

01;12

## Минимизация остаточных напряжений в магнитных системах с квазибессильным распределением тока

© Г.А. Шнеерсон, О.С. Колтунов, В.Ю. Хозиков

Санкт-Петербургский государственный технический университет,  
195251 Санкт-Петербург, Россия  
e-mail: integr@delfa.net

(Поступило в Редакцию 14 июня 2001 г.)

Изучена возможность создания магнита с резко сниженными механическими напряжениями. Соленоид, обмотка которого состоит двух частей: внутренней, где токораспределение является квазибессильным, и внешней, где замыкается аксиальный ток, может позволить получать мегагауссные поля без разрушения обмотки и чрезмерного увеличения ее объема. Рассматривается возможность реализации квазибессильного распределения тока в виде дискретных проводящих слоев. Аналитические расчеты и компьютерные вычисления выполнены для двух типов обмоток, аппроксимирующих бессильную. В первой из них проводники разбиты на  $N$  пар уравновешенных слоев, в одном из которых проходит азимутальный, а в другом — полоидальный токи. Равные и встречно направленные усилия возникают в каждом слое пары и передаются на изоляционные прокладки между ними. Напряжения в прокладке могут быть доведены до значений в  $N$  раз меньше, чем  $B_0^2/(2\mu_0)$  — магнитное давление поля на оси соленоида. При использовании системы проводящих слоев, в каждом из которых направление тока выбирается из условия равновесия слоев, остаточные напряжения могут быть снижены в  $N^2$  по сравнению с  $B_0^2/(2\mu_0)$  вследствие частичной компенсации растягивающих и сжимающих сил в каждом слое.

### Введение

Механические напряжения в магнитных системах с дискретными токовыми слоями могут быть резко снижены, если распределение тока по слоям близко к бессильному. Системы с таким токораспределением будем далее называть квазибессильными. Задача минимизации остаточных электромагнитных сил актуальна как при создании магнитов для получения сверхсильных полей, так и для повышения критического тока в сверхпроводниках.

Оссимметричный квазибессильный соленоид конечной длины (рис. 1) может быть выполнен в виде системы токовых слоев с азимутальным и полоидальным токами. В приближении непрерывного токораспределения, когда число слоев неограниченно растет, поле в области 1 должно быть бессильным. Снаружи эта область граничит с областью 2, где замыкается аксиальный ток  $\delta_z$ . В этой области поле, индукция которого имеет лишь азимутальную составляющую, не является бессильным.

В работах [1–4] показано, что при рациональном выборе распределения аксиального тока в области 2 внешний радиус магнитной системы связан с внешним радиусом обмотки соотношением  $R_2/R_1 \approx (2B_0^2/B_M^2 + 1)^{1/2}$ , где  $B_0$  — индукция на оси,  $B_M = \sqrt{2\mu_0\sigma_0}$  — так называемый магнитный предел прочности, определяемый прочностным пределом материала  $\sigma_0$ . Для сравнения укажем, что в соленоидах традиционного исполнения, имеющих равномерно нагруженную обмотку с азимутальным током [5,6], имеет место рост отношения внешнего радиуса к внутреннему как  $\exp(B_0^2/B_M^2)$ , что при условии  $B_0/B_M \gg 1$  дает катастрофически большие габариты обмотки.

Остановимся на возможности замены бессильного распределения дискретной системой проводников в области

вдали от торцов, где радиальные электромагнитные силы являются наибольшими. В этой зоне нет радиальной составляющей плотности тока и индукции. Подобная постановка задачи, где мы не рассматриваем поле в концевых частях, имеет самостоятельное значение для сверхпроводящего кабеля [7].

Расчет конфигурации торцевой зоны квазибессильного магнита является отдельной задачей. Пример такого расчета для обмотки малой толщины приведен в работе [4].

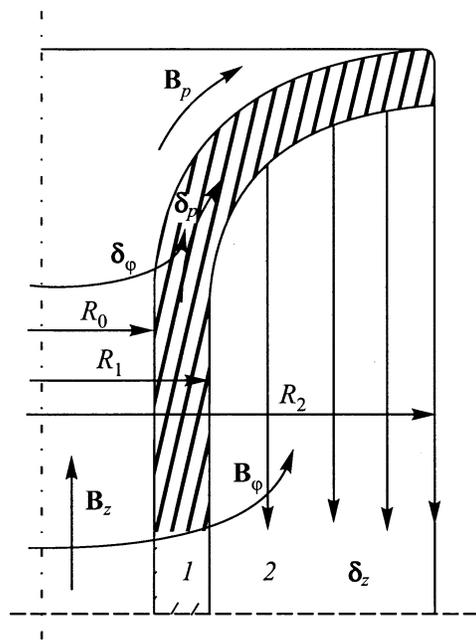


Рис. 1. Схема соленоида конечной длины с квазибессильной обмоткой (1) и зоной обратного тока (2).

