

## К вопросу о квазиadiaбатическом сжатии плазменного шнура продольным магнитным полем

© В.Ф. Ермолович, А.В. Ивановский, А.П. Орлов, В.Д. Селемир

(Поступило в Редакцию 8 июня 1999 г.)

Выведены приближенные 1.5-мерные уравнения магнитной гидродинамики для описания процесса квазиadiaбатического сжатия тонкого плазменного шнура продольным магнитным полем. Получены аналитические зависимости параметров сжимаемой плазмы от начального состояния и характеристик продольного поля. Исследована устойчивость сжатия по отношению к развитию рэлей-тейлоровской неустойчивости. Показано, что при усилении продольного магнитного поля в геометрии  $Z-\Theta$ -пинча возможно радиальное сжатие плазмы в 20–30 раз без нарушения цилиндрической симметрии. Исследованы перспективы термоядерного зажигания при сжатии тонкого плазменного шнура в геометрии  $Z-\Theta$ -пинча. Оцениваются начальные плотность, температура, длина шнура, необходимые для достижения условий зажигания при сжатиях в 20–30 раз, а также требуемые для реализации таких сжатий характеристики источника электромагнитной энергии.

### Введение

Вопрос об адиабатическом сжатии плазменного шнура продольным магнитным полем исследован как теоретически, так и экспериментально в 60-ых годах (см., например, [1] и другие монографии). Основная трудность осуществления термоядерного зажигания на этом пути связана с развитием неустойчивостей в сжимаемой плазме, ограничивающих ее линейные сжатия значениями  $\delta \sim 3-5$ . Кроме того, достижению высоких температур препятствует вынос тепла вдоль силовых линий магнитного поля на торцы камеры механизмом электронной теплопроводности.

Новые технические возможности 80–90-х годов привели к росту интереса к исследованиям динамической устойчивости сжатия плазменных систем [2–4]. В частности, в геометрии  $Z-\Theta$ -пинча достигнуты сжатия плазменной оболочки  $\delta_m \sim 22$  раза [5] при прогнозируемых  $\delta_m \sim 30$  раз [6].

Успехи в получении глубоких устойчивых сжатий плазменных оболочек ставят вопрос об исследовании перспектив адиабатического сжатия плазменного шнура продольным магнитным полем  $Z-\Theta$ -пинча. При этом обострение импульса продольного поля по сравнению с разгоняющим оболочку импульсом тока более чем в 10 раз [7] снижает потери, связанные с переносом тепла электронной теплопроводностью. Актуальность исследований диктуется возможностями получения импульсов тока с амплитудой до 200 МА (реализовано 50 МА) и фронтом нарастания  $\sim 3.5 \mu\text{s}$  [8].

При сжатии со скоростью  $v_0 \cong r_0/t_m$  ( $r_0$  — начальный радиус,  $t_m$  — время сжатия), меньшей скорости магнитозвуковой волны  $v_m \cong \sqrt{v_s^2 + v_A^2}$  ( $v_s$  — скорость звука,  $v_A$  — альфвеновская скорость), процесс носит адиабатический характер. Передача импульса и давления от границы к центру осуществляется магнитозвуковыми волнами малой амплитуды. Именно такое медленное, квазиadiaбатическое сжатие с бегающими магнитозвуковыми волнами исследуется в работе. Наличие малого па-

раметра  $r_0/(v_m t_m)$  позволяет свести решение двумерных МГД уравнений к решению квазиодномерной системы уравнений.

При сжатии продольным магнитным полем наибольший инкремент нарастания имеет рэлей-тейлоровская неустойчивость, которая не возмущает магнитные силовые линии [4]. В случае бесконечного плазменного шнура квазиодномерные МГД уравнения сводятся к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, допускающей аналитическое исследование задачи об устойчивости сжатия.

Магнитозвуковые волны малой амплитуды в силу больших ускорений могут существенно влиять на устойчивость сжатия, не внося заметного искажения в адиабатические плотность и давление плазмы. Это позволяет при исследовании перспектив термоядерного зажигания рассмотреть адиабатический процесс (пренебречь инерционными членами при описании движения поперек магнитного поля), ограничивая предельные сжатия значениями, оцененными из решения задачи об устойчивости. Критерием термоядерного зажигания системы считалось равенство дупля  $W \cong 0.3-1$  [9].

Начальный разогрев плазмы можно осуществить путем поглощения  $D-T$  газом лазерного излучения (ЛИ), прохождения ударной волны (ступенчатый  $\Theta$ -пинч), путем испарения и прогрева твердой мишени ЛИ и т.д.

### Основные уравнения

Рассматривается плазменный шнур длиной  $L$ , удерживаемый в вакууме аксиальным магнитным полем  $B = B_s(t)$ . Если пренебречь диффузией поля, то для определения плотности  $\rho$ , температуры  $T$ , радиальных  $v_r$ ,  $B_r$  и аксиальных  $v_z$ ,  $B_z$  компонент скорости и магнитного поля в плазме необходимо решить уравнения идеальной магнитной гидродинамики ( $\gamma = 5/3$ )

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r \rho v_r) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) = 0,$$

$$\begin{aligned}
\rho \left( \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial P}{\partial r} \\
&\quad - \frac{1}{\mu_0} B_z \frac{\partial B_z}{\partial r} + \frac{1}{\mu_0} B_z \frac{\partial B_r}{\partial z}, \\
\rho \left( \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial P}{\partial z} \\
&\quad - \frac{1}{\mu_0} B_r \frac{\partial B_r}{\partial z} + \frac{1}{\mu_0} B_r \frac{\partial B_z}{\partial r}, \\
\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r P) + \frac{\partial}{\partial z} (v_z P) &= (\gamma - 1) \\
&\times \left[ \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda_{\parallel}^e \frac{\partial T}{\partial z} \right) - P \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) - Q_r \right], \\
\frac{\partial B_r}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial z} (v_r B_z - v_z B_r), \\
\frac{\partial B_z}{\partial t} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r (v_z B_r - v_r B_z)]. \quad (1)
\end{aligned}$$

В уравнениях (1)  $\lambda_{\parallel}^e$  — коэффициент электронной теплопроводности вдоль силовых линий магнитного поля,  $Q_r$  — мощность объемных потерь энергии на излучение. Ионной и электронной теплопроводностями поперек силовых линий магнитного поля пренебрегаем. Давление определяется из уравнения состояния  $P = 2A\rho T$ , где  $A$  — рассчитанная на единицу массы газовая постоянная. Из условия  $\text{div}(\mathbf{B}) = 0$  оценим  $B_r$  значением ( $r_s$  — радиус шнура)

$$\begin{aligned}
B_r &= -\frac{1}{r} \int_0^r r \frac{\partial B_z}{\partial z} dr \approx -\frac{r}{2} \frac{\partial B_z}{\partial z} (r=0) \\
&\approx \frac{r_s}{2L} B_z (r=0). \quad (2)
\end{aligned}$$

Для тонкого шнура ( $r_s/L \ll 1$ ) можно пренебречь влиянием  $B_r$  на движение плазмы, а также продольным градиентом поперечной скорости  $v_z \partial v_r / \partial z$  по сравнению с поперечным  $v_r \partial v_r / \partial r$  и упростить (1) до

