01;05;07

Модель потенциалов нулевого радиуса для планарного волновода в фотонном кристалле

© И.Ю. Попов

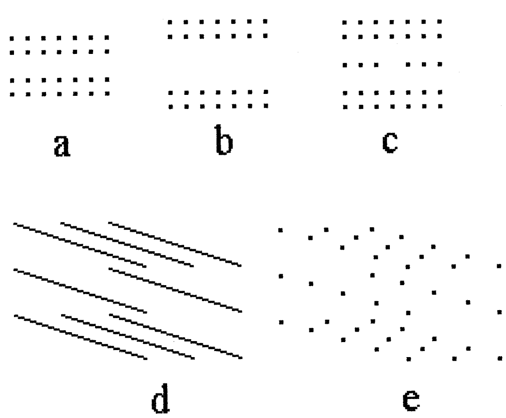
Институт точной механики и оптики, С.-Петербург

Поступило в Редакцию 9 февраля 1999 г.

Предложена модель потенциалов нулевого радиуса для описания волновода в фотонном кристалле. Рассмотрены двумерный и трехмерный случаи. Описаны слои, волноводы и связанные волноводы. Модельные дисперсионные уравнения получены в явном виде, описаны спектральные свойства.

Развитие нанотехнологии в настоящее время позволило получать материалы с периодически расположенными малыми вкраплениями вещества с другой диэлектрической проницаемостью (например, в форме малых сферических частиц или тонких параллельных нитей). При этом характерные размеры таковы: диаметр вкраплений порядка 100 nm, причем частицы занимают не более 0.1 объема. Это дало возможность получать новые оптические материалы — фотонные кристаллы (см., например, [1]), которые представляются чрезвычайно перспективными с точки зрения приложений, в частности, в волоконной оптике. Однако теоретическое описание подобных систем еще разработано недостаточно, что делает актуальным создание соответствующих теоретических методов [2–4]. В настоящей статье предлагается использовать метод потенциалов нулевого радиуса, основанный на теории самосопряженных расширений симметрических операторов [5,6], для описания различных волноводных систем в фотонных кристаллах (см. рисунок, *a–e*).

Рассмотрим фотонный кристалл в виде трехмерной кубической решетки. Пусть размеры включений малы по сравнению с длиной волны. В модели предлагается заменить их на потенциалы нулевого радиуса. Пусть один слой центров в решетке отсутствует. Тогда мы имеем волноводный слой. В случае фиксированной поляризации (например, TM), допуская гармоническую зависимость от времени, сводим задачу к уравнению Гельмгольца. Для построения модели рассмотрим сначала



Рассматриваемые структуры: двумерная квадратная решетка: с одной незаполненной линией узлов (a), с тремя незаполненными линиями узлов (b), с двумя разделенными незаполненными линиями узлов (связанные волноводы) (c); трехмерная решеточная структура (волновод), эквивалентная двумерной структуре (решетка с одним незаполненным центром) (d); трехмерная решетка с незаполненной линией узлов (волновод) (e).

отдельно трехмерную решетку и мономолекулярный слой. Пусть Λ — решетка Браве с базисом a_1, a_2, a_3, Γ — обратная решетка с базисом b_1, b_2, b_3. Рассмотрим замыкание оператора Лапласа в $L_2(\mathbf{R}^3)$, суженного на множество функций, зануляющихся в узлах решетки. Это симметрический несамосопряженный оператор. "Включить" взаимодействие нулевого радиуса — значит построить его самосопряженное расширение. Учитывая периодичность, строим модельный оператор — Δ_Λ [5], спектр которого абсолютно непрерывен и имеет вид:

$$\sigma(-\Delta_\Lambda) = \sigma_{ac}(-\Delta_\Lambda) = [E_0^\Lambda(0), E_0^\Lambda(\theta_0)] \cup [E_1^\Lambda, \infty], \tag{1}$$