В работах [2,7] на идеализированных примерах с токовыми дискретными слоями исчезающе малой толщины была показана возможность резкого снижения объемных электромагнитных сил. Здесь будет рассмотрена проблема аппроксимации бессылового распределения для систем с проводниками конечной (хотя и малой) толщины.

### Квазибессыловая обмотка с парами уравновешенных токовых слоев (число пар $N \gg 1$ )

Рассмотрим обмотку, которая состоит из  $N$  пар чередующихся слоев с ортогональными токами в каждой паре (рис. 2). Слои разделены изоляционными прокладками. Распределение аксиальных и азимутальных токов, аппроксимирующее бессыловое токораспределение, производится таким образом, чтобы в каждой паре растягивающее усилие, действующее на внутренний кольцевой виток  $1$  с азимутальным током, было уравновешено сжимающей силой, действующей на находящийся снаружи слой  $2$  с аксиальным током. При этом каждая пара находится в равновесии, а изоляционная прокладка  $3$  подвержена сжатию.

При расчетах примем, что толщины слоев  $1$  и  $2$  в  $n$ -й паре одинаковы для всех пар. Радиальная сила, действующая на слой  $1$ , с азимутальным током в расчете на единицу площади есть

$$F_{r1} = (B_z^2(r_n) - B_z^2(r_{n+1})) / (2\mu_0), \quad (1)$$

где  $B_z$  — аксиальная составляющая индукции, при этом

$$\begin{aligned} B_z(r_{n+1}) &= B_z(r_n) - \mu_0 \int_{r_n}^{r_n+\Delta} \delta_\varphi dr \\ &\approx B_z(r_n) - \mu_0 \delta_\varphi (\Delta - \Delta^2 / (2r_n)). \end{aligned} \quad (2)$$

В этой формуле  $\delta_{\varphi,n} = \delta_\varphi(r_n)$ , при ее выводе для  $\delta_\varphi$  принята зависимость

$$\delta_\varphi = \delta_{\varphi,n} r_n / r \quad (3)$$

и в выражении (2) отброшены члены порядка  $\mu_0 \delta_\varphi \Delta^3 / r_n^2$ . Без этих членов сила  $F_{r1}$  выражается формулой

$$\begin{aligned} F_{r1} &\approx B_z(r_n) \delta_{\varphi,n} \Delta \\ &- B_z(r_n) (\delta_{\varphi,n} \Delta^2 / (2r_n)) - \mu_0 \delta_{\varphi,n}^2 \Delta^2 / 2. \end{aligned} \quad (4)$$

Сила, действующая на слой  $2$ , определяется по формуле

$$F_{r2} = - \int_{r'_n}^{r'_n+\Delta} \delta_{z,n} B_\varphi dr,$$

где  $r'_n = r_n + h_1 + \Delta$ ,

$$B_\varphi(r) = \frac{r'_n}{r} B_\varphi(r'_n) + \frac{\mu_0 \delta_{z,n}}{2} \left( \frac{r^2 - r'^2_n}{r} \right).$$

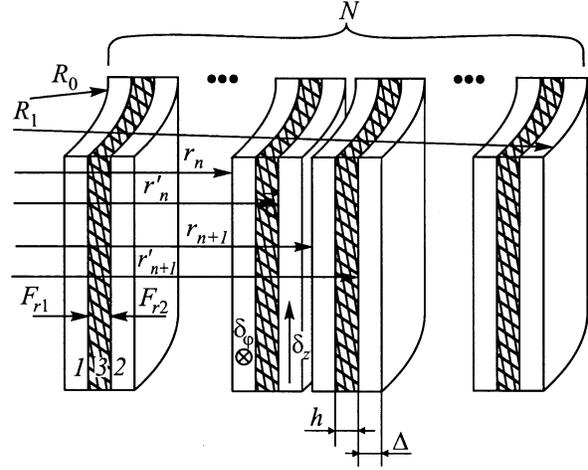


Рис. 2. Структура квазибессыловой обмотки с парами уравновешенных токовых слоев.

