

01;03

Нелинейные электрогидродинамические явления и генерация капель в заряженных проводящих струях жидкости

© В.Н. Горшков, М.Г. Чабан

Институт физики АН Украины,
252650 Киев, Украина

(Поступило в Редакцию 4 июня 1998 г. В окончательной редакции 23 октября 1998 г.)

Численными методами, развитыми для осесимметричных течений, проведен детальный анализ явлений, происходящих на вершине заряженной проводящей струи. Вскрыты механизмы каплеобразования при различных соотношениях лапласовского и электрического давлений на боковой поверхности, которые носят универсальный характер (независимо от способа получения струи). В качестве модели рассмотрены все нелинейные стадии классической неустойчивости Рэлея заряженной проводящей капли, начиная от формирования струи на ее поверхности до генерации развитой струи вторичных капель.

1. Исследования физических механизмов, определяющих процесс распада на капли цилиндрических струй жидкости, имеют довольно продолжительную историю, начало которой положено классической работой Рэлея [1]. Представления линейной теории неустойчивости бесконечной струи в отсутствие электрического поля совершенно прозрачны. Случайные малые возмущения ее радиуса вида $\varepsilon \exp(ikz)$ ($k = 2\pi/\lambda$) нарушают однородность лапласовского давления $p_L = \alpha(1/R_1 + 1/R_2)$ на поверхности (α — коэффициент поверхностного натяжения, $R_{1,2}$ — главные радиусы кривизны). В случае длинных волн p_L определяется кривизной поверхности $1/R_1$ в плоскости, перпендикулярной оси струи, и жидкость перетекает от областей сужения к зонам уширения, приводя к экспоненциальному росту начальных возмущений. Для коротких волн ($\lambda < \lambda_k = 2\pi r_0$, r_0 — начальный радиус струи) становится существенным влияние кривизны поверхности ($1/R_2$) в плоскости, проходящей через ось ($R_2 < 0$ в области перетяжки). Возникающий дисбаланс давлений приводит к обратному потоку жидкости, уменьшению начальных возмущений и колебаниям поверхности. С ростом λ ($\lambda > \lambda_k$) увеличивается амплитуда изменений $p_L(z)$ ($\Delta p_L \rightarrow 2\alpha\varepsilon/r_0^2$), но одновременно возрастает и масса жидкости, перетекание которой в пределах длины λ определяет аperiодическое развитие каждой из перетяжек. Оптимальное значение λ , соответствующее максимальному значению инкремента, равно $\lambda_m \approx 9r_0$.

Если проводящая струя заряжена, то значения λ_k и λ_m уменьшаются, поскольку в перепад давлений вносит коррективы отрицательное электростатическое давление, большее по абсолютной величине в областях большей кривизны поверхности [2].

Что касается нелинейных стадий развития неустойчивости, то долгое время был непонятен механизм образования капель — сателлитов, когда при распаде струи ее разрыв происходит не в месте первоначального сужения, а в двух сечениях справа и слева от него, порождая кроме основных капель радиуса порядка $1.9r_0$ еще и малые размером $r_0/3$ (для $\lambda = \lambda_m$) [3]. Только

детальный анализ численного моделирования позволил вскрыть физическую природу этого явления [4].

В технических приложениях капли генерируются ограниченными струями жидкости. И вот именно в этом случае результаты теоретического исследования устойчивости бесконечных струй малоприменимы для понимания процессов каплеобразования и выбора оптимальных режимов соответствующих установок. К примеру, динамика протяженных ограниченных с двух сторон жидких струек (в отсутствие электрического поля) красива и неожиданна [5] с точки зрения классического подхода Рэлея [1]. В сокращающейся струе самовозбуждаются периодические структуры с характерным размером порядка $2r_0 < \lambda_k$! В процессе причудливой эволюции эти струи порождают серию капель различного размера. Распады такого рода численно рассматривались в ряде работ [6,7] без анализа физических механизмов явления. Авторами [8] такой анализ проведен и показано, что под действием избыточного давления $p_L \approx 2\alpha/r_0$ на концах струи возбуждаются нелинейные поверхностные волны (в основной области $p_L \approx \alpha/r_0$). Своеобразный "резонанс" на длине λ_r порядка $2r_0$ обусловлен тем, что локальные возмущения поверхностного давления передаются жидкостью в обе стороны от зоны возбуждения с характерной длиной затухания $\approx r_0$. Взаимодействие встречных волн приводит к хаотическому дроблению гофрированной струи на капли.

Рассмотренное явление заставляет по-новому представить развитие неустойчивости Рэлея струи, вытекающей из некоторого отверстия (без противоречия, естественно, с количественными результатами предшественников). В отсутствие внешних воздействий в качестве начальных возмущений обычно принимаются тепловые шумы радиуса струи [2], из которых в процессе сноса по течению выделяется гармоника с максимальным инкрементом γ_m . Мы считаем такой подход некорректным и представляем процесс каплеобразования следующим образом. Окончание струи с избыточным лапласовским давлением p_L возбуждает гофрировку поверхности с периодом $\lambda_r \approx 2r_0$. В дальнейшем нелинейные эффекты [8]

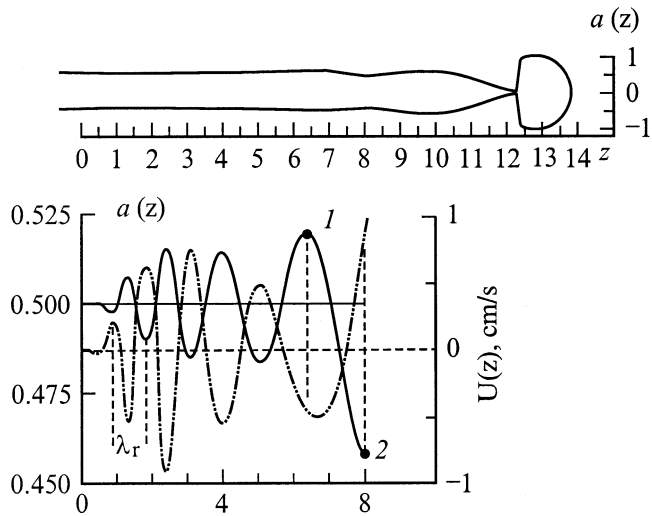


Рис. 1. Генерация капель ограниченной струей жидкости (в отсутствие внешних возмущений) вследствие самовозбуждения коротковолновых структур поверхности. Вверху — полный профиль $a(z)$ возмущенной части струи, внизу — фрагменты зависимости радиуса струи ($a(z=0) = 0.5$ см) и продольной скорости жидкости U от расстояния.