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho v_r) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) &= 0, \\
\rho \left( \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) &= -\frac{\partial P}{\partial r} - \frac{1}{\mu_0} B_z \frac{\partial B_z}{\partial r}, \\
\rho \left( \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial P}{\partial z}, \\
\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r P) + \frac{\partial}{\partial z} (v_z P) &= (\gamma - 1) \\
&\times \left[ \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda_{\parallel}^e \frac{\partial T}{\partial z} \right) - P \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) - Q_r \right], \\
\frac{\partial B_r}{\partial t} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r v_r B_z]. \quad (3)
\end{aligned}$$

Предполагается, что в начальный момент времени плазма однородна и неподвижна, т.е. плотность

$\rho|_{t=0} = \rho_0$ , давление  $P|_{t=0} = P_0$ , скорости  $v_r|_{t=0} = v_z|_{t=0} = 0$ , аксиальная компонента магнитного поля, удовлетворяющая условию

$$(P + B_z^2/2\mu_0)|_{r=r_s(t)} = B_s^2/2\mu_0, \quad (4)$$

определяется из  $B_z^2|_{t=0} = B_0^2 - 2\mu_0 P_0$  ( $B_0 = B_s|_{t=0}$ ).

Типичное решение уравнений (3) для бесконечного шнура ( $\partial/\partial z \equiv 0$ ,  $v_z \equiv 0$ ) представлено на рис. 1, где построены зависимости от времени безразмерных координаты  $r'_s = r_s/r_0$ , скорости  $\vartheta = v_r \cdot t_m/r_0$  и ускорения  $g = \partial\vartheta/\partial\tau + \vartheta \cdot \partial\vartheta/\partial r'$  границы плазмы ( $r_0$  — начальный радиус,  $t_m$  — время сжатия,  $\tau = t/t_m$ ) при безразмерной альфвеновской скорости  $\vartheta_A = [B_0 t_m / (\mu_0 \rho_0 r_0)]^{1/2} = 30$  и плазменном параметре  $\beta = (2\mu_0 P_0)/B_0^2 = 0.5$ . На фоне плавного адиабатического сжатия возникают высокочастотные колебания, особенно ярко проявляющиеся в зависимости ускорения от времени. Колебания связаны с возбуждением магнитозвуковых волн, передающих импульс и давление от границы к центру.

Анализ пространственных распределений показывает, что при  $\vartheta_A \geq 10$  амплитуда магнитозвуковых волн мала, т.е. вызываемые ими скачки плотности и давления незначительно искажают адиабатические профили. Поэтому в первом приближении считаем сжатие однородным  $\rho(z, r, t) = \rho(z, t)$ ;  $P(z, r, t) = P(z, t)$ . При этом из уравнения непрерывности системы (3) следует

$$\begin{aligned}
v_r(r, z, t) &= v_s(z, t) \frac{r}{r_s(z, t)}, \quad v_s(z, t) = \frac{\partial r_s(z, t)}{\partial t}, \\
v_z(r, z, t) &= v_z(z, t). \quad (5)
\end{aligned}$$

Из (5) и последнего уравнения системы (3) получаем связь  $v_r$  с аксиальной компонентой магнитного поля в плазме  $B_z$  или радиусом границы шнура  $r_s$

$$v_r = -0.5S(z, t)r, \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned}
S(z, t) &= \frac{1}{B_z(z, t)} \frac{\partial B_z(z, t)}{\partial t}, \\
B_z(z, t) &= \sqrt{B_0^2 - 2\mu_0 P_0} \frac{r_0^2}{r_s^2(z, t)}.
\end{aligned}$$

Подставляя  $v_r$  из (6) в первое, третье и четвертое уравнения (3), получаем

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) &= \rho S(z, t), \\
\rho \left( \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial P}{\partial z}, \\
\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} (v_z P) &= (\gamma - 1) \left[ \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda_{\parallel}^e \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right. \\
&\quad \left. - P \frac{\partial v_z}{\partial z} - Q_r \right] + \gamma P S(z, t),
\end{aligned}$$

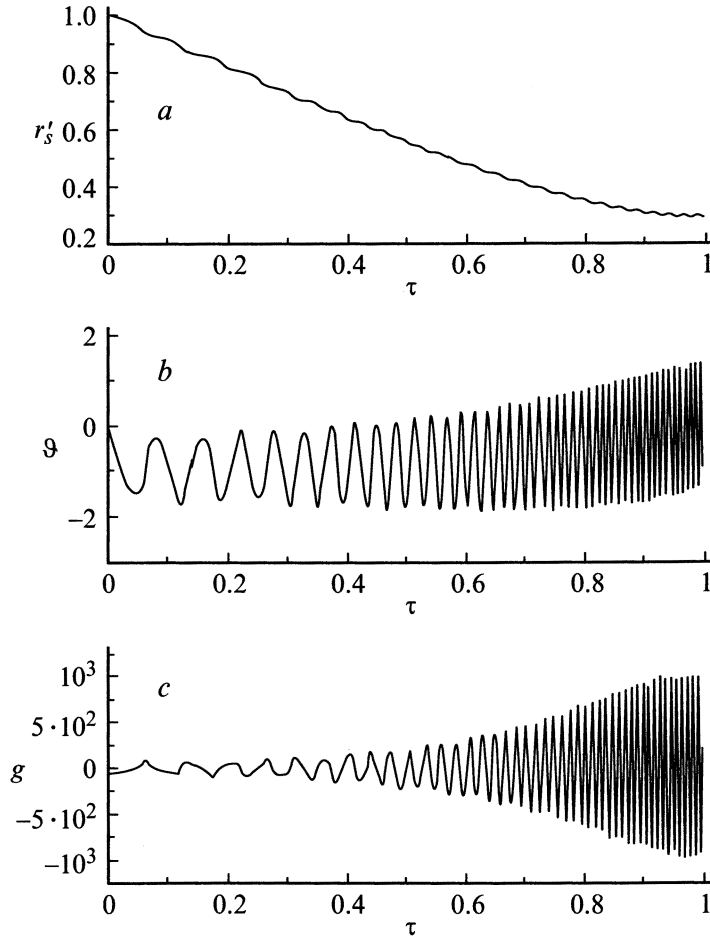


Рис. 1. Зависимость от времени координаты (а), скорости (b) и ускорения (с) границы плазменного шнура.

$$S(z, t) = \frac{1}{B_z(z, t)} \frac{\partial B_z(z, t)}{\partial t},$$

$$B_z(z, t) = \sqrt{B_0^2 - 2\mu_0 P_0} \frac{r_0^2}{r_s^2(z, t)}. \quad (7)$$

Для замыкания уравнений квазиadiaбатического сжатия тонкого плазменного шнура (7) необходимо связать радиус границы  $r_s$  с параметрами плазмы. Эта связь определяется уравнением радиального движения системы (3). С использованием (5) получаем

$$\rho r \frac{\partial v_s}{\partial t} = -r_s \frac{\partial}{\partial r} \left( P + \frac{B_z^2}{2\mu_0} \right). \quad (8)$$

Интегрируя (8) по  $dr$  от 0 до  $r_s$  с граничным условием (4), имеем

$$m \frac{\partial v_s}{\partial t} = 2\pi r_s \left( P(r=0) + \frac{B_z^2(r=0)}{2\mu_0} - \frac{B_s^2}{2\mu_0} \right). \quad (9)$$

