01

Оценка параметров составляющих спектра нелинейных систем второго порядка

© В.А. Двинских, С.В. Фролов

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

Поступило в Редакцию 12 июля 1999 г.

Рассмотрена нелинейная консервативная система Ляпунова и получено удовлетворительное соответствие между аналитическим решением и результатами численного анализа. Обсуждены спектры колебаний неавтономной нелинейной системы, близкой к Ляпуновской.

Известно [1], что дискретное преобразование Фурье обладает низкой разрешающей способностью при выявлении мелких деталей спектра. Использование для исследования спектра колебаний параметрических методов [2], требующих предварительной последовательности отсчетов решений, также не позволяет выделить из квазипериодических колебаний близкие по частоте составляющие. Поэтому в работе используется методика вычисления параметров составляющих спектра, основанная на аппроксимации последовательности отсчетов тригонометрическим полиномом первого порядка [3] и позволяющая повысить разрешающую способность.

Рассмотрим уравнение консервативной нелинейной системы Ляпунова

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x + x^3 = 0, \tag{1}$$

перейдем к новому аргументу

$$t \cong \tau(1 + h_2c^2 + h_4c^4 + \dots) \tag{2}$$

при $h_2, h_4, \dots$ — постоянных, подлежащих вычислению. После подстановки (2) в (1) имеем

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + (x + x^3)(1 + h_2c^2 + h_4c^4 + \dots) = 0. \tag{3}$$

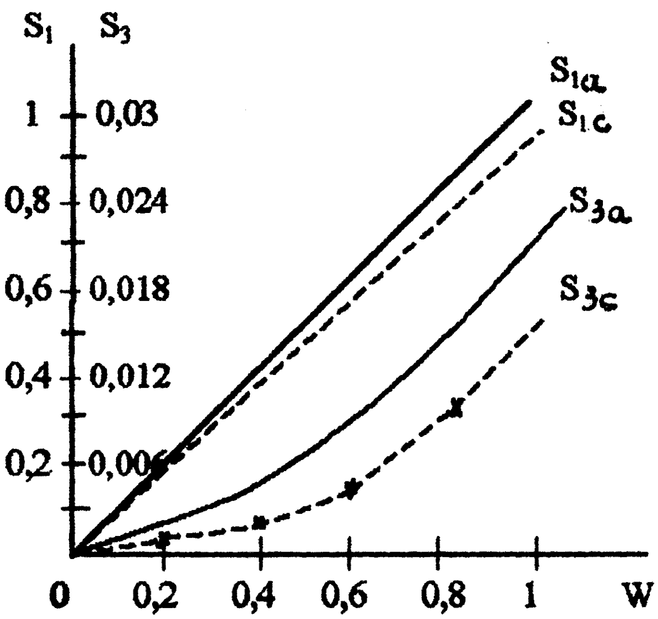

Рис. 1.

Для этого уравнения ищем решение в виде [4] ряда

$$x(\tau) = c\cos\tau + c^3 x_3(\tau) + c^5 x_5(\tau) + \dots, \qquad (4)$$

где $x_3(\tau)$, $x_5(\tau), \dots$ — периодические функции τ периода 2π, удовлетворяющие начальным условиям:

$$x_3(0) = x_5(0) = \dots = 0; \qquad \left.\frac{dx_3}{d\tau}\right|_0 = \left.\frac{dx_5}{d\tau}\right|_0 = \dots = 0. \qquad (5)$$

Тогда

$$\frac{d^2x_3}{d\tau^2} + x_3 = \left(\frac{3}{4} - 2h_2\right)\cos\tau + \frac{1}{4}\cos 3\tau, \qquad (6)$$