формируют каплю на конце струи, а к ее основанию устремляется цуг волн с лидирующей (в соответствии с дисперсионным уравнением [1]) наиболее короткой "резонансной" гармоникой $\lambda_r \approx 2r_0$ (рис. 1). Длинноволновые составляющие, которые замыкают цуг, задают более высокий уровень возмущений поверхности, не сравнимый с тепловым шумом. Данные рис. 1 получены численным моделированием по схеме [8] динамики цилиндрической ограниченной справа струи воды радиуса $r_0 = 0.5$ см (без учета силы тяжести и с нулевыми начальными скоростями жидкости). Представлен момент отрыва третьей по счету капли. В зоне переднего фронта цуга сдвиг фаз колебаний радиуса поверхности $a(z, t)$ и средней продольной скорости $U(z, t)$ сдвинуты на π , что характерно для волнового процесса. Изменение сдвига фаз в точках 1 и 2 соответствует росту возмущений ($\partial U / \partial z < 0$ в 1 и больше нуля в 2). Раскачку волн обеспечивает уменьшение поверхностной энергии при формировании очередной капли. Процесс еще не установился, но размер капель уже близок к наблюдаемому $\approx 1.9r_0$. Трудно избавиться от иллюзии, что некоторые возмущения усиливаются в процессе сноса от основания струи. В установившемся режиме время распада струи (образования капли) t_k можно оценить из равенства длины отсекаемой части струи λ_m длине распространения "резонансной" гармоники за время t_k : $\lambda_m = t_k V_{ph}$, V_{ph} — соответствующая фазовая скорость поверхностной волны. После вычислений с использованием рэлеевского дисперсионного соотношения [1] мы получаем известное выражение $t_k \sim 2/\gamma_m$, согласующееся с многочисленными экспериментальными измерениями.

Приведенные результаты помогут в дальнейшем интерпретировать физические явления при распаде заряженных проводящих струй, обнаруженные в численных экспериментах настоящей работы. Отметим, что попытки моделирования динамики проводящих жидкостей в сильных электрических полях предпринимались и ранее, но расчеты заканчивались на стадии формирования конических выступов (конуса Тейлора) [9,10]. Струйные режимы для используемых численных схем были просто недостижимы.

Из общих физических соображений можно утверждать, что после формирования струи электрогидродинамические процессы вблизи вершины не зависят от способа ее получения. В нашей работе в качестве отправной модели выбрано явление неустойчивости сильно заряженных капель. При некотором заряде, известном как критический заряд Рэлея [11], капля становится неустойчивой и деформируется, испуская струйку, с вершины которой происходит капельная генерация. В то время как теоретическому и экспериментальному исследованию предела Рэлея было посвящено много работ [12], практически ничего неизвестно о динамике распада заряженной капли. Теоретическое исследование этого явления затруднено вследствие сильной нелинейности процесса. Методы энергетического подхода [13] к решению задачи не дают возможности установить механизмы реализации интересных нелинейных эффектов. А быстротечность распада струй, возникающих в различных физических системах (жидкометаллические источники ионов, электрогидродинамические распылители жидкости [14,15]), и их малые геометрические размеры не позволяют детально разобраться в сути многих процессов путем эксперимента. Даже те явления, которые экспериментально регистрируются, зачастую связываются с неконтролируемыми внешними воздействиями. Так, в работе [16] обнаружена генерация струей сплюснутых (вдоль направления внешнего электрического поля) сфероидов, которые выбрасывали в свою очередь новые струи в поперечном направлении. В удаленной от вершины струи зоне регистрировались вытянутые сфероиды и генерация вторичных капель в продольном направлении. В нашей работе, в частности, показано, что это — фрагменты единого длительного процесса, а не результат аэродинамических эффектов [16]. Формирование ступенчатого (с утолщением в переходной зоне) профиля струи (см. зависимости $a(z, t)$ на рис. 4–6) в экспериментах Тейлора [17] — закономерный итог эволюции баланса электрического и лапласовского давлений вдоль струи в процессе ее роста.

2. Для осесимметричных течений вязкой несжимаемой жидкости со свободной границей использовалась математическая модель, развитая авторами данной работы в [8]. Эта модель достаточно точно описывает динамику даже относительно коротковолновых возмущений струи, несмотря на то что продольная скорость частиц жидкости $U(z, r, t)$ полагалась не зависящей от расстояния до оси r . В этом случае про-

филь радиальной скорости $V(r, z, t)$ является линейной функцией относительно r ($V(r, z, t) = V_0(z, t)r/a(z, t)$, $V_0(z, t) = V(r = a, z, t) = da(z, t)/dt$ — распределение радиальной компоненты скорости точек поверхности; $a(z, t)$ — профиль струи), а соответствующее уравнение движения Навье–Стокса в цилиндрической системе координат принимает вид

$$(\rho r/a)dV_0/dt = -\partial p_f/\partial r + \mu r\partial^2(V_0/a)/\partial z^2, \quad (1)$$

ρ, μ — плотность и коэффициент вязкости жидкости.

Согласно (1), зависимость давления жидкости $p_f(z, r, t)$ от пространственных координат задается выражением

$$p_f(z, r, t) = p_0(z, t) - (\rho r^2/(2a))dV_0/dt + (\mu r^2/2)\partial^2(V_0/a)/\partial z^2, \quad (2)$$

$p_0(z, t)$ — давление на оси струи.

Так как при $r = a$ в выделенном поперечном сечении струи давление p_f равно поверхностному давлению $p_s(z, t)$, то из соотношения (2) можно получить уравнение для скорости $V_0(z, t)$ в виде

$$\rho dV_0(z, t)/dt = 4[p(z, t) - p_s(z, t)]/a(z, t) + \mu a\partial^2(V_0/a)/\partial z^2, \quad (3)$$

где $p(z, t) = (p_0(z, t) + p_s(z, t))/2$.

Сила F_z , действующая на поперечное сечение струи, определяется интегрированием (2) от 0 до a . В результате преобразований с использованием (3) получаем $F_z = \pi a^2(z, t)p(z, t)$. Сделанное ранее предположение $\partial U(z, r, t)/\partial r = 0$ означает условное разделение жидкости на тонкие диски (усеченные конусы), границы которых имеют скорости $U(z, t)$. Учет всех сил, действующих на такой диск толщиной Δz , приводит к уравнению для продольной скорости $U(z, t)$

$$\rho dU(z, t)/dt = -\partial p/\partial z + \mu\partial^2 U(z, t)/\partial z^2 + 2[p_s - p]\partial(\ln a)/\partial z. \quad (4)$$

В правой части (4) присутствуют слагаемые, обусловленные градиентом величины F_z и наличием поверхностной силы $2\pi a p_s(z, t)\Delta z da/\partial z$, действующей на боковую поверхность диска в продольном направлении. Таким образом, (4) представляет собой известное уравнение движения Навье–Стокса, учитывающее наличие у выделенной макрочастицы жидкости свободной границы.