Оценивая погонную массу  $m = 2\pi \int_0^{r_s} \rho r dr \cong \pi r_s^2 \rho$  ( $r = 0$ ), с учетом приближения однородного сжатия

$\rho = \rho(r = 0)$ ,  $P = P(r = 0)$ ,  $B_z = B_z(r = 0)$  и соотношений (6) получаем

$$\rho r_s \frac{\partial^2 r_s}{\partial t^2} = 2 \left( P + \frac{B_z^2}{2\mu_0} - \frac{B_s^2}{2\mu_0} \right). \quad (10)$$

Для решения уравнений (7), (10) необходимо задать условия на торцах шнура. Будем считать, что плазменный шнур ограничен жесткими стенками  $-v_z(z = 0, L) = 0$  с заданными потоками тепла  $-(\lambda_{||}^e \partial T / \partial z)|_{z=0} = q_1$ ,  $-(\lambda_{||}^e \partial T / \partial z)|_{z=L} = q_2$  или температурой  $T|_{z=0} = T_1$ ;  $T|_{z=L} = T_2$ .

Сравнительный анализ численных решений (3), (4) и (7), (10) для бесконечного плазменного шнура показал, что магнитозвуковым волнам в точном решении соответствуют однородные объемные осцилляции величин в квазиadiaбатической модели, т. е. квазиadiaбатическая модель передает решение с точностью до времени прохождения магнитозвуковой волной радиуса шнура. При  $\vartheta_A \rightarrow \infty$  наблюдается асимптотический выход квазиadiaбатических амплитуд колебаний скорости, ускорения на точные. При  $\vartheta_A \geq 10$  различие в наиболее чувствительной характеристике — ускорении (рис. 1)

не превышает  $\leq 40\%$ . Это позволяет провести анализ устойчивости сжатия плазменного шнура в рамках квазиadiaбатической модели.

## Анализ решения

В случае бесконечного плазменного шнура и  $Q_r = 0$  уравнения (7), (10) для безразмерных  $r'_s = r_s/r_0$ ,  $\tau = t/t_m$ ,  $\rho' = \rho/\rho_0$ ,  $p = P/P_0$ ,  $H = B_z/B_0$ ,  $f(\tau) = B_s(\tau)/B_0$  сводятся к ( $\dot{r}'_s = \partial^2 r'_s / \partial \tau^2$ ,  $\dot{r}'_s / \partial \tau$ ,  $\dot{r}'_s = \partial r'_s / \partial \tau$ )

$$\begin{aligned} \dot{r}'_s &= \vartheta_A^2 [(1 - \beta)r'^{-3}_s + \beta r'^{-2\gamma+1}_s - r'_s f^2(\tau)], \\ \rho' &= r'^{-2}_s, \quad p = r'^{-2\gamma}_s, \quad H = \sqrt{1 - \beta} r'^{-2}_s, \\ r'_s|_{\tau=0} &= 1, \quad \dot{r}'_s|_{\tau=0} = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Линеаризуем первое уравнение (11), представив  $r'_s$  в виде (рис. 1)

$$r'_s(\tau) = r_0(\tau) + r_1(\tau), \quad |r_1| \ll r_0, \quad (12)$$

где  $r_0(\tau)$  — решение (11) при  $\vartheta_A \rightarrow \infty$  (адиабатическое решение).

Подставляя (12) в (11) и разлагая правую часть в ряд Тейлора в окрестности  $r'_s = r_0$ , получаем уравнения для определения  $r_1(\tau)$

$$\begin{aligned} \beta r_0^{-2\gamma} + (1 - \beta)r_0^{-4} &= f^2(\tau), \\ \ddot{r}_1 &= \vartheta_A^2 [-3(1 - \beta)r_0^{-4} + \beta(1 - 2\gamma)r_0^{-2\gamma} - f^2(\tau)]r_1 - \ddot{r}_0. \end{aligned} \quad (13)$$

Из первого уравнения определяется средний, адиабатический радиус границы плазмы  $r_0$  из второго по полученному  $r_0$  находится быстроосциллирующая поправка, связанная с магнитозвуковыми волнами. Для диамагнитной ( $\beta = 1$ ) и замагниченной плазмы ( $\beta = 0$ ) из (13) следует

$$\dot{r}'_s + 2\alpha_1 \vartheta_A^2 f^2(\tau) r'_s = 2\alpha_1 \vartheta_A^2 f^2(\tau) r_0, \quad (14)$$

где

$$\alpha_1 = \begin{cases} \gamma, & \beta = 1, \\ 2, & \beta = 0, \end{cases} \quad r_0 = f^{-1/\alpha_1}.$$

Рассмотрим три способа усиления аксиального магнитного поля.

1.  $B_s$  создается линейно нарастающим током соленоида — классический  $\Theta$ -пинч

$$f(\tau) = 1 + (\alpha - 1)\tau. \quad (15)$$

2. Компрессия магнитного потока разогнанным цилиндрическим лайнером. Такой способ реализован в магнитокумулятивных генераторах (МКГ) [10] и

$$f(\tau) = \alpha [1 + (\alpha - 1)(1 - \tau)^2]^{-1}. \quad (16)$$

В (15), (16)  $\alpha = B_m/B_0$  — усиление магнитного поля.

3. Компрессия магнитного потока разгоняемым током цилиндрическим лайнером ( $Z - \Theta$ -пинч [6]). В этом случае при токе  $J(t) = J_m h(\tau)$  временная зависимость импульса магнитного поля может быть представлена в виде  $f(\tau) = \xi^2$ , где безразмерный радиус лайнера  $1/\xi(\tau)$  определяется из решения уравнения [7]

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \xi}{d\tau^2} &= \frac{a}{\xi} \left[ -h^2(\tau) + \frac{(1 - \xi^4)}{b^2 \xi^2} \right], \\ a &= \frac{\mu_0 J_m^2 t_m^2}{4\pi m a_a^2}, \quad b = \frac{\mu_0 J_m}{2\pi B_0 a_0}, \\ \xi|_{\tau=0} &= 1, \quad \left. \frac{d\xi}{d\tau} \right|_{\tau=0} = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

В уравнении (17)  $m, a_0$  — погонная масса и начальный радиус лайнера; величина  $b \cong \alpha^{1/2}$  и для замагниченной плазмы ( $\beta \ll 1$ ) близка к максимальному сжатию плазмы  $\delta$ . При зависимости тока от времени вида  $h(\tau) = \sin(\pi/2\tau)$  для  $10 \leq \alpha \leq 100$  максимальные сжатия достигаются при  $a \approx 4$  в момент  $\tau \approx 1.1$ .