где

$$\theta_0 = -\frac{1}{2}(b_1 + b_2 + b_3),$$

$$E_1^\Lambda = \min\{E_{b_-}^\Lambda(0), \frac{1}{4}|b_-|^2\}.$$

Здесь $b_-, b_- \in \{b_1, b_2, b_3\}$ таков, что $|b_-| \le |b_j|$, $j = 1, 2, 3$. $E_0^\Lambda(0)$ — первый корень уравнения

$$\alpha = (2\pi)^{-3} \lim_{\omega\to\infty} \left[\sum_{\gamma\in\Gamma, |\gamma+\theta|\le\omega} \frac{|\hat\Lambda|}{|\gamma+\theta|^2 - k^2} - 4\pi\omega \right], \quad \theta \in \hat\Lambda, \tag{2}$$

где $\hat\Lambda = \{s_1 b_1 + s_2 b_2 + s_3 b_3 \in \mathbf{R}^3, \quad s_j \in [-1/2, 1/2), \quad j = 1, 2, 3\}$,

$\hat\Lambda$ — зона Бриллюэна, θ — квазиимпульс, α — модельный параметр, связанный с "силой" потенциала.

Аналогичное рассмотрение проводится и для мономолекулярного слоя [5,7]. В результате получаем модельный оператор — Δ_{Λ_2} со следующим спектром:

$$\sigma(-\Delta_{\Lambda_2}) = \sigma_{ac}(-\Delta_{\Lambda_2})$$
$$= \begin{cases} [E_0^{\Lambda_2}(0), \infty), & \alpha \ge \alpha_{\Lambda_2}, \\ \left[E_0^{\Lambda_2}(0), E_0^{\Lambda_2}(\theta_0)\right] \cup [0, \infty), & \alpha < \alpha_{\Lambda_2}, \end{cases} \tag{3}$$

где $E_0^{\Lambda_2}(0)$, $E_0^{\Lambda_2}(\theta) = [k_0^{\Lambda_2}(\theta)]^2$ — корень уравнения

$$\alpha = (2\pi)^{-3}\pi \lim_{\omega\to\infty} \left[\sum_{\gamma\in\Gamma_2, |\gamma+\theta|\le\omega} \frac{|\hat\Lambda_2|}{|\gamma+\theta|^2 - k^2} - 2\pi\omega \right], \quad \theta \in \hat\Lambda_2, \tag{4}$$

$$\mathcal{J} k_0^{\Lambda_2}(\theta) \ge 0, \quad [k_0^{\Lambda_2}(\theta)]^2 < |\theta|^2, \quad \theta_0 = -(b_1 + b_2)/2.$$

Более того, $E_0^{\Lambda_2}(0) < E_0^{\Lambda_2}(\theta_0) < 0$ для $\alpha < \alpha_{\Lambda_2}$,

$$\alpha_{\Lambda_2} = \frac{1}{8\pi^2} \lim_{\omega\to\infty} \left[\sum_{\gamma\in\Gamma_2, |\gamma+\theta_0|\le\omega} \frac{|\hat\Lambda_2|}{|\gamma+\theta_0|^2} - 2\pi\omega \right].$$

Точно такой же анализ проводится и для линейного полимера. Спектр соответствующего модельного оператора — Δ_{Λ_1} таков:

$$\sigma(-\Delta_{\Lambda_1}) = \sigma_{ac}(-\Delta_{\Lambda_1})$$
$$= \begin{cases} [E_0^{\alpha,\Lambda_1}, \infty), & \alpha \ge -(\ln 2)/2\pi\alpha, \\ \left[E_-^{\alpha,\Lambda_1}, E_+^{\alpha,\Lambda_1}\right] \cup [0, \infty), & \alpha < -(\ln 2)/2\pi\alpha, \end{cases} \tag{5}$$

где

$$E_{\pm}^{\alpha,\Lambda_1} = -\alpha^{-2}\left\{\ln\left[\mp 1 + \frac{1}{2}e^{-4\pi\alpha a} + e^{-2\pi\alpha a}\sqrt{\frac{1}{4}e^{\pi\alpha a} \mp 1}\right]\right\}^2. \qquad (6)$$