Уравнение для функции $p(z, t)$ легко получить следующим образом. Выделим участок струи длиной Δz и радиусом $a(z, t)$. При его деформации в процессе течения $a^2(z, t)\Delta z(t) = \text{const}$. Дифференцирование этого соотношения по времени приводит к выражению

$$2\Delta z(t)da(z, t)/dt + a(z, t)d(\Delta z(t))/dt = 0. \quad (5)$$

Поскольку $d(\Delta z(t))/dt = \Delta z(\partial U/\partial z)$, то из (5) следует уравнение непрерывности течения

$$2V_0(z, t)/a(z, t) + \partial U(z, t)/\partial z = 0. \quad (6)$$

Дальнейшее дифференцирование (5) по времени с учетом (6) и равенства $d^2(\Delta z(t))/dt^2 = \Delta z[\partial(dU/dt)/\partial z]$ дает соотношение

$$dV_0/dt = 3V_0^2/a + (a/2)[\partial(dU/dt)/\partial z]. \quad (7)$$

После подстановки в (7) правых частей (3) и (4) получается довольно громоздкое уравнение относительно $p(z, t)$, для которого удовлетворительная разностная аппроксимация, обеспечивающая сохранение полного объема жидкости, далеко не очевидна. Однако такая вычислительная схема легко строится без непосредственного обращения к (7) (подробное описание метода приведено в [8]).

Приближение $\partial U(z, r, t)/\partial r = 0$ используется во многих работах. Оно ограничивает применение исходной системы уравнений для численного исследования коротковолновых возмущений струи. Однако в нашей работе это единственное приближение. В дальнейшем мы рассчитываем внутреннее давление жидкости, а не профилируем его каким-либо образом, как это делается, например, в [18]: $p_f(z, r, t) = p_s(z, t)$ (после чего уравнение движения решается лишь для одной компоненты скорости, вторая определяется из уравнения непрерывности). У нас, согласно (2) и (3), естественным образом получается связь локального значения p_f с его средней по поперечному сечению струи величиной $p(z, t)$

$$p_f(z, r, t) = p_s(z, t)(2(r/a)^2 - 1) + 2p(z, t)(1 - (r/a)^2) \quad (8)$$

и самосогласованно решаются уравнения движения для каждой компоненты скорости совместно с уравнением для функции $p(z, t)$, что обеспечивает сохранение объемов каждой ячейки (макрочастицы) жидкости в процессе деформации (течения).

Вследствие такого подхода возможности используемой системы уравнений (3), (4) расширяются. Так, дисперсионное соотношение для поверхностных волн малой амплитуды в бесконечных струях радиуса r_0 , получаемое из приближенной системы гидродинамических уравнений, не приводит к заметным ошибкам по сравнению с точным решением даже для длин волн $\approx \pi r_0/2$ [8].

В случаях малой вязкости и слабого изменяющегося радиуса струи $p(z, t)$ определяется стационарным уравнением диффузии

$$\partial^2 p/\partial z^2 - (8/a^2)(p - p_s) + 6\rho(V_0/a)^2 = 0. \quad (9)$$

В нашей задаче поверхностное давление $p_s(z, t) = p_L(z, t) - p_E(z, t)$, $p_L = \alpha(1/R_1 + 1/R_2)$, $R_1 = a\psi$, $R_2 = -\psi^3(\partial^2 a/\partial z^2)^{-1}$, $\psi = [1 + (\partial a/\partial z)^2]^{1/2}$, $p_E(z, t) = E^2(z, t)/8\pi$, $E(z, t)$ — напряженность электрического поля на поверхности.

Распределение плотности заряда в случае идеальной проводящей жидкости находится из условия постоянства электрического потенциала во всех точках поверхности [19]. Вся жидкость дробилась на множество усеченных конусов (с малым отношением высоты конуса к радиусу среднего сечения) плоскостями, перпендикулярными оси течения. Плотности зарядов σ_i на боковой поверхности каждого из таких конусов площадью s_i определяются из системы уравнений $\sum b_{ki}\sigma_i + \varphi_k = V(t)$, $\sum S_i\sigma_i = Q$, если динамика течения рассматривается в режиме заданного заряда Q системы ($V(t)$ — потенциал поверхности; φ_k — потенциал, создаваемый внешним полем на поверхности конуса с номером k). Обычно при расчете коэффициентов b_{ki} заряд на i -м конусе представляется системой точечных зарядов, расположенных на средней линии боковой поверхности конуса, что упрощает численную процедуру. Для нашего случая, когда решается задача устойчивости и необходимы высокие точности расчета поля, такое приближение неприемлемо (особенно при расчете диагональных элементов b_{kk}). В точном выражении для b_{ki} было проведено аналитическое интегрирование по z , а затем частично численное и частично аналитическое по азимуту. Такой способ расчета обеспечил относительную погрешность определения плотности заряда менее 0.01% при сравнении с известными аналитическими решениями. Уравнения (1)–(3) дополним начальными и граничными условиями. При $t = 0$ капля радиуса r_0 с центром в начале координат $r = 0$, $z = 0$ деформируется в вытянутый вдоль оси Z эллипсоид вращения с полуосями $r_0(1+\delta)$ и $r_0(1+\delta)^{-1/2}$, $\delta = 0.05$. Начальные скорости $U(z, t = 0) = V_0(z, t = 0) = 0$, полный электрический заряд на поверхности равен Q . Граничные условия

$$\left. \frac{\partial V_0}{\partial z} \right|_{z=0} = \left. \frac{\partial p}{\partial z} \right|_{z=0} = U(z = 0, t) = 0,$$

$$a(z_c, t) = 0, \quad p(z_c, t) = p_S(z_c, t), \quad (10)$$

$z_c(t)$ — координата конца струи.

На каждом шаге по времени решалась электростатическая задача для определения $p_E(z)$ и рассчитывалась $p_L(z)$ при заданном $a(z)$, затем из (3), (4), (7), (10) находилась зависимость $p(z)$ [8], после чего из тех же уравнений (3) и (4) определялись новые скорости и координаты $a(z, t + \Delta t)$. По мере деформации капли координатная сетка периодически перестраивалась для обеспечения необходимой точности моделирования образования и динамики струй.

Отметим, что численная модель гидродинамической части задачи хорошо себя зарекомендовала при исследовании динамики самовозбуждающихся коротковолновых периодических структур в ограниченных струях [8]. Подключив электростатическую часть, мы в качестве теста просчитали малые колебания капли при заряде, меньшем критического. Полученное согласие с аналитическим решением [11] для периода колебаний позволяет надеяться на достоверность расчетов в более сложных случаях.