В квазиadiaбатическом приближении решение (14) ищем путем разложения в ряд по степеням  $1/\vartheta_A$  ( $\vartheta_A \rightarrow \infty$ ) [11]. В случаях  $\Theta$ -пинча и МКГ, ограничиваясь первыми членами разложения, можно получить

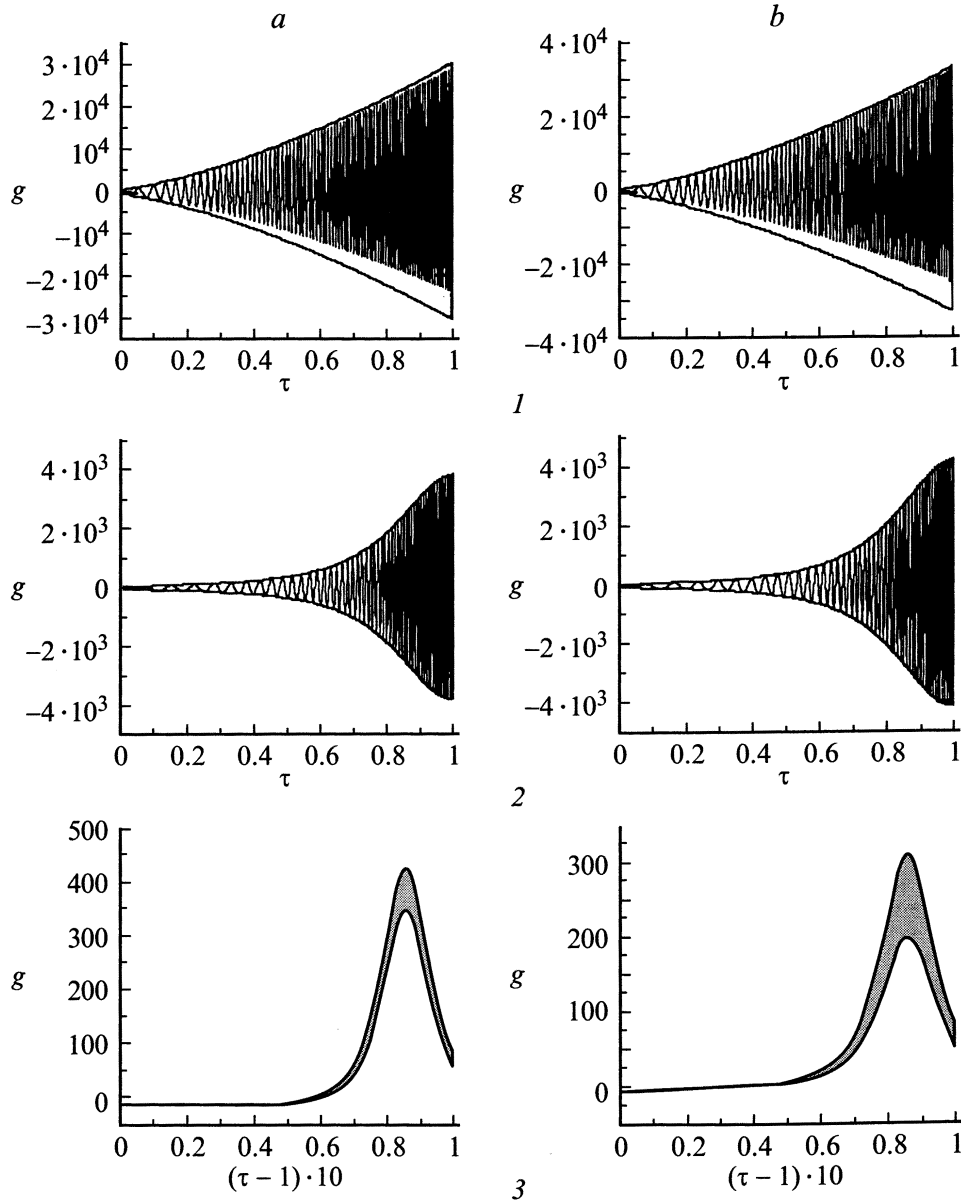
$$\begin{aligned} g(\tau) &= \ddot{r}_0(\tau) \cong \ddot{r}_0(\tau) + \sqrt{2\alpha_1} \vartheta_A \dot{r}_0(0) f^{3/2}(\tau) \\ &\times \sin\left(\sqrt{2\alpha_1} \vartheta_A \int_0^\tau f(\tau') d\tau'\right), \end{aligned} \quad (18)$$

где  $\ddot{r}_0(\tau)$  — ускорение адиабатического движения,  $\dot{r}_0(0)$  — начальная адиабатическая скорость ( $\dot{r}_0(0) = -(\alpha - 1)/\alpha_1 - \Theta$ -пинч,  $\dot{r}_0(0) = -2/\alpha_1(\alpha - 1)/\alpha - \text{МКГ}$ ).

Для  $Z - \Theta$ -пинча первые три производные от адиабатического радиуса  $r_0$  при  $\tau = 0$  равны нулю,  $\ddot{r}_0(0) = -\pi^2 a / \alpha_1$  (см. (7)). Разлагая до  $\vartheta_A^{-4}$ , можно получить

$$\begin{aligned} g(\tau) &\cong \ddot{r}_0(\tau) + \frac{\ddot{r}_0(0)}{2\alpha_1 \vartheta_A^2} f^{3/2}(\tau) \\ &\times \cos\left(\sqrt{2\alpha_1} \vartheta_A \int_0^\tau f(\tau') d\tau'\right), \end{aligned} \quad (19)$$

На рис. 2 приведены зависимости ускорений от времени, полученные путем решения (11), и огибающие ускорений, полученные из (18), (19) при  $\sin(\dots)$  ( $\cos(\dots)$ ) =  $\pm 1$ . Разложения (18), (19) хорошо описывают  $g(\tau)$  для случаев МКГ и  $Z - \Theta$ -пинча. Отклонение асимптотического решения от точного в случае  $\Theta$ -пинча (рис. 2, а) связано с ростом коэффициентов ряда с увеличением  $\alpha$ . Уточнение можно сделать путем учета последующих членов.



**Рис. 2.** Зависимости ускорения от времени для  $v_A^2 = 10^3$ . 1 — классический  $\Theta$ -пинч,  $\alpha = 16$ ; 2 — МКГ,  $\alpha = 16$ ; 3 — Z- $\Theta$ -пинч,  $\alpha = 400$ ;  $\beta = (a), 1 (b)$ .

Таким образом, решение задачи представляется в виде суммы медленной адиабатической и быстроосциллирующей, с растущей по времени частотой, составляющих. Координата границы плазмы определяется в основном первым слагаемым. Быстроосциллирующая часть влияет на ускорение, т.е. на устойчивость сжатия. Степень влияния зависит от способа реализации сжатия: для классического  $\Theta$ -пинча и МКГ ускорение плазмы определяется быстроосциллирующей, для Z- $\Theta$ -пинча — адиабатической составляющей; для  $\Theta$ -пинча и МКГ амплитуда быстроосциллирующей составляющей ускорения  $g_m$  растет линейно с альфвеновской скоростью  $v_A$ , для Z- $\Theta$ -пинча —  $g_m$  падает квадратично с ростом  $v_A$  и решение стремится к адиабатическому.