Отсюда получаем

$$F_{r2} \approx - \left[ B_\varphi(r'_n) \delta_{z,n} \Delta - B_\varphi(r'_n) \delta_{z,n} \frac{\Delta^2}{2r'_n} + \mu_0 \delta_{z,n}^2 \frac{\Delta^2}{2} \right], \quad (5)$$

где отброшены члены порядка  $B_\varphi(r'_n) \delta_{z,n} \Delta^3 / r_n^2$  и  $\mu_0 \delta_{z,n}^2 \Delta^3 / r_n^2$ .

Условие равновесия  $F_{r1} + F_{r2} = 0$  должно быть выполнено в каждой паре слоев. В результате приходим к следующей системе уравнений, позволяющей найти распределение азимутальных токов по слоям при заданном распределении аксиальных токов или решить обратную задачу

$$\begin{aligned} B_z(r_n) \delta_{\varphi,n} - B_\varphi(r'_n) \delta_{z,n} - \left( \frac{B_z(r_n) \delta_{\varphi,n}}{r_n} - \frac{B_\varphi(r'_n) \delta_{z,n}}{r'_n} \right) \frac{\Delta}{2} \\ - \mu_0 \Delta (\delta_{\varphi,n}^2 + \delta_{z,n}^2) / 2 = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Компоненты индукции  $B_\varphi$  и  $B_z$  в этих уравнениях определяются по следующим приближенным формулам:

$$B_z(r_n) \approx B_0 - \Delta \mu_0 \sum_1^{n-1} \delta_{\varphi,n} \left( 1 - \frac{\Delta}{2r_n} \right), \quad (7)$$

$$B_\varphi(r'_n) \approx \frac{r'_{n-1}}{r'_n} \left[ B_\varphi(r'_{n-1}) + \mu_0 \delta_{z,n-1} \Delta \left( 1 + \frac{\Delta}{2r'_{n-1}} \right) \right]. \quad (8)$$

Модули радиальных и азимутальных напряжений в изоляционной прокладке  $3$  можно приближенно рассчитать по формуле

$$\begin{aligned} |\sigma_\varphi| = |\sigma_z| = |F_{r1}| = |F_{r2}| \\ \approx B_\varphi(r'_n) \delta_{z,n} \Delta (1 - \Delta / (2r'_n)) + \mu_0 \Delta^2 \delta_{z,n}^2 / 2. \end{aligned} \quad (9)$$

В этой формуле главным является первый член. Он имеет порядок  $B_0^2 / (\mu_0 N)$ , поскольку  $B_\varphi$  порядка  $B_0$ , а  $\delta_\varphi$  — порядка  $2B_0 / (\mu_0 d)$ , где  $d = 2N\Delta$  — толщина

обмотки. Таким образом, сжимающие напряжения в системе с ортогональными токами примерно в  $N$  раз меньше, чем магнитное давление, соответствующее полю  $B_0$ . Реальные значения сжимающих сил в различных слоях обмотки могут быть рассчитаны путем решения системы уравнений (7), (8). Эта система достаточно громоздка, если  $N \gg 1$ , поэтому для решения оптимизационных задач целесообразно пренебречь членами порядка  $\Delta/r$  и  $1/N$ . Тогда в левой части уравнения (6) остаются лишь два первых слагаемых. Далее целесообразно использовать аппроксимацию реального распределения индукции, имеющего форму ломаной линии, непрерывной, дифференцируемой кривой  $B_{\varphi,z}(r)$ , проходящей через значения  $B_{\varphi,z}(r_n)$ . При таком подходе справедливы приближенные соотношения

$$B_z(r_{n+1}) \approx B_z(r_n) - \mu_0 \delta_{\varphi,n} \Delta \approx B_z(r_n) + (dB_z/dr) 2(\Delta + h),$$

$$r'_{n+1} B_\varphi(r'_{n+1}) \approx r'_n B_\varphi(r'_n) + 2\mu_0 r'_n \delta_{z,n} \Delta$$

$$\approx r'_n B_\varphi(r'_n) + 2(\Delta + h) d(rB_\varphi)/dr,$$

где фигурируют производные непрерывных функций  $B_z(r)$  и  $B_\varphi(r)$ .