условие периодичности, т. е. коэффициент при $\cos\tau$, дает

$$h_2 = 3/8, \qquad (7)$$

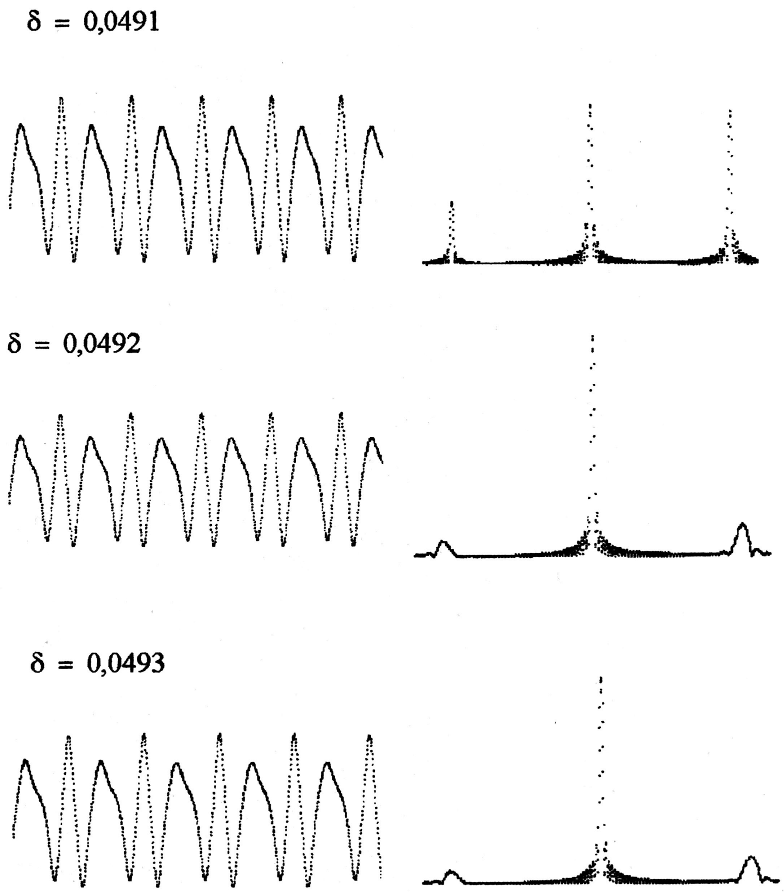

Рис. 2.

после чего из уравнения (6), принимая во внимание начальные условия (5), получим

$$x_3(\tau) = \frac{1}{32}\left(\cos\tau - \cos 3\tau\right). \tag{8}$$

Для $x_5(\tau)$ имеем уравнение

$$\frac{d^2x_5}{d\tau^2} + x_5 = \left(-2h_4 + \frac{57}{128}\right)\cos\tau + \frac{3}{16}\cos 3\tau - \frac{3}{128}\cos 5\tau, \qquad (9)$$

из которого находим

$$h_4 = 57/256. \qquad (10)$$

Ограничиваясь полученными решениями, имеем

$$x(\tau) \cong x_1 \cos\tau - x_3 \cos 3\tau - \frac{c^5}{1024}\cos 5\tau, \qquad (11)$$

где

$$x_1 = c + \frac{c^3}{32} + \frac{23c^5}{1024}, \qquad x_3 = \frac{c^3}{32} - \frac{3c^5}{128}$$

с периодом

$$T \cong 2\pi\left(1 - \frac{3c^2}{8} - \frac{57c^4}{254}\right). \qquad (12)$$

Кроме того, произведено численное решение уравнения (8) по методу Рунге–Кутта четвертого порядка с шагом 0.05 для различного начального условия W. На рис. 1 сплошными линиями показаны аналитические зависимости амплитуд первой и третьей гармоник от W, а пунктирными линиями — результаты численного решения. Оценка показывает, что между экспериментом и теорией результаты близки и по периоду. В [5] приведено уравнение Фейгенбаума

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \delta\frac{dx}{dt} + x^3 = b\sin t \qquad (13)$$

при $\delta \ll 1$ и $b < 1$ постоянных коэффициентах $(b = 0.9)$.

На рис. 2 слева приведены временны́е диаграммы при $\delta = 0.0493$, 0.0492, 0.0491, а справа — соответствующие спектры. Из анализа временны́х зависимостей следует, что в связи с неустойчивостью переходных процессов в нелинейной системе возникает амплитудная модуляция, которая в спектре приводит к появлению боковых составляющих.

Список литературы

[1] *Дмитриев А.С., Кислов В.Я.* Стохастические колебания в радиофизике и электронике. М.: Наука, 1989. 280 с.
[2] *Марпл С.Л.* Цифровой спектральный анализ и его приложения / Пер. с англ. М: Мир, 1990. 584 с.
[3] *Двинских В.А.* // ЖТФ. 1992. Т. 63. В. 12. С. 168–170.
[4] *Малкин И.Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: ГИТТЛ, 1956. 492 с.
[5] *Feigenbaum M.I.* // Los Alamos Science. 1980. V. 1. N 1. P. 4–27.