### Устойчивость сжатия

Относительный рост возмущений на линейной стадии оценивается из

$$\Gamma = \exp\left(\int_0^1 \sigma(\tau) d\tau\right). \quad (20)$$

В случае сжатия плазмы продольным магнитным полем инкремент нарастания рэлей-тейлоровской неустойчивости имеет вид

$$\sigma(\tau) = \begin{cases} 0, & g(\tau) \geq 0, \\ \sqrt{\frac{m}{r'_s(\tau)} |g(\tau)|}, & g(\tau) < 0. \end{cases} \quad (21)$$

Считаем, что цилиндрическая симметрия нарушается при  $\Gamma = \Gamma_m = 100$  [2]. Оценивая  $g(\tau)$  быстроосциллирующей составляющей (см. (18)),  $r'_s(\tau) \cong \cong r_0(\tau) = f^{-1/\alpha_1}$  — адиабатическим значением, для  $\Theta$ -пинча и МКГ получим

$$\int_0^1 \sigma(\tau) d\tau \cong \frac{(2\alpha_1)^{1/4}}{2} \sqrt{m\vartheta_A |\dot{r}_0(0)|} \int_0^1 f^{3/4+1(2\alpha_1)} \times \sqrt{|\sin[\sqrt{2\alpha_1}\vartheta_A \int_0^1 f(\tau) d\tau]|} d\tau. \quad (22)$$

При  $\vartheta_A \gg 1$  можно оценить (22) суммой ряда по полупериодам синусоиды и заменить суммирование на интегрирование по  $d\tau$ . В результате имеем

$$\int_0^1 \sigma(\tau) d\tau = \frac{(2\alpha_1)^{1/4}}{2\sqrt{\pi}} \Gamma(3/4) \sqrt{m\vartheta_A |\dot{r}_0(0)|} \times \int_0^1 f^{3/4+1(2\alpha_1)} d\tau, \quad (23)$$

$$\Gamma(3/4) = 1.2254.$$

Особенно просто (23) переписывается для замагниченной плазмы  $\beta = 0$  ( $\alpha_1 = 2$ )

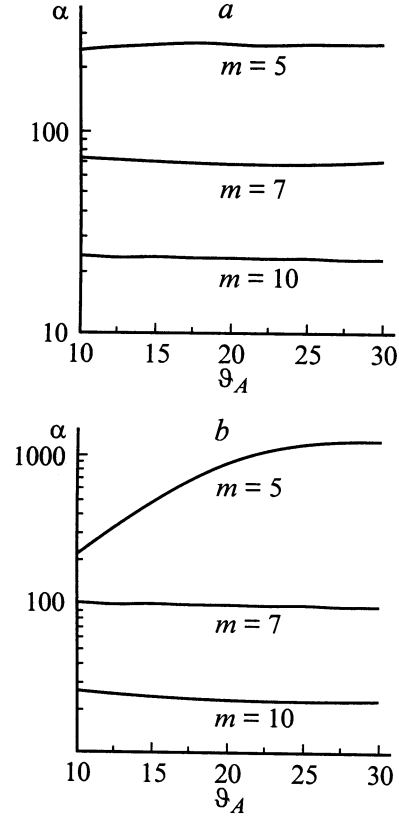
$$\int_0^1 \sigma(\tau) d\tau = \frac{\Gamma(3/4)}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{m\vartheta_A |\dot{r}_0(0)|} \int_0^1 f(\tau) d\tau. \quad (24)$$

Из (20), (24), (15), (16) имеем условия устойчивого сжатия (УТС) замагниченной плазмы

$$\vartheta_A = \frac{2\pi \ln^2(\Gamma_m)}{m \Gamma^2(3/4)} \begin{cases} \frac{8(\alpha-1)}{(\alpha^2-1)^2}, & \Theta\text{-пинч,} \\ \frac{1}{\alpha \arctg(\sqrt{\alpha-1})}, & \text{МКГ.} \end{cases} \quad (25)$$

С ростом  $\vartheta_A$  и  $m$  устойчивость сжатия ухудшается. Максимальное усиления магнитного поля без нарушения цилиндрической симметрии при  $\vartheta_A = 10$ ,  $m = 1$  составляет  $\alpha = 3.6$  ( $\delta \cong 2$ ) для  $\Theta$ -пинча;  $\alpha = 5.5$  ( $\delta \cong 2.4$ ) для МКГ, т. е. для  $\Theta$ -пинча и МКГ в квазиадиабатическом режиме ( $\vartheta_A \geq 10$ ) предельные сжатия  $\delta \geq 3$  с сохранением цилиндрической симметрии нереализуемы. В диамагнитной плазме устойчивость может улучшиться за счет частичного снижения быстроосциллирующей части  $g(\tau)$  электронной теплопроводностью.

Для  $Z$ - $\Theta$ -пинча значения  $g(\tau)$  определяются в основном адиабатической составляющей. На рис. 3 приведены зависимости предельного усиления поля  $\alpha$  от параметра  $\vartheta_A$  для различных  $m$ , полученных из решения (14), (17), (20), (21). Величины  $\alpha$  значительно выше реализуемых в случаях  $\Theta$ -пинча и МКГ.



**Рис. 3.** Зависимость усиления магнитного поля  $\alpha$  от альфвеновской скорости  $\vartheta_A$  для различных значений  $m$  (*a, b* — то же, что и на рис. 2).

Предельное сжатие определяется наивысшей из развиваемых мод рэлей-тейлеровской неустойчивости. Рост инкрементов при больших  $m$  ограничивается диссипативными механизмами: поперечной диффузией, проводимостью плазмы, вязкостью и т.д. [1,12]. Условия сжатия улучшаются введением легкого (не влияющего на динамику сжатия) шира магнитного поля [4]. Оценим предельные  $\delta$  для случая ограничения роста инкрементов широм.

При протекании по поверхности плазменного шнура постоянного тока  $I_0$  азимутальное магнитное поле вблизи границы меняется по закону

$$B_\varphi(t) = \frac{I_0}{2\pi r_s(t)}. \quad (26)$$

Для однородного сжатия с азимутальным магнитным полем (26) инкремент нарастания рэлей-тейлеровской неустойчивости  $\sigma(t)$  имеет вид [4,12]

$$\sigma^2(t) = \sqrt{k^2 + \frac{m^2}{r_s^2(t)} |g(t)|} - \frac{[kB(t)]^2 + [kB_s(t) + m \frac{mB_\varphi(t)}{r_s}]^2}{\mu_0 \rho(t)}, \quad (27)$$

где  $|k| = 2\pi/\lambda$ ,  $\lambda$  — длина волны возмущения вдоль оси плазмы.

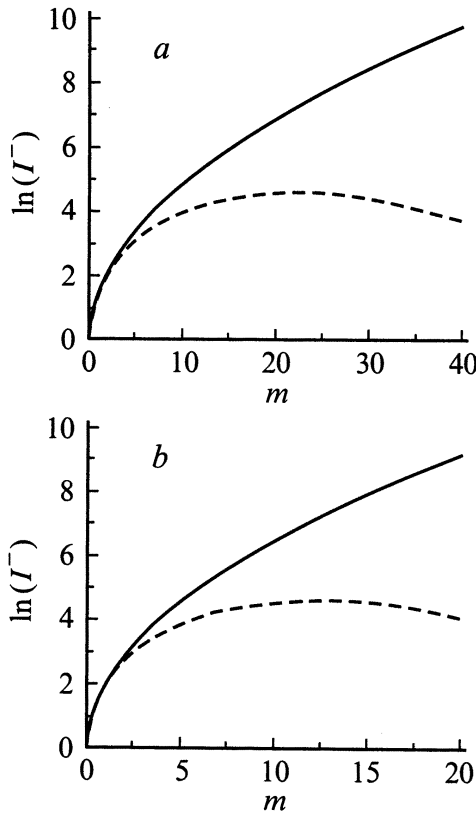
С учетом (11) для безразмерного инкремента  $\sigma(\tau) = \sigma(t)t_m$  получаем

$$\sigma^2(\tau) = \sqrt{k'^2 + \frac{m^2}{r_s'^2} |g(t)| - \frac{\vartheta_A^2}{r_s'^2}} \times \left\{ (1 - \beta)k'^2 + [k'f(\tau)r_s'^2 + mB_{\perp}]^2 \right\}, \quad (28)$$