Теперь по той же схеме строим модель проводящего слоя в фотонном кристалле. Легко видеть, что при этом возникающая в дисперсионном уравнении решеточная сумма распадается на разность соответствующих решеточных сумм для полного кристалла и для мономолекулярного слоя. Поэтому учитывая (2), (4), получаем следующее дисперсионное уравнение:

$$\alpha = (2\pi)^{-3}\left(\lim_{\omega\to\infty}\left[\sum_{\gamma\in\Gamma,|\gamma+\theta|\le\omega}\frac{|\hat{\Lambda}|}{|\gamma+\theta|^2-k^2} - 4\pi\omega\right]\right.$$
$$\left. - \pi\lim_{\omega\to\infty}\left[\sum_{\gamma\in\Gamma_2,|\gamma+\theta|\le\omega}\frac{|\hat{\Lambda}_2|}{|\gamma+\theta|^2-k^2} - 2\pi\omega\right]\right). \qquad (7)$$

Принимая во внимание поведение функций в правой части уравнения, приходим к выводу, что имеется, вообще говоря, две зоны ("зона кристалла" и "зона слоя"), которые могут пересекаться. Их положение зависит от соотношений между $E_0^{\Lambda_2}(0)$, $E_0^{\Lambda_2}(\theta_0)$, $E_0^{\Lambda}(0)$, $E_0^{\Lambda}(\theta_0)$, E_1^{Λ} (см. (1), (3)). Состояния, соответствующие "зоне слоя", описывают распространение фотона вдоль слоя, т.е. волноводный эффект.

Точно такой же анализ проводится для волноводной структуры (см. рисунок, c), только здесь роль второго слагаемого играет решеточная сумма для линейного полимера, которая приводит к появлению "волноводной" зоны, связанной с соответствующей зоной (5).

Двумерные задачи, возникающие при описании структур, состоящих из параллельных диэлектрических нитей, решаются аналогично. Необходимо лишь заменить функцию Грина для трехмерного пространства $\exp(ik|\gamma|)/(4\pi|\gamma|)$ на функцию Грина для плоскости $\frac{i}{4}H_0^{(1)}(k|\gamma|)$. Отметим, что если отсутствует не один, а несколько (n) слоев (рисунок, b), то и волноводных зон, вообще говоря, n, хотя они могут перекрываться. Это соответствует результату [8]. Можно рассмотреть и более сложную структуру — связанные волноводы (рисунок, c). При этом дополнительно к зонам появляется связанное состояние, происходящее из собственного значения уединенного потенциала нулевого радиуса на плоскости. Этот результат соответствует результатам [8] для искривленного волновода и [9], [10] для связанных волноводов с непрозрачными стенками.

Работа поддержана РФФИ и Международным научным фондом.

Автор благодарит П. Кучмента за полезные обсуждения.

Список литературы

[1] *Joannopoulos J.D., Meade R.D., Winn J.N.* Photonic Crystals. Princeton: Princeton University Press, 1995. 312 c.
[2] *Figotin A., Kuchment P.* // SIAM J. Appl. Math. 1998. V. 58. P. 683–702.
[3] *Moroz A., Tip A.* // Phys. Lett. A. 1997. V. 235. P. 195–199.
[4] *Combes J.-M.* // Int. Conf. "Rigorous Results in Quantum Mechanics", Prague, Czech Tech. Univ. 1998. Abstracts, p. 3.
[5] *Albeverio S., Gesztesy F., Hoegh-Krohn R.* Holden H. Solvable Models in Quantum Mechanics. Berlin: Springer, 1988. 566 c.
[6] *Павлов Б.С.* // УМН. 1987. Т. 42. N 6. С. 99–131.
[7] *Карпешина Ю.Е.* // ТМФ. 1983. Т. 57. N 3. С. 414–423.
[8] *Mekis A., Fan S., Joannopoulos J.D.* // Phys. Rev. B. 1998. V. 58. P. 4809–4817.
[9] *Popov I.Yu.* // Reports on Math. Phys. 1997. V. 40. P. 521–529.
[10] *Попов И.Ю.* // Письма в ЖТФ. 1999. Т. 25. N 3. С. 57–59.