Из этих соотношений вытекают выражения для плотностей тока на краях слоев

$$\delta_{\varphi,n} \approx -\frac{2(\Delta + h)}{\mu_0 \Delta} \left( \frac{dB_z}{dr} \right)_{r=r_n},$$

$$\delta_{z,n} \approx \frac{2(\Delta + h)}{\mu_0 \Delta} \frac{1}{r} \left[ \frac{d(rB_\varphi)}{dr} \right]_{r=r_n}. \quad (10)$$

В итоге вместо (6) приходим к уравнению, связывающему аксиальную и азимутальную компоненты индукции поля, которое аппроксимирует квазибессильное

$$B_\varphi \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rB_\varphi) + B_z \frac{dB_z}{dr} = 0. \quad (11)$$

Как видно из (11), это поле является строго бессильным. Задаваясь распределением одной из составляющих индукции, можно с помощью (11) найти другую компоненту. Такой метод расчета удобен при выборе токораспределения, удовлетворяющего тем или иным требованиям. После нахождения "сглаженного" распределения индукции или соответствующего ему распределения тока можно оценить напряжения в реальной дискретной системе проводников. Хотя точные значения напряжений и токов в слоях могут быть найдены путем численного решения системы (6)–(8), приближенные решения для сглаженных зависимостей представляют интерес, поскольку в ряде случаев они могут быть получены аналитически.

Примером может быть выбор такого распределения тока, при котором все слои нагружены одинаково

$$|\sigma_\varphi| = |\sigma_r| = \sigma_0 = B_\varphi \delta_{z,n} \Delta. \quad (12)$$

Из этого равенства получаем уравнение для  $B_\varphi$

$$\frac{\sigma_0(\Delta + h)}{2(\Delta + h)} = \frac{B_\varphi}{\mu_0} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rB_\varphi). \quad (13)$$

Далее для упрощения примем условие  $h \ll \Delta$ .

Уравнение (12) позволяет найти азимутальную компоненту индукции, после чего с помощью (11) можно рассчитать  $B_z$ . Индукция  $B_\varphi$  удовлетворяет граничному условию  $B_\varphi(R_0) = 0$ , где  $R_0$  — внутренний радиус соленоида. Можно ввести безразмерные переменные:  $x = r/R_0$ ,  $y = rB_\varphi R_0^{-3/2} (\mu_0 \sigma_0 / (2\Delta))^{-1/2}$ . После этого уравнение (13) принимает вид

$$yy' = x^2. \quad (14)$$

Его решение есть

$$y = \sqrt{\frac{2}{3}} (x^3 - 1), \quad (15)$$

или при  $h \ll \Delta$

$$B_\varphi = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{\mu_0 \sigma_0}{3\Delta} (r^3 - R_0^3)}, \quad \delta_z = \sqrt{\frac{3\sigma_0}{\mu_0 \Delta}} \frac{r}{\sqrt{r^3 - R_0^3}}. \quad (16)$$

Аксиальная индукция и азимутальная плотность тока в этом предельном случае определяются по формулам

$$B_z = \sqrt{B_0^2 - \frac{\mu_0 \sigma_0}{\Delta} (r - R_0)},$$

$$\delta_\varphi = \frac{\sigma_0}{\Delta \sqrt{B_0^2 - \mu_0 \sigma_0 (r - R_0) / \Delta}}, \quad (17)$$

где  $B_0$  — индукция на оси.

Внешний радиус обмотки  $R_1$  можно найти из условия  $B_z(R_1) = 0$

$$R_1 = R_0 + B_0^2 \Delta / (\mu_0 \sigma_0). \quad (18)$$

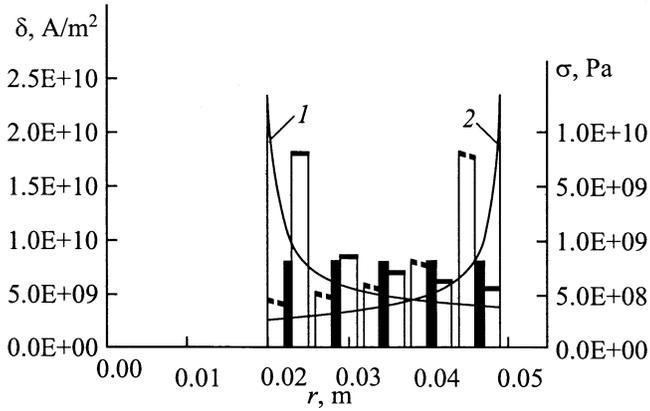
Отсюда находим напряжение в изоляционных прослойках

$$\sigma_0 = B_0^2 \frac{\Delta}{\mu_0 (R_1 - R_0)} \approx \frac{B_0^2}{2\mu_0 N}, \quad (19)$$