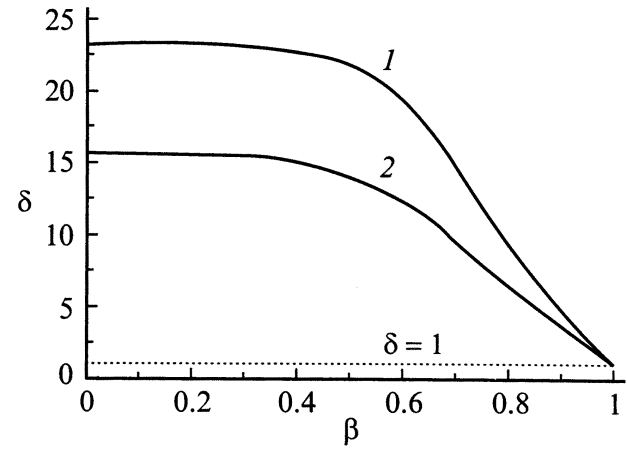
где  $k' = kr_0$ ,  $g(\tau) = g(t)t_m^2/r_0$ ,  $B_{\perp} = I_0/(2\pi r_0 B_0)$ ,  $f(\tau)$  определяется (17).

Второй и третий член (28) стабилизируют развитие рэлей-тейлоровской неустойчивости при больших  $m$  вследствие дополнительного натяжения магнитных силовых линий в плазме и вакууме соответственно.

На рис. 4 сравниваются полученные для  $\vartheta_A = 15$  при  $B_{\perp} = 0$  и  $B_{\perp} = 0.02, 0.03$  зависимости роста возмущений от  $m$  для замагниченной плазмы ( $\beta = 0$ ). В случае  $B_{\perp} \neq 0$  при выполнении расчетов значение  $k'$  варьировалось ( $k' \ll 1$ ) для получения максимального для данного  $m$  роста возмущений. Наличие шира приводит к ограничению роста возмущений с ростом  $m$ . При увеличении  $B_{\perp}$  от 0.02 до 0.03 максимум интегрального инкремента смещается от моды  $m = 21$  к  $m = 12$ , что соответствует росту предельного сжатия от  $\delta = 5.69$  ( $\alpha = 32.3$ ) до  $\delta = 15.7$  ( $\alpha = 243$ ). С ростом  $\vartheta_A$



**Рис. 4.** Зависимость интегрального инкремента роста возмущений от номера гармоники.  $\vartheta_A = 15$ ,  $\beta = 0$ . (Сплошная кривая —  $B_{\perp} = 0$ , штриховая —  $B_{\perp} \neq 0$ ). *a* —  $B_{\perp} = 0.02$ ,  $\alpha = 32.3$ ; *b* —  $B_{\perp} = 0.03$ ,  $\alpha = 247$ .



**Рис. 5.** Зависимость предельных сжатий от степени замагниченности плазмы: 1 —  $\vartheta_A = 25$ ,  $B_{\perp} = 0.02$ ; 2 —  $\vartheta_A = 15$ ,  $B_{\perp} = 0.03$ .

(времени сжатия) условия сжатия улучшаются. Значение  $\delta = 30$  достигается для  $B_{\perp} = 0.02$  при  $\vartheta_A \cong 27$ , для  $B_{\perp} = 0.03$  при  $\vartheta_A \cong 17.5$ . Фактически в геометрии Z-Θ-пинча при  $\vartheta \geq 20$  устойчивость сжатия плазменного шнура определяется устойчивостью сжатия оболочки  $\delta_m \cong 22-30$  [5,6].

В диамагнитной плазме ( $\beta = 1$ ) каждому значению  $m$  соответствует

$$k' = -m \frac{B_{\perp}}{r_s'^2(\tau)f(\tau)} \approx -mB_{\perp}, \quad (29)$$

обнуляющее стабилизирующий член в (28), т.е. для диамагнитной плазмы насыщение роста инкрементов с ростом  $m$  широм неэффективно. Зависимости предельных сжатий от  $\beta$  приведены на рис. 5. Видно, что с точки зрения устойчивости сжатия плазма близка к идеальной при  $\beta \leq 0.5$ .

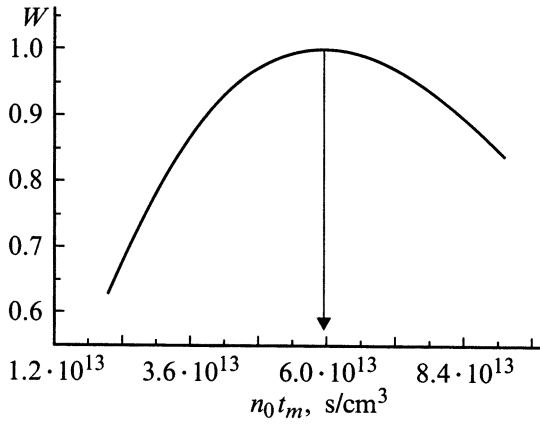
### Перспективы зажигания

Рассмотрим возможность реализации термоядерного зажигания разогретой 50%D-50%D плазмы, сжимаемой в геометрии Z-Θ-пинча. Критерием зажигания системы с массой  $M$  будем считать равенство дупля  $W$  [9]

$$W = \frac{1}{M} \int \int \int_{V(t)} \frac{Q_{nf}}{E_T} dV dt \cong 0.3-1, \quad (30)$$

где  $Q_{nf}$  — мощность термоядерного энерговыделения, поглощаемого единицей объема плазмы;  $E_T$  — внутренняя энергия единицы массы сжимаемой плазмы, рассчитанная без учета термоядерного энерговыделения (по холодному газу).

Считаем, что нейтроны покидают плазму, т.е. не вносят вклада в  $Q_{nf}$ . Ларморовский радиус  $\alpha$ -частицы  $r_{\alpha} = (2E_{\alpha}m_{\alpha})^{1/2}/(eB_z)$  с энергией  $E_{\alpha} \sim 3.5 \text{ MeV}$



**Рис. 6.** Зависимость значения дупля от произведения начальной концентрации плазмы на длительность сжатия при  $\beta = 0.1$ ,  $\delta = 20$ ,  $T_0 = 232$  eV.

в продольном магнитном поле плазменного шнура  $B_z = B_0(r_0/r_s)^2 = B_0\delta^2$  определяется из

$$\frac{r_\alpha}{r_s} = \frac{\sqrt{2E_\alpha m_\alpha}}{eB_0 r_0} \frac{1}{\delta} \cong \frac{0.54}{H_0 r_0} \frac{1}{\delta}, \quad (31)$$

где начальная напряженность магнитного поля  $H_0$  измеряется в MGs; радиус шнура  $r_0$  в см. Видно, что в случае  $H_0 \geq 0.1$  MGs,  $\delta \geq 10$  радиус плазменного шнура  $r_s \geq r_\alpha$  ( $r_0 \sim 1$  см) и энергия  $\alpha$ -частиц остается в плазме.