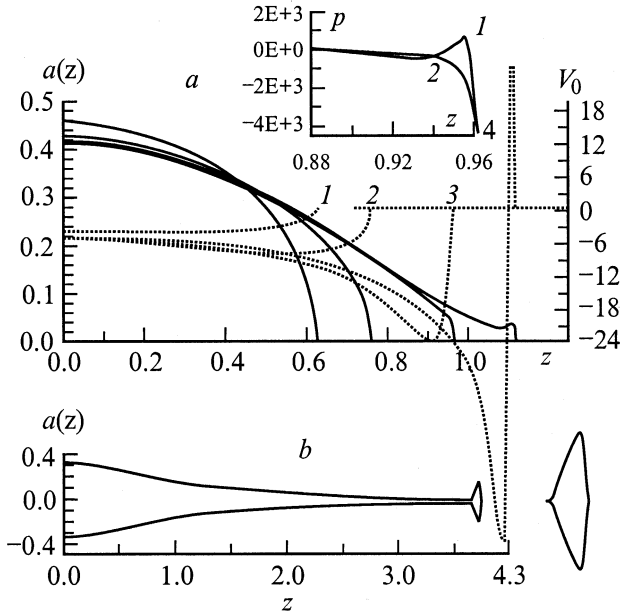


Рис. 2. *a* — профили поверхности капли и радиальной скорости (кривые 1–4) в случае $\delta_e = 0.3$; $\alpha = 300 \text{ g/s}^2$; $t = 0.0257, 0.0319, 0.0354, 0.0363 \text{ s}$. На вставке 1 — $p_S(z)$, 2 — $p(z)$ при $t = 0.0354 \text{ s}$. *b* — $\delta_e = 0.5$, $\alpha = 75 \text{ g/s}^2$. Форма исходной капли в момент отрыва капли-лидера (справа — капля в увеличенном виде), $t = 0.0799 \text{ s}$. Радиус капли при сферической форме $r_k = 0.1 \text{ cm}$, заряд капли $q_k = 0.085 Q$.

Для малых деформаций капли, которые описываются присоединенными полиномами Лежандра, первая из мод становится неустойчивой при $Q > Q_R = (16\pi\alpha r_0^3)^{1/2}$ — предел Рэлея в отсутствие внешнего электрического поля для $n = 2$ в дисперсионном уравнении [11]

$$\omega^2 = n(n-1)[(n+2)\alpha - Q^2/(4\pi r_0^3)]/(\rho r_0^3). \quad (11)$$

В наших расчетах мы будем изменять параметр надкритичности δ_e , $Q = (1 + \delta_e)Q_R$. При заданном δ_e исходная система (3), (4), (6) приводится к безразмерному виду введением новых переменных $t' = t(\alpha/(\rho r_0^3))^{1/2}$, $z' = z/r_0$, $a' = a/r_0$, $\mu' = \mu/(\rho\alpha r_0)^{1/2}$. Таким образом, все многообразие решений задачи определяется двумя параметрами: δ_e и μ' . Для простоты мы полагали $\rho = 1 \text{ g/cm}^3$, $r_0 = 0.5 \text{ cm}$, $\mu = 1 \text{ gs}^{-1} \cdot \text{cm}^{-1}$, варьируя в расчетах δ_e и α .

3. На рис. 2 представлены результаты численного эксперимента при довольно значительном превышении зарядом капли величины Q_R ($\delta_e = 0.3, 0.5$). В этом случае размеры струйи вторичных капель соизмеримы с размерами исходной капли, что облегчает анализ электрогидродинамических явлений. На рис. 2 и далее единица измерения давления — $\text{g/(s}^2\text{cm)}$, скорости — cm/s , а профили поверхностей приводятся без искажений соотношения продольных и поперечных размеров. Из данных рис. 2 легко заметить две особенности процесса разрушения капли: 1) область формирования струй (расстояние от минимума радиальной скорости до конца

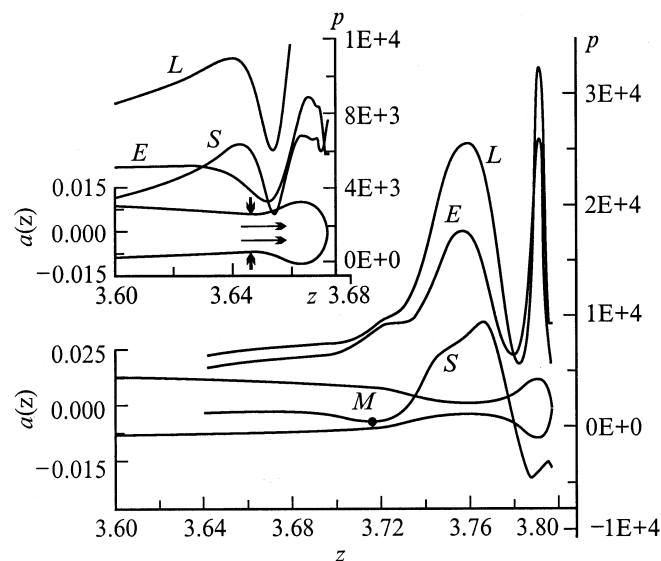


Рис. 3. Самовозбуждение гофрировки поверхности струи после отрыва капли-лидера (продолжение варианта рис. 2, б). Профили поверхностей и давлений $p_L(z)$, $p_E(z)$, $p_S(z)$ (возле кривых указаны соответствующие индексы) для $t = 0.0811$ и 0.0803 s (на вставке).

струи, кривые 2–4 рис. 2, а) стремительно сужается во времени; 2) окончание струи далеко от сферической формы и отсечка его сопровождается образованием сплюснутой вторичной капли.

Как видно из уравнения (9), глубина проникновения избыточного отрицательного давления на конце струи в глубь жидкости (рис. 2, а, вставка), где на поверхности $p_S(z) > p_S(z_c)$, пропорциональна некоторому эффективному значению a , зависящему от формы поверхности вблизи $z \sim z_c$. Сужение струи с ускорением происходит только в области с $p(z) - p_S(z) < 0$. Вытягивание (утонышение) вершины уменьшает глубину проникновения возрастающего по абсолютной величине $p_S(z_c)$. Кроме того, эффект вытеснения отрицательного давления из глубины струи ($z < z_c$) к ее окончанию создается "источниками" давления в (9) $\sim V_0^2/a^2$. В результате зона отсечки вторичной капли (минимум V_0) стремительно приближается к концу струи, а скорость отсечки резко возрастает (рис. 2, а).