где  $N \approx (R_1 - R_0) / (2\Delta)$  — число слоев обмотки, которая состоит из одинаковых по толщине слоев с аксиальным и азимутальным токами, разделенных тонкими изоляционными слоями.

Приближенная формула (19) показывает, что напряжение в рассматриваемой системе в  $N$  раз меньше, чем магнитное давление, рассчитанное для поля на оси соленоида.

На рис. 3 приведены результаты численного расчета системы из пяти пар слоев для поля с индукцией  $B_0 = 100$  Т, в ходе которого решалась система уравнений (6)–(8). Сравнение с моделью непрерывного токораспределения показывает, что эта модель дает приемлемую для оценок аппроксимацию реального токораспределения в обмотке, несмотря на относительно небольшое число слоев. Расхождение имеет место вблизи границы, где аналитический расчет дает неограниченный рост плотности тока. Что касается напряжений, то результат численного расчета ( $\sigma_r = \sigma_\varphi = 7.96 \cdot 10^8$  Па) практически совпадает с расчетом по формуле (19).



**Рис. 3.** Распределение механических напряжений и плотностей тока в квазибессильной обмотке, состоящей из 5 пар слоев: —  $\delta_z$ , - -  $\delta_\varphi$ , ■ —  $|\sigma_r| = |\sigma_\varphi|$ ; 1, 2 — аналитический расчет  $\delta_z$ ,  $\delta_\varphi$  по формулам (16), (17) соответственно.

Модель непрерывного токораспределения может быть использована и при других исходных положениях, определяющих конструкцию обмотки. В первой из них примем, что  $\delta_\varphi = \text{const}$ . Эта модель аппроксимирует систему, в которой азимутальные токи одинаковы в каждой из пар токовых слоев. В уравнении (11)  $B_z(r) = B_0 - \mu_0\delta_0(r - R_0)$ , где  $R_0$  — внутренний радиус соленоида,  $\delta_0 = \delta_\varphi\Delta/[2(\Delta + h)] \approx \delta_\varphi/2$ . На внешней границе ( $r = R_1$ )  $B_z(R_1) = 0$ . Введем параметр, характеризующий толщину обмотки,  $g = R_0/(R_1 - R_0) = \mu_0R_0\delta_0/B_0$ . После подстановки  $B_z(r)$  (11) преобразуется в уравнение для азимутальной индукции

$$\frac{1}{\mu_0 r} B_\varphi \frac{d}{dr}(rB_\varphi) = B_0\delta_0 \left(1 - \frac{r - R_0}{B_0} \mu_0\delta_0\right). \quad (20)$$

Далее, после перехода к безразмерным переменным приходим к следующему уравнению:

$$xz(xz)' = x^2(1 + g) - x^3g, \quad (21)$$

где  $x = r/R_0$ ,  $z = B/(B_0\sqrt{g})$ .

Граничное условие для  $B_\varphi$  есть  $z = 0$  при  $x = 1$ . Решение имеет вид

$$z = \frac{1}{x} \sqrt{\frac{2(1+g)x^3}{3} - \frac{gx^4}{2} - \frac{2}{3} - \frac{g}{6}}. \quad (22)$$

На внешней границе соленоида имеем  $x = R_1/R_0 = 1 + 1/g$ . Индукция азимутального поля на внешней границе, аксиальная плотность тока и аксиальный ток принимают значение

$$\begin{aligned} B_{\varphi e} &= \frac{B_0}{\sqrt{6}(g+1)} \sqrt{(g+1)^4 - 4g^3 - g^4}, \\ \delta_z &= \frac{2B_0\sqrt{g}}{\mu_0 R_0} \frac{x(1+g-gx)}{\sqrt{2(1+g)x^3/3 - gx^4/2 - 2/3 - g/6}}, \\ i_z &= \frac{2\pi R_0 B_0}{\sqrt{6}\mu_0 g} \sqrt{(g+1)^4 - 4g^3 - g^4}. \end{aligned} \quad (23)$$