Мощность потерь энергии на излучение  $Q_r$  определяется объемным тормозным излучением, имеющим наибольшую интенсивность в области мягкого рентгеновского спектра. Потерями энергии вследствие магнитотормозного излучения пренебрегаем. Это можно оправдать малостью пробегов излучения в диапазоне от инфракрасного до ультрафиолетового областей спектра и переотражением от лайнерной системы [13].

При исследовании процессов термоядерного зажигания пренебрежем быстроосциллирующей составляющей решения. Это эквивалентно пренебрежению инерционными членами при описании движения поперек магнитного поля, т. е. уравнение (10) запишется в виде

$$P + \frac{B_z^2}{2\mu_0} = \frac{B_s^2}{2\mu_0} \quad (32)$$

и является уравнением для определения магнитного поля  $B_z$  в плазме. В случае бесконечного плазменного шнура исследование перспектив зажигания в рамках (7), (30), (32) сводится к анализу решения уравнений

$$\frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial \tau} - (\gamma - 1) \frac{1}{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial \tau} = -(\gamma - 1) \frac{q_r(T)}{2kT\eta} (t_m n_0),$$

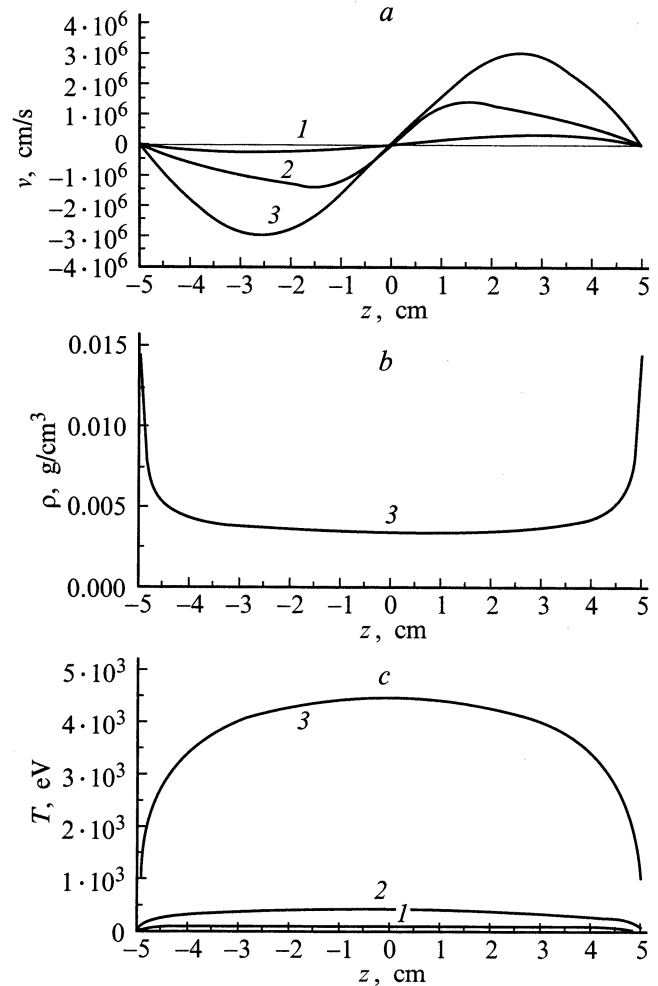
$$T_0 + \beta T \eta = T_0 \eta^2 f^2(\tau, b),$$

$$W = (\gamma - 1)(t_m n_0) \int_0^{\tau_k} E_\alpha \frac{q_{nf}(T)}{2kT\eta} d\tau,$$

$$T|_{\tau=0} = T_0, \quad \eta|_{\tau=0} = 1, \quad (33)$$

где  $n_0$  — начальная концентрация частиц в плазме;  $t_m$  — время достижения максимума  $B_s(t)$ ;  $\eta = \rho/\rho_0$  — сжатие плазменного шнура на момент  $\tau$ ;  $q_{nf}(\text{cm}^3/\text{s}) = Q_{nf}/(E_\alpha n_D n_T)$  — константа скорости D-T-реакции ( $E_\alpha \cong 3.5$  MeV — энергия  $\alpha$ -частицы)  $q_r(\text{erg} \cdot \text{cm}^3/\text{s}) = Q_r/n^2$  — константа скорости потерь энергии на тормозное излучение;  $n$ ,  $n_T$ ,  $n_D$  — концентрации плазмы, трития и дейтерия соответственно ( $n = n_T + n_D$ ).

Решение (33) определяется параметрами  $\beta$ ,  $T_0$ ,  $(n_0 t_m)$  и  $b \cong \delta(\beta \ll 1)$ . На рис. 6 представлена типичная расчетная зависимость величины дупля от параметра  $(n_0 t_m)$ . Рост потерь на тормозное излучение при больших временах сжатия и плотностях плазмы ведет к появлению максимума  $W_m$  в зависимости  $W(n_0 t_m)$ . При выбранных значениях параметра  $\beta$  и сжатия  $\delta$  величина  $W_m$  и соответствующее значение  $(n_0 t_m)$  определяются начальной температурой плазмы  $T_0$ . При  $\delta = 20$  и  $\beta = 0.1$  значение  $W_m = 1$  достигается при  $T_0 \cong 230$  eV, соответствующее  $(n_0 t_m) = (n_0 t_m)_{\text{opt}} = 6 \cdot 10^{13}$  s/cm<sup>3</sup>



**Рис. 7.** Пространственные распределения скорости (a), плотности (b) и температуры плазмы (c). Момент времени: 1 —  $0.5t_m$ , 2 —  $t_m$ , 3 —  $1.086t_m$  (момент максимального сжатия).



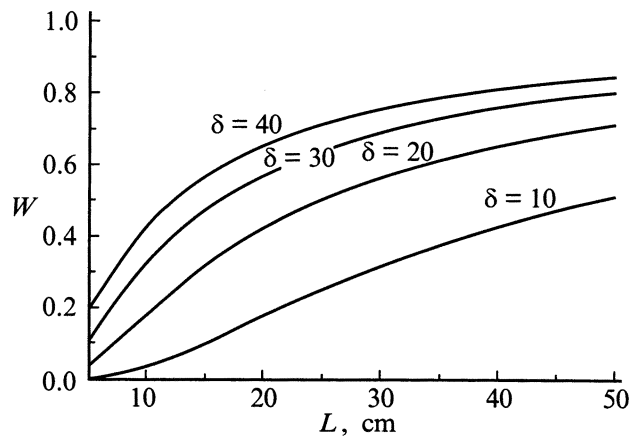


Рис. 8. Значения дупля в зависимости от длины плазменного шнура.  $r_0 = 1$  см.