Формирование сплюснутой капли лишь вначале кажется странным. Но при сферическом или эллипсоидальном (вытянутом) окончании струи с вершины такого образования вытянулась бы еще более тонкая струйка и т.д. до нулевого размера вторичных капель. С другой стороны, при $Q > Q_R$ конфигурации в виде сплюснутого эллипсоида вращения являются устойчивыми относительно малых осесимметричных деформаций [20,21]. Поскольку любые внешние поля деформируют сферическую каплю в вытянутый эллипсоид, то в реальных условиях при $Q > Q_R$, согласно предположению Басарана [21], наблюдение сплюснутых сфероидов невозможно. Однако при распаде струи такие конфигурации,

как мы видим, возникают естественным образом, если заряд вторичной капли выше критической величины. Проследим динамику струи после отрыва головной капли (рис. 2, б). Экранировка окончания струи зарядом первой капли приводит к доминированию в этой зоне лапласовского давления p_L , которое стремится сократить струю. В этих условиях срабатывает уже известный нам механизм возбуждения гофрировки поверхности [8]. Область примыкания зародыша второй капли к основной части струи ($R_2 < 0$) становится зоной пониженного давления p_S (рис. 3, вставка). Подток жидкости в эту зону из струи приводит к развитию перетяжки¹ (вставка на рис. 3) и одновременному возникновению слева от нее новой области повышенного p_S (следующего элемента гофрировки или периода поверхностной волны) из-за проявления кривизны $1/R_2$ [8]. Без учета заряда на поверхности далее процесс шел бы так, как было представлено выше (рис. 1). В данном же случае (нижняя часть рис. 3) по мере удаления головной капли снижается экранирование вершины струи (эмиттера), обуславливая подток заряда. Вытягивающее струю давление $p_E(z_c)$ увеличивается. Вторая капля устремляется вслед за первой, и электрическое поле в зоне развития гребня поверхностной волны (в будущем — третьей капли) в результате перераспределения заряда возрастает настолько, что на профиле суммарного давления p_S появляется минимум (рис. 3, точка M). Усиливается подток жидкости в эту зону, амплитуда гребня растет. Это приводит к дальнейшему накоплению заряда и отрицательному давлению p_S (вставка на рис. 4). Таким образом, начальная гофрировка, зародившаяся в ходе нелинейных волновых процессов, переходит в режим аперидической неустойчивости.

В процессе эволюции струи возникает характерный ступенчатый профиль поверхности (рис. 4), регистрируемый в экспериментах [17]. Перешеек, соединяющий вторую и третью каплю, примыкает справа и слева к зонам пониженного давления p_S . Такая ситуация заканчивается, как известно [8], разрывом струи в двух точках (см. профиль $V_0(z)$ на рис. 4, $z_{1,2} \approx 3.78, 3.88$ см) и образованием тонкого протяженного сателлита. Естественно, что он также будет распадаться по уже рассмотренным нами сценариям с генерацией множества микрокапель.

Дальнейшее течение процесса мы не рассчитывали, однако на профиле радиальной скорости (вставка на рис. 4) уже заметно формирование очередной капли. Форма вторичных капель будет приближаться к сфере по мере уменьшения во времени остаточного заряда исходной капли (электрического поля на вершине эмиттера).

¹ Развитие перетяжки в этих условиях — существенно нелинейный эффект. Согласно линейной теории, для коротковолновых возмущений поверхностное давление монотонно возрастает при изменении z от зоны минимального радиуса струи к ее уширению и перетяжка не может развиваться. Однако вследствие нелинейных эффектов в формировании профиля $p_L(z)$ в нашем случае минимум p_S находится правее перетяжки.

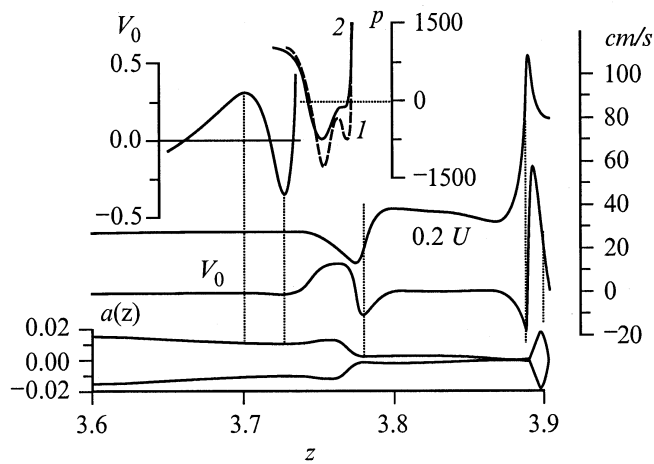


Рис. 4. Пространственные зависимости характеристик струи (продолжение рис. 3) в момент отрыва второй капли: $t = 0.0815$ s, $r_k = 0.012$ cm, отношение заряда q_k к соответствующему критическому значению q_R равно 1.277. На вставке сверху — фрагменты $V_0(z)$, $p_S(z)$ (1) и $p(z)$ (2).

Таким образом, каплеобразование полностью определяется нелинейными электрогидродинамическими явлениями на конце струи. Образованные ранее заряженные капли посредством электрических полей влияют на зарождение новых капель. Поэтому следует ожидать разброса размеров как основных капель, так и сателлитов (микрочапельный хаос такого рода наблюдается, например, в жидкометаллических источниках ионов [22]).

В рассмотренном нами варианте (рис. 2–4) относительно большие значения δ_e и вязкости жидкости (параметра μ') приводили в начале процесса к выбросу струи такого радиуса, что в основной ее части (вне зоны каплеобразования) лапласовское давление превышало электрическое (рис. 3). Для малых параметров надкритичности δ_e и больших α (меньших μ') формируется более тонкая струя, так что соотношение p_L и p_E на ее боковой поверхности изменяется: $p_L < p_E$. В этом случае после сброса части заряда мы возвратимся к прежнему (более мягкому, скажем так) режиму каплеобразования. Но начальные стадии распада струи имеют несколько иной механизм самовозбуждения гофрировки поверхности (рис. 5). Прежде чем перейти к изложению физических основ этого явления, сделаем простой математический анализ топологических свойств функции $p_S(z)$ в той части жидкости, которая может быть названа струей. В варианте рис. 2, b, 3 возрастающая слева функция ($dp_L/dz > 0$, так как $dR_1/dz < 0$) справа заканчивалась областью убывания ($dp_S(z)/dz < 0$), где накапливался электрический заряд и доминировало электрическое давление. В промежуточной области $p_S(z)$ должна иметь N максимумов и $(N - 1)$ минимумов. При $N - 1$ ("основная мода") происходит отсечка сильно заряженной вершины струи с $p_S < 0$ (для профиля рис. 2, b слева от капли-лидера $p_S > 0$). Моды $N = 2$ и более соответствуют отсечке капли с последующим

возбуждением поверхностной волны (слева от зоны отсечки) основным скачком давления (вставка на рис. 3, $N = 2$).