В отличие от предыдущего примера в рассматриваемом случае напряжения в прокладке в данном приближении изменяются по линейному закону

$$|\sigma_r| = |\sigma_z| = 2\delta_0\Delta B_0 \left(1 - \frac{r - R_0}{R_1 - R_0}\right). \quad (24)$$

Их максимальные значения достигаются на внутренней границе обмотки

$$\sigma_{\max} = 2\Delta\delta_0 B_0 = B_0^2\Delta/[\mu_0(R_1 - R_0)] \cong B_0^2/(\mu_0 N). \quad (25)$$

В случае аксиального тока, распределенного равномерно по радиусу ( $\delta_z = \text{const}$ ), имеем  $B_\varphi = \mu_0\delta_0[r/2 - R^2/(2r)]$ , где  $\delta_z\Delta/[2(\Delta + h)] \approx \delta_z/2$ . Выражение (11) приводится к уравнению для аксиальной индукции

$$\frac{B_z}{\mu_0} \frac{dB_z}{dr} = -\frac{\mu_0\delta_0^2}{2} \left(r - \frac{R_0^2}{r}\right). \quad (26)$$

После перехода к безразмерным переменным  $x = r/R_0$  и  $y = \sqrt{2}B_z/(\mu_0\delta_0 R_0)$  уравнение принимает вид

$$yy' = -x + 1/x, \quad (27)$$

граничное условие есть  $y = 1$  при  $x = 1$ . На внешней границе  $y = 0$ . Решение имеет вид

$$y = \sqrt{2 + 2\ln x - x^2}. \quad (28)$$

Внешний радиус обмотки можно найти из условия  $y = 0$ , которому соответствует значение  $x_1 = R_1/R_0 \approx 1.77$ . Напряжения в прокладке  $|\sigma_z| = |\sigma_\varphi| = \delta_z\Delta B_\varphi \approx \delta_0^2\Delta\mu_0 R_0(x - 1/x)$  принимают максимальное значение на внешней границе

$$|\sigma|_{\max} \cong 2.4 \cdot (\Delta/R_0) B_0^2/\mu_0 \approx 0.95 B_0^2/(\mu_0 N). \quad (29)$$

Здесь использовано приближенное равенство

$$N \approx (R_1 - R_0)/(2\Delta) = 0.385R_0/\Delta,$$

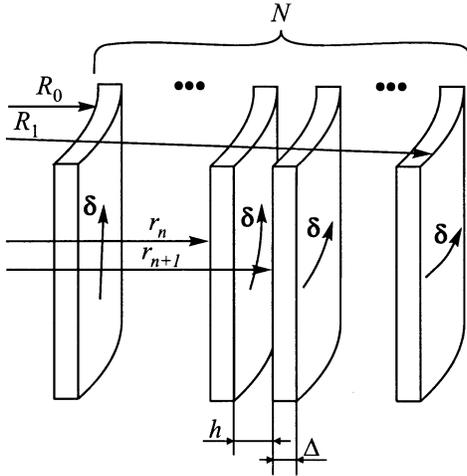
справедливое, если  $d \gg \Delta, h$ . Азимутальная плотность тока в рассматриваемом приближении изменяется согласно зависимости

$$\delta_\varphi = -\frac{2B_0}{\mu_0 R_0} \frac{1 - x^2}{x\sqrt{2 + 2\ln x - x^2}}. \quad (30)$$

При этом  $\delta_\varphi$  неограниченно растет на краю обмотки ( $r = R_1$ ), но произведение  $\delta_\varphi B_z$  остается конечным.

### Магнитная система с большим числом слоев с переменным направлением тока в каждом из них

При бессильном токораспределении в цилиндрической области направление вектора плотности тока непрерывно изменяется по радиусу. Аппроксимация такого



**Рис. 4.** Структура квазибесселевой обмотки с токами переменного направления.

токораспределения возможна в виде системы токовых слоев с дискретно изменяющимся направлением тока [4]. Резкое снижение напряжений в тонкостенном цилиндре с током, направленным под углом к оси, близким к  $\pi/4$ , было показано в работе [8]. Значительное уменьшение объемных электромагнитных сил в многослойной системе, аппроксимирующей бесселевую, показано в работе [7], однако в ней не рассматривалась задача достижения равновесия каждого слоя, что необходимо для эффективного снижения упругих напряжений.