является оптимальным для достижения критерия термоядерного зажигания при сжатии  $\delta = 20$ . При  $\delta = 30$  ( $\beta = 0.1$ )  $T_0 \cong 130$  eV,  $(n_0 t_m)_{\text{opt}} = 4.2 \cdot 10^{13}$  s/cm<sup>3</sup>. Можно сказать, что при заданном сжатии параметр  $n_0 t_m$  определяет оптимальные условия зажигания импульсной системы аналогично критерию Лоусона ( $n \cdot \tau$ ) для реализации УТС. Требуемые для реализации дупля  $W_m \cong 1$  параметры оцениваются из

$$B_0 = \sqrt{\frac{4\mu_0 k T_0 n_0}{\beta}}, \quad n_0 = \frac{(t_m n_0)_{\text{opt}}}{t_m},$$

$$J_m \cong 4\pi R_0 \delta \sqrt{\frac{n_0 k T_0}{\mu_0 \beta}}. \quad (34)$$

Для источника из [8] ( $t_m \cong 3.5 \mu\text{s}$ ) при  $\delta = 20$   $n_0 = 1.7 \cdot 10^{19}$  1/cm<sup>3</sup>,  $B_0 = 1.8$  MGs,  $J_m \cong 360$  МА (начальный радиус внешнего лайнера  $R_0 = 2$  см). При  $\delta = 30$  соответствующие параметры:  $n_0 = 1.2 \cdot 10^{19}$  1/cm<sup>3</sup>,  $B_0 = 1.1$  MGs,  $J_m \cong 340$  МА. Видно, что необходимый для реализации  $W_m \cong 1$  ток слабо зависит от предельного сжатия  $\delta$ , так как рост  $\delta$  компенсируется уменьшением начальных температуры  $T_0$  и концентрации плазмы  $n_0$ . Оценки соответствуют значению  $\beta = 0.1$ . При увеличении  $\beta$  до 0.4 (рис. 5) требуемые для достижения  $W_m \cong 1$  напряженность начального поля  $B_0$  и ток  $J_m$  могут быть снижены примерно в 2 раза (см. (34)).

Влияние потерь энергии, связанное с выносом тепла электронной теплопроводностью на стенки камеры, исследовалось путем решения (7), (32) с граничным условием на торцах  $T|_{z=\pm L/2} = 0$  (максимальные потери). Типичная картина пространственного распределения параметров плазменного шнура на различные моменты времени приведена на рис. 7. Кривые получены в расчете с  $r_0 = 1$  см,  $\beta = 0.1$ ,  $\delta = 20$ ,  $t_m = 3.5 \mu\text{s}$ , начальные концентрация  $n_0 = 2.5 \cdot 10^{18}$  1/cm<sup>3</sup> и температура  $T_0 = 100$  eV. Остывание торцов и выравнивание давления

за счет гидродинамического движения плазмы ведут к образованию приторцевых областей плотной низкотемпературной плазмы.

Влияние конечных размеров плазменного шнура на величину дупля (30) представлено на рис. 8. Начальные температура и плотность плазмы для каждого  $\delta$  брались оптимальными для достижения  $W_m = 1$  при  $L \rightarrow \infty$ . Для сжатий  $\delta = 30-20$  значение  $W_m \geq 0.3$  достигается при длине плазменного шнура  $L \geq 10-15$  см.

## Заключение

Получены уравнения квазиadiaбатического приближения для описания сжатия тонкого плазменного шнура продольным магнитным полем  $B_s(t)$ . Исследована устойчивость сжатия по отношению к развитию рэлей-тейлоровской неустойчивости. С ростом времени нарастания поля  $t_m$  при усилении  $B_s(t)$  линейно нарастающим током соленоида ( $\Theta$ -пинч) или путем компрессии магнитного потока разогнанным цилиндрическим лайнером (например, в МКГ) устойчивость сжатия ухудшается; при усилении  $B_s(t)$  в геометрии  $Z$ - $\Theta$ -пинча устойчивость улучшается.

В случаях  $\Theta$ -пинча и МКГ в квазиadiaбатическом режиме ( $t_m \geq 10r_0/v_m$ ) сжатия  $\delta \geq 3$  с сохранением цилиндрической симметрии нереализуемы. В случае  $Z$ - $\Theta$ -пинча при  $t_m \geq 15r_0/v_m$  возможно достижение десятикратных сжатий без нарушения цилиндрической симметрии. Фактически предел устойчивого сжатия плазмы в геометрии  $Z$ - $\Theta$ -пинча определяется достижимыми сжатиями лайнерной системы  $\delta_m \cong 20-30$ .

Для достижения условий термоядерного зажигания при сжатии в 30–20 раз в геометрии  $Z$ - $\Theta$ -пинча необходим начальный разогрев T-D-смеси с параметрами  $n_0 t_m \cong 4-6 \cdot 10^{13}$  s/cm<sup>3</sup> до температур  $T_0 \cong 130-230$  eV. При  $t_m = 3.5 \mu\text{s}$  эти условия необходимо реализовать в шнуре длиной  $L \geq 10-15$  см. Требуемые для этого начальные аксиальное магнитное поле  $B_0 \cong 0.5-1$  MGs, ток  $J_m \cong 170-180$  МА ( $\beta = 0.4$ ). В настоящее время имеются возможности получения токов  $J_m \cong 200$  МА (реализовано  $\sim 50$  МА) [8].

Авторы признательны В.В. Горохову, В.А. Демидову, В.А. Жмайло, В.И. Карелину, П.Б. Репину, В.Т. Селявскому за плодотворные дискуссии и обсуждения отдельных аспектов рассматриваемой проблемы.

## Список литературы

- [1] Кролл Н., Трайвеллис А. Основы физики плазмы. М.: Мир, 1975. 525 с.
- [2] Будько А.Б., Великович А.Л., Клеев А.И. и др. // ЖЭТФ. 1989. Т. 95. Вып. 2. С. 496–513.
- [3] Bud'ko A.B., Felber F.S., Kleev A.I. et al. // Phys. Fluids B. 1989. Vol. 1. N 3. P. 598–607.
- [4] Bud'ko A.B., Liberman M.A., Velikovich A.L., Felber F.S. // Phys. Fluids B. 1990. Vol. 2. N 6. P. 1159–1169.

- [5] *Felber F.S., Malley M.M., Wessel F.J.* et al. // *Phys. Fluids*. 1988. Vol. 31. N 7. P. 2053–2056.
- [6] *Golberg S.M., Liberman M.A., Velikovich A.L.* // *Plasma Physics and Controlled Fusion*. 1990. Vol. 32. N 5. P. 319–326.
- [7] *Felber F.S., Wessel F.J., Wild N.C.* et al. // *J. Appl. Phys.* 1988. Vol. 64. N 8. P. 3831–3844.
- [8] *Demidov V.A., Kazakov S.A., Kravchenko A.S.* et al. // *Proc. of 11<sup>th</sup> IEEE Intern. Pulsed Power Conf. Baltimore (USA)*, 1997. Vol. 2. P. 1459–1464.
- [9] *Вахрамеев Ю.С., Мохов В.Н., Попов Н.А.* // *Атомная энергия*. 1980. Т. 49. Вып. 2. С. 121–122.
- [10] *Кнопфель Г.* *Сверхсильные импульсные магнитные поля*. М.: Мир, 1972. 392 с.
- [11] *Федорюк М.В.* *Обыкновенные дифференциальные уравнения*. М.: Наука, 1985. 448 с.
- [12] *Голант В.Е., Жилинский А.П., Сахаров И.Е.* *Основы физики плазмы*. М.: Атомиздат, 1977. 384 с.
- [13] *Лукьянов С.Ю.* *Горячая плазма и управляемый термоядерный синтез*. М.: Наука, 1975. 408 с.