В варианте рис. 5 формируется довольно протяженная зона, где $p_S(z) < 0$. С точки зрения топологии нет запрета на образование максимума давления $p_S(z)$ слева от этой зоны. Такой скачок давления действительно формируется на более поздних стадиях эволюции струи и "угрожает" ее отсечкой у основания как целого. Для генерации каплей самой струей необходимо возникновение $\max p_S(z)$ в области, где на левом и правом концах $dp_S(z)/dz < 0$. Но в этих условиях возникновение экстремумов возможно только парами (\max и \min , рис. 5, a). Таким образом, одновременно с перетяжкой, отсекающей каплю от вершины струи (точка M), неизбежно развивается уширение канала течения (точка N) — прообраз следующей (второй) капли. Физически экстремумы давления $p_S(z)$ реализуются следующим образом. Если значения p_L зависят только от локальной кривизны профиля $a(z)$, то величина электрического поля помимо этого фактора определяется и распределением заряда по всей поверхности деформированной капли. На рис. 5, a снижение p_E по мере приближения к окончанию струи (где проявляется отрицательная кривизна $1/R_2$) начинается раньше, чем уменьшение давления p_L , вследствие экранирующего влияния возрастающего во времени заряда на вершине. Сдвиг максимумов p_E и p_L порождает два экстремума $p_S(z)$.

Пониженное давление $p_S(z)$ в области точки N (так же, как и избыточное лапласовское давление в ранее рассмотренном варианте; рис. 3) инициирует самовозбуждение гофрировки поверхности в направлении основания струи. Формирование второй капли приводит к накоплению электрического заряда на ее поверхности и образованию зоны отрицательной кривизны $1/R_2$ слева от нее. Создаются условия для рождения новой пары экстремумов $p_S(z)$ и т.д.

На более поздней стадии распада наблюдается своеобразный профиль поверхности (рис. 5, b), который в экспериментальной ситуации трудно не связать с некоторыми неконтролируемыми возмущениями, но, как мы видели, это — естественная эволюция заряженной струи. Если повышать параметр вязкости μ' , то при том же механизме начальной гофрировки профиль струи более сглажен (рис. 5, c).

На рис. 5, d приведены характеристики струи через $\Delta t = 1.7 \cdot 10^{-5}$ s после ее обрыва в точке $z = 1.13$ cm на рис. 5, b. Точки 1 и 2 соответствуют четвертой паре \min и $\max p_S(z)$ — на профиле $V_0(z)$ заметно формирование очередных перетяжки и гребня. В области $z \approx 1.07$ cm (вставка) образовался "главный" максимум давления $p_S(z)$. Это переходная зона между каплей и струей, в которой жидкость ускоряется в радиальном (к оси) и продольном направлениях перед входом в струю. В дальнейшем потери заряда в процессе генерации вторичных капель приведут к снижению электрического давления на поверхности струи и сокращению зоны, где $p_S(z) < 0$.