Введем координату  $x$ , которая отсчитывается от внутренней границы  $n$ -го слоя  $x = r - r_n$  (рис. 4). Аксиальная составляющая плотности тока в этом слое не зависит от  $x$  и равна  $\delta_{z,n}$ , а азимутальная определяется по формуле (3)  $\delta_\varphi = \delta_{\varphi,n} r_n / (r_n + x)$ . С точностью до слагаемых порядка  $x/r_n$  справедливо выражение для объемной силы

$$f_r(x) \approx \delta_{\varphi,n} B_z(r_n)(1 - x/r_n) - \delta_{z,n} B_\varphi(r_n)(1 - x/r_n) - \mu_0 x (\delta_{\varphi,n}^2 + \delta_{z,n}^2). \quad (31)$$

Равнодействующая объемных сил в точке  $x$  есть

$$F_{r,n}(x) = \delta_{\varphi,n} B_z(r_n) x \left(1 - \frac{x}{2r_n}\right) - \delta_{z,n} B_\varphi(r_n) x \left(1 - \frac{x}{2r_n}\right) - \frac{\mu_0 x^2}{2} (\delta_{\varphi,n}^2 + \delta_{z,n}^2) = a_n x + b_n \frac{x^2}{2}, \quad (32)$$

где  $a_n = \delta_{\varphi,n} B_z(r_n) - \delta_{z,n} B_\varphi(r_n)$ ,  $b_n = -a_n/r_n - \mu_0(\delta_{\varphi,n}^2 + \delta_{z,n}^2)$ .

Уравнение (6) для компонент индукции остается в силе и в рассматриваемом случае. Оно может быть получено из условия  $F_{r,n}(\Delta) = 0$ , означающего равновесие каждого слоя.

Существенным отличием рассматриваемой системы, в которой аксиальный и азимутальный токи совмещены в одном слое, от системы с парами токовых слоев является частичная компенсация составляющих  $\delta_\varphi B_z$  и  $(-\delta_z B_\varphi)$  в пределах одного слоя. При этом объемная сила знакопеременна в слое, а ее интеграл  $F_{r,n}(x)$  достигает максимума в точке с координатой  $x = \Delta/2$ . Соответствующее значение  $F_{r,n}(\Delta/2)$  определяется двумя равноценными формулами

$$F_{\max n} = (\delta_{\varphi,n} B_z(r_n) - \delta_{z,n} B_\varphi(r_n)) \frac{\Delta}{4}, \quad (33.1)$$

$$F_{\max n} = \frac{\mu_0 \Delta^2}{8} \left( \delta_{z,n}^2 + \delta_{\varphi,n}^2 + \frac{\delta_{\varphi,n} B_z(r_n) - \delta_{z,n} B_\varphi(r_n)}{\mu_0 r_n} \right). \quad (33.2)$$

Далее показано, что  $|F_{\max n}|$  дает оценку абсолютных значений напряжений в слоях. Отметим, что в данном случае напряжения существенно ниже, чем в системе с парами слоев. Рассматриваемая система более близка к бесселевой, поскольку в ней обе составляющие тока не разнесены в пространстве. В результате частичной компенсации объемных сил, обусловленных полоидальным и тороидальным полями, и имеет место более резкий спад напряжений с ростом числа слоев, чем в системе с парами токоведущих слоев. Это видно из сравнения (33) с уравнением (9). Плотность тока в слоях имеет порядок величины  $B_0/(\mu_0 \Delta N)$ , где  $B_0$  — индукция на оси. Следовательно, согласно (33.2),  $F_{\max n}$  является величиной порядка  $B_0^2/(\mu_0 N^2)$ .

Для расчета напряжений при заданном распределении объемных электромагнитных сил в слое можно воспользоваться формулами теории упругости, широко известными в литературе (см., например, [9]),

$$\sigma_{r,\varphi} = -\frac{1+\Theta}{2} \int_{r_n}^r f(r) dr \mp \frac{1-\Theta}{2r^2} \int_{r_n}^r f(r) r^2 dr + C_1 \mp \frac{C_2}{r^2}, \quad (34)$$

где  $f(r)$  — радиальная объемная сила;  $\Theta = \mu/(1-\mu)$  в случае жесткой заделки концов ( $\mu$  — коэффициент Пуассона);  $C_1$  и  $C_2$  — постоянные, определяемые граничными условиями  $\sigma_r(r_n) = 0$  и  $\sigma_r(r_n + \Delta) = 0$ .

