (45) описывает искомую связь между параметрами критической неоднородности.

Соотношение (45) можно упростить, приняв во внимание предположенную выше малость величины  $d$ . Пусть  $d \ll \min\{1/\mu, 1/\lambda\}$ , тогда в первом порядке по  $d$  получаем

$$L \cong K \cong \int_0^d \Psi(x) dx \equiv B = B(\Psi_{\max}, d) \quad (46)$$

и (45) принимает вид

$$(\mu B/M) [1 + (\lambda B/M)]^{\mu/2\lambda} = A. \quad (47)$$

Наиболее простой вид соотношения (47) принимает для случая бистабильной среды с кубической нелинейностью. В этом случае, опираясь на результаты работы [20], нетрудно показать, что  $\lambda = \mu$ , и из (47) получаем

$$(\mu B/M)[1 + (\mu B/M)]^{1/2} = A, \quad (48)$$

где  $\mu = (b/2)^{1/2}$ .

Выражение (48) есть нелинейное алгебраическое уравнение относительно переменной  $z = \mu B/M$ . Обозначая его решение как  $z_0$ , получаем простую связь между параметрами неоднородности критического масштаба

$$B(\Psi_{\max}, d) = z_0 M / \mu. \quad (49)$$

Номировочный коэффициент  $z_0$  в рамках данного подхода не определяется. Он может быть определен, например, из сравнения с результатами компьютерного эксперимента.

Для неоднородности в виде прямоугольного барьера  $B = \Psi_{\max} d$ . Критическая зависимость  $\Psi_{\text{cr}}(d)$ , рассчитанная для этого случая в соответствии с (49) (штриховая линия на рис. 4) демонстрирует практически идеальное совпадение с данными численных экспериментов вплоть до значений протяженности  $d \cong 2$ .

Таким образом, асимптотические выражения (34) и (49) удовлетворительно описывают зависимость  $\Psi_{\text{cr}}(d)$  при любых значениях протяженности  $d$ . При этом величина  $\Psi_*$  является для критических значений амплитуды (учитывая монотонность функции  $\Psi_{\text{cr}}(d)$ ) точной оценкой снизу.

## Заключение

Информация о типе волновой динамики активной среды с уединенной неоднородностью, полученная только для одного случая неоднородности определенной формы (например, с помощью соотношения (34) или (49)), может быть использована для прогноза распространения волны в среде с неоднородностью произвольной формы, а именно пусть неоднородность  $\Psi_0(x)$  будет закритическая. Тогда, используя теоремы сравнения для решений нелинейных параболических уравнений [19], нетрудно показать, что закритической является любая неоднородность  $\Psi_1(x)$ , такая что  $\Psi_1(x) \geq \Psi_0(x)$  для любого  $x$ . Напротив, если неоднородность  $\Psi_0(x)$  докритическая, то и любая неоднородность  $\Psi_2(x)$ ,  $\Psi_2(x) \leq \Psi_0(x)$  также является докритической. В частности, это означает, что в данной активной среде коэффициент  $z_0$  в соотношении (49) (или ему подобном, полученном из более общего выражения (47)) может быть определен только один раз. Зависимость (49) будет при этом служить оценкой снизу для закритических неоднородностей и оценкой сверху для неоднородностей докритических.

Заметим в заключение, что сделанное в начале работы предположение о финитности функции  $\Psi(x)$  не является принципиальным ограничением. Нетрудно видеть, что

необходимым является условие достаточно быстрого стремления  $\Psi(x)$  к нулю при  $x \rightarrow \pm\infty$ , обеспечивающее сходимость соответствующих интегралов.

## Список литературы

- [1] Колмогоров А.Н., Петровский И.Г., Пискунов Н.С. // Бюл. МГУ. Математика и механика. 1937. Т. 1. Вып. 6. С. 1–26.
- [2] Fisher R. // Ann. Eugenics. 1937. Vol. 7. P. 355–369.
- [3] Зельдович Я.Б., Франк-Каменецкий Д.А. // ЖФХ. 1938. Т. 12. № 1. С. 100–105.
- [4] Зельдович Я.Б. // ЖЭТФ. 1941. Т. 11. Вып. 1. С. 159–169.
- [5] Зельдович Я.Б. // ЖФХ. 1948. Т. 22. № 1. С. 27–48.
- [6] Баренблатт Г.И., Зельдович Я.Б. // ПММ. 1957. Т. 21. № 6. С. 856–859.
- [7] Канель Я.И. // ДАН СССР. 1960. Т. 132. С. 268–271.
- [8] Зельдович Я.Б., Баренблатт Г.И., Либрович В.Б., Махвиладзе Г.М. Математическая теория горения и взрыва. М.: Наука, 1980. 478 с.
- [9] Маслов В.П., Данилов В.Г., Волосов К.А. Математическое моделирование процессов тепломассопереноса. М.: Наука, 1987.
- [10] Лоскутов А.Ю., Михайлов А.С. Введение в синергетику. М.: Наука, 1990. 272 с.
- [11] Гуревич А.В., Минц Р.Г. // УФН. 1984. Т. 142. Вып. 1. С. 61–98.
- [12] Kawahara T., Tanaka M. // Phys. Lett. A. 1983. Vol. 159. P. 311–314.
- [13] Данилов В.Г., Субочев П.Ю. // ТМФ. 1991. Т. 89. С. 25–47.
- [14] Samsonov A.M. // Future Directions of Nonlinear Dynamics in Physical and Biological Systems / Ed. by P.L. Christiansen et al. New York: Plenum Press, 1993.
- [15] Samsonov A.M. // Applicable Analysis. 1995. Vol. 57. P. 85–100.
- [16] Виноградов М.Е., Баренблатт Г.И., Петровский С.В. // Океанология. 1995. Т. 35. Вып. 2. С. 98–104.
- [17] Barenblatt G.I., Bertsch M., Dal Passo R. et al. // J. Fluid Mech. 1993. Vol. 253. P. 341–358.
- [18] Петровский С.В. // ИФЖ. 1994. Т. 66. Вып. 4. С. 398–404.
- [19] Вольперт А.И., Худяев С.И. Анализ в классах разрывных функций и уравнения математической физики. М.: Наука, 1975. 395 с.
- [20] Огнев М.В., Петровский С.В., Простокишин В.М. // ЖТФ. 1995. Т. 65. Вып. 6. С. 1–8.