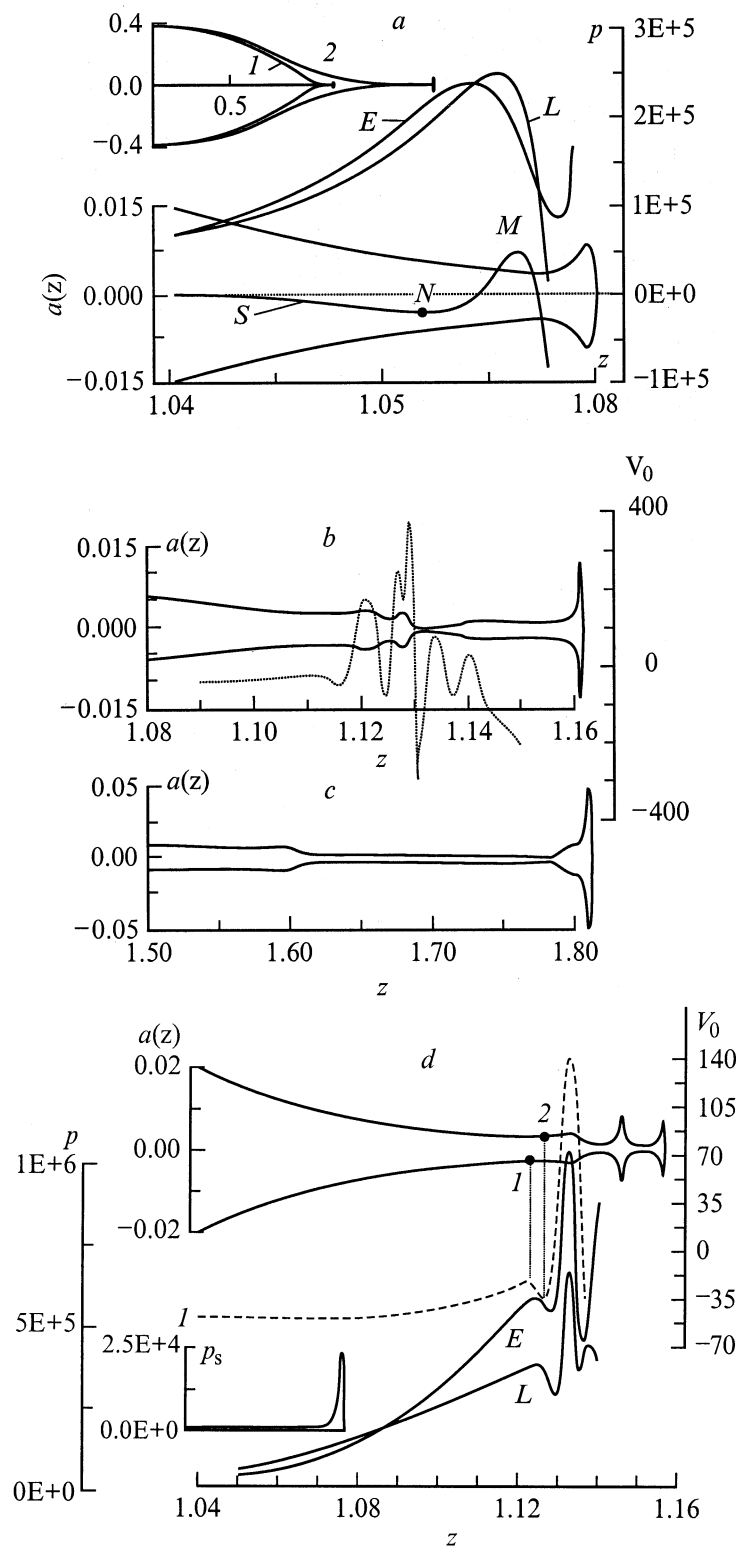


Рис. 5. Иллюстрация механизма возбуждения гофрировки поверхности струи при малых δ_e : *a* — профили поверхности и давлений для $\delta_e = 0.05$, $\alpha = 1200 \text{ g/s}^2$ при $t = 0.06177 \text{ s}$ (на вставке — полный вид зависимостей $a(z)$, представленных на рис. 5, *b* и 5, *c*); *b* — продолжение рис. 5, *a*: $a(z)$, $V_0(z)$ (пунктир) при $t = 0.06181 \text{ s}$; *c* — $a(z)$, $t = 0.1508 \text{ s}$, $\delta_e = 0.08$, $\alpha = 75 \text{ g/s}^2$; *d* — продолжение варианта рис. 5, *b*: профили поверхности струи, $p_L(z)$, $p_E(z)$, $V_0(z)$ (пунктир) через $\Delta t = 1.7 \cdot 10^{-5} \text{ s}$ после отсечки головной части струи в точке $z = 1.13 \text{ cm}$ (рис. 5, *b*). На вставке — $p_s(z)$ в интервале $[0; 1.09]$.

Каплеобразование перейдет в режим, представленный на рис. 2, *b*, 3, 4. На заключительной стадии возможна отсечка струи как целого в переходной области (подобный эффект развивается на рис. 4, $z = 3.78$ cm).

Если на струе поддерживать постоянный потенциал, то после генерации большого числа капель в межэлектродный промежуток электрическое поле на струе уменьшается из-за экранировки ее вторичными каплями. Периодическая отсечка струи от конуса Тейлора в жидкометаллических источниках ионов (ЖМИ) обусловливает низкочастотные колебания ионного тока [22]. Что касается процесса генерации ионов в этих устройствах, то на основании полученных результатов (рис. 4, 5) трудно представить, что он может идти с "полусферической вершины", как это предполагается в ряде работ по теории ЖМИ [14,22].

Возможное влияние электрического поля на величину коэффициента поверхностного натяжения в наших расчетах не учитывалось. В наиболее важной области, где происходит каплеобразование (рис. 5, *d*), $p_E > p_L$. Поправки к величине лапласовского давления не изменят физической сути рассмотренных явлений.

Всякое локальное возмущение давления в области возбуждения поверхностных волн (рис. 3, 5) затухает при удалении от зоны локализации на величину Δz пропорционально $\exp(-3|\Delta z|/r_c)$ (r_c — радиус струи) согласно (9), т.е. практически не проявляется для $\Delta z \approx \pm r_c$. В процессе самоорганизации структуры течений жидкости и профиля поверхностного давления струи формируются элементы с характерным размером $\approx 2r_c$, которые сильное электрическое поле "срывает" с вершины эмиттера. Поэтому в вариантах, представленных на рис. 4, 5, *d*, радиус капель r_k в начальный период генерации порядка радиуса струи (соответственно $r_k/r_0 \approx 2.4 \cdot 10^{-2}$ и $6 \cdot 10^{-3}$; $q_k/Q \approx 1/300, 1/700$; $q_k/q_R \approx 1.3$ и 3 , q_R — критический заряд при сферической форме капли). При снижении электрического поля на поверхности струи сценарий каплеобразования приблизится к режиму рис. 1 ($r_k \approx 1.8r_c$).

Отметим еще одну особенность генерации капель. Как мы видели выше, вторичные капели имеют вид сплюснутых сфероидов с электрическим зарядом выше критического. Такие конфигурации являются неустойчивыми относительно малых деформаций в трехосный эллипсоид [23]. Поэтому дальнейший сценарий эволюции вторичных капель мы представляем следующим образом. В экваториальной части сплюснутых сфероидов возникают микроструи и новая генерация капель. Для головных капель на рис. 4, 5 такой процесс возможен до отрыва от исходной капли. Если же избыточный заряд не слишком велик (инкремент развития неустойчивости мал), то распад вторичных капель (с выбросом струй в перпендикулярном относительно движения направлении) будет наблюдаться вблизи вершины исходной струи. В процессе генерации микрокапель заряд капли снизится до значения ниже критического. Сжатие капли в радиальном направлении под действием лапласовского

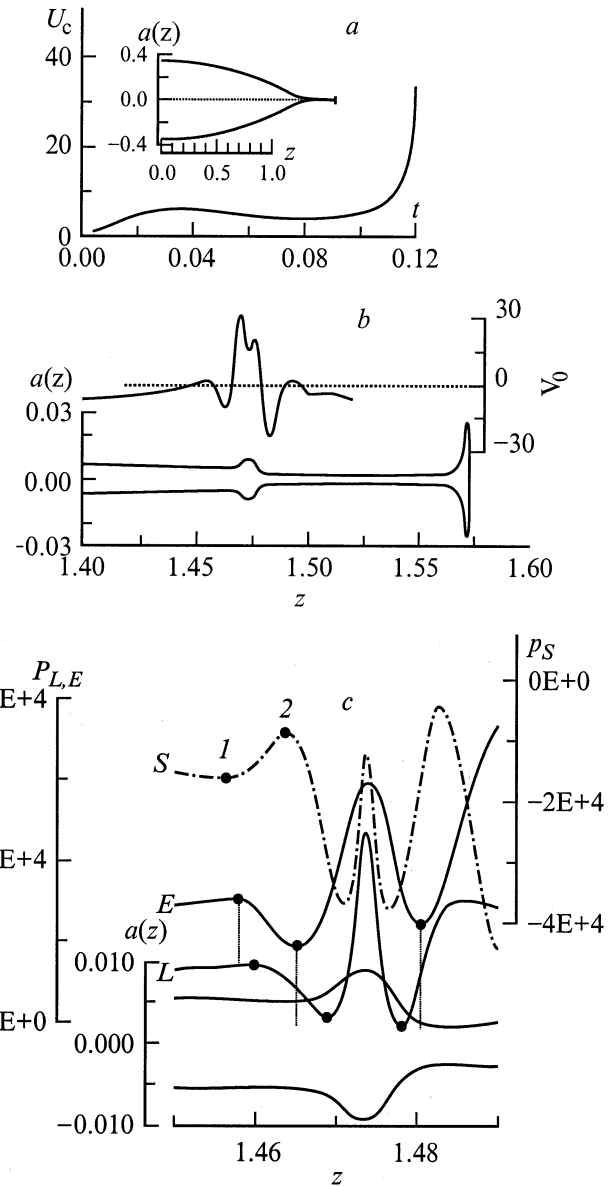


Рис. 6. Распад незаряженной капли во внешнем электрическом поле. $E = 0.9E_T$, $\alpha = 75 \text{ g/s}^2$: *a* — зависимость скорости движения вершины струи $U_c = U(z_c, t)$ от времени, на вставке — $a(z, t = 0.1228 \text{ s})$; *b* — фрагменты профиля поверхности и радиальной скорости вблизи вершины при $t = 0.1228 \text{ s}$; *c* — фрагменты зависимостей $p_L(z)$, $p_E(z)$, $p_S(z)$ и $a(z)$ в области выраженного уширения струи ($t = 0.1228 \text{ s}$). Точки экстремумов $p_S(z)$ 1 и 2 — зоны развития на поверхности струи перетяжки и следующего гребня поверхностной волны (см. профиль $V_0(z)$ на рис. 6, *b*).

давления трансформирует ее (вследствие инерции) в вытянутый эллипсоид. В этих условиях возможно развитие третьего этапа образования струй (в более далекой от эмиттера зоне) снова в продольном направлении, даже если $q_k < q_R$ [24]. Описанную динамику многоступенчатой генерации капель наблюдали авторы [16,25], однако наблюдение сплюснутых и вытянутых распадающихся

эллипсоидов они связывали с проявлением случайных аэродинамических эффектов.

В качестве иллюстрации третьего этапа капельной генерации рассмотрим распад незаряженной сферической капли во внешнем электрическом поле, которое ниже критического $E = 0.9E_T$ (критическое значение [24] $E_T = 1.625(\alpha/r_0)^{1/2}$). Вытягиваясь вдоль поля, капля по инерции проходит положение равновесия и достигает деформаций, достаточных для развития неустойчивости на ее вершинах (рис. 6, *a, b*).

На рис. 4, 5, *b, b* в областях развитого гребня поверхностной волны ($p_S(z) < 0$, $V_0 > 0$) возникают характерные зависимости $p_S(z)$, $V_0(z)$ с тремя экстремумами. На рис. 6, *c* приведена типичная структура пространственных распределений электрического и лапласовского давлений в такой зоне. В процессе развития гребня возрастают значения $p_E(z)$ и $p_L(z)$ на его вершине и уменьшаются на левом и правом склонах вследствие усиливающегося проявления отрицательной кривизны поверхности $1/R_2$. В результате начальный минимум суммарного поверхностного давления p_S , стимулирующий развитие гребня, расщепляется на два минимума, рис. 6, *c* (см. также на рис. 3 область точки *M* и на рис. 4 вставку с фрагментом $p_S(z)$). Отметим, что рост лапласовского давления на вершине гребня опережает увеличение электрического давления и ограничивает развитие неустойчивости поверхности на нелинейных стадиях. Образующиеся на вершине эмиттера сплюснутые сфероиды еще до отрыва от струи, как показали проведенные расчеты, совершают малые осесимметричные (согласно нашей модели) колебания около некоторого положения равновесия.

Таким образом, генерация капель струей хорошо проводящей заряженной жидкости определяется комплексом нелинейных электрогидродинамических процессов: возбуждением на вершине эмиттера нелинейных поверхностных волн в относительно малых электрических полях и коротковолновой аperiodической неустойчивости с образованием пар экстремумов суммарного поверхностного давления в сильных полях, формированием вторичных капель в виде сплюснутых эллипсоидов, образованием протяженных сателлитов (распадающихся на серию микрокапель по тем же сценариям, что и основная струя), поэтапным распадом вторичных капель в результате генерации микроструй поперечной и продольной, относительно направления движения (внешнего электрического поля), ориентаций.

Список литературы

- [1] Lord Rayleigh. // Proc. London Math. Soc. 1878. Vol. 10. P.4.
- [2] Назин С.С., Изотов А.Н., Шикин В.Б. // ДАН СССР. 1985. Т. 283. С. 121–125.
- [3] Гиневский А.Ф., Дмитриев А.С. // Физико-технические проблемы изучения монодисперсных систем. Сб. науч. тр. МЭИ. М., 1987. № 149. С. 5–24.
- [4] Владимиров В.В., Горшков В.Н. // ЖТФ. 1990. Т. 60. Вып. 11. С. 197–200.
- [5] Гегузин Я.Е. Капля. М., Наука, 1977. 176 с.
- [6] Tjahjadi M., Stone H.A., Ottino J.M. // J. Fluid Mech. 1992. Vol. 243. P. 297–318.
- [7] Mansour N.N., Lungren T.S. // Phys. Fluids. 1990. Vol. A2. P. 1141–1144.
- [8] Горшков В.Н., Мозырский Д.В. // ЖТФ. 1996. Т. 66. Вып. 10. С. 15–25.
- [9] Zheng C., Linsu T. // J. Vac. Sci. Technol. 1988. Vol. B6. P. 2104–2107.
- [10] Sherwood J.D. // J. Fluid. Mech. 1988. Vol. 188. P. 133–146.
- [11] Lord Rayleigh. // Phylos. Mag. 1882. Vol. 14. P. 184.
- [12] Davis E.J., Bridges M.A. // J. Aerosol Sci. 1994. Vol. 25. P. 1179–1199.
- [13] Григорьев А.И., Ширяева С.О. // ЖТФ. 1991. Т. 61. Вып. 3. С. 19–28.
- [14] Hiramoto T., Hirakawa K., Ikoma Y. // J. Vac. Sci. Technol. 1988. Vol. 6. P. 1014.
- [15] Cloupeau M., Prunet-Foch B. // J. Aerosol Sci. 1994. Vol. 25. P. 1021–1036.
- [16] Gomez A., Tang K. // Phys. Fluids. 1991. Vol. 6. P. 404–414.
- [17] Taylor G. // Proc. Roy. Soc. Lond. 1969. Vol. A313. P. 453–475.
- [18] Sci X.D., Michael P., Brenner, Sidney R. Nagel // Science. 1994. Vol. 265. P. 219–222.
- [19] Renau A., Read F.H., Brunt J.K. // J. Phys. E. 1982. Vol. 15. P. 453.
- [20] Tsamopoulos J.A., Akylas T.R., Brown R.A. // Proc. Roy. Soc. Lond. 1985. Vol. A401. P. 67–88.
- [21] Basaran O.A., Scriven L.E. // Phys. Fluids. 1989. Vol. A1. P. 795–798.
- [22] Бадан В.Е., Владимиров В.В., Горшков В.Н., Солошенко И.А. // ЖТФ. 1993. Т. 63. Вып. 6. С. 47–66.
- [23] Natarajan R., Brown R.A. // Proc. Roy. Soc. Lond. 1987. Vol. A410. P. 209–227.
- [24] Taylor G. // Proc. Roy. Soc. Lond. 1964. Vol. A280. P. 383–397.
- [25] Basaran O.A., Scriven L.E. // Phys. Fluids. 1989. Vol. A1. P. 799.