Воспользуемся формулой (31) для  $f_r$  и представим выражение (34) в виде разложения по степеням малого параметра  $(x/r_n)$ , где  $x = r - r_n$ , при этом отбросим члены порядка  $x^3/r_n^2$  и выше

$$\sigma_{r,\varphi} \approx -\frac{1+\Theta}{2} \left( a_n x + \frac{b_n x^2}{2} \right) \mp \frac{1-\Theta}{2} \times \left[ a_n x - \left( \frac{a_n}{r_n} - \frac{b_n}{2} \right) x^2 \right] + C_1 \mp \frac{C_2}{r_n^2} \left( 1 - \frac{2x}{r_n} \right), \quad (35)$$

где  $a_n$  и  $b_n$  определены выше.

Условия  $\sigma_r(0) = 0$  и  $\sigma_r(\Delta) = 0$  позволяют найти постоянные  $C_1$  и  $C_2$

$$C_1 \cong -(1 - \Theta)a_n \frac{\Delta}{2} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\Delta}{r_n}\right), \quad C_2 = C_1 r_n^2. \quad (36)$$

С учетом условия равновесия слоя  $a_n \Delta + b_n \Delta^2/2 = 0$  приходим к следующим выражениям для напряжений (без членов порядка  $\Delta^3/r_n^2$ )

$$\begin{aligned} \sigma_r &\approx -a_n \left(x - \frac{x^2}{\Delta}\right) + (1 - \Theta) \frac{a_n x}{2r_n} (x - \Delta), \\ \sigma_\varphi &= -a_n \Theta \left(x - \frac{x^2}{\Delta}\right) \\ &- (1 - \Theta)a_n \left[\frac{x^2}{2r_n} + \frac{\Delta}{2} \left(2 - \frac{2x}{r_n} + \frac{3\Delta}{r_n}\right)\right]. \end{aligned} \quad (37)$$

Модули обоих напряжений имеют максимальное значение в середине слоя ( $x = \Delta/2$ )

$$\begin{aligned} |\sigma_r|_{\max} &= F_{\max n} \left(1 + (1 - \Theta) \frac{\Delta}{8r_n}\right), \\ |\sigma_\varphi|_{\max} &= 4F_{\max n} \left(1 - \frac{3\Theta}{4} + (1 - \Theta) \frac{9}{8} \frac{\Delta}{r_n}\right). \end{aligned} \quad (38)$$

Обе компоненты тензора напряжений лишь численными множителями, близкими к единице, отличаются от максимального значения равнодействующей объемных сил  $(F_n)_{\max} = a_n \Delta/4$ .

В качестве примера рассмотрим обмотку малой кривизны, когда членами  $\Delta/r_n$  можно пренебречь. Фактически это система  $N$  плоских проводящих слоев толщиной  $\Delta$ . Для простоты примем, что толщина изоляционных прослоек между слоями пренебрежимо мала. В пределе  $N \rightarrow \infty$  имеет место бессильное поле, в котором  $|B| = \sqrt{B_z^2 + B_\varphi^2} = \text{const}$ . При условии равновесия системы дискретных слоев выразим токи  $\delta_{z,n}$  и  $\delta_{\varphi,n}$  через индукции по обе стороны  $n$ -го слоя  $\delta_{\varphi,n} = -(B_{z,n+1} - B_{z,n})/(\mu_0 \Delta)$ ,  $\delta_{z,n} = (B_{\varphi,n+1} - B_{\varphi,n})/(\mu_0 \Delta)$ , тогда выражения для максимальных значений равнодействующих сил принимают вид

$$\begin{aligned} (F_n)_{\max} &= \frac{1}{4\mu_0} [B_{z,n}^2 + B_{\varphi,n}^2 \\ &- (B_{z,n} B_{z,n+1} + B_{\varphi,n} B_{\varphi,n+1})]. \end{aligned} \quad (39)$$

На внутренней границе имеем  $B_{z,1} = B_0$ ,  $B_{\varphi,1} = 0$ , на внешней  $B_{z,N+1} = 0$ ,  $B_{\varphi,N+1} = B_0$ , где  $N$  — число слоев.

Аналогом бессильной является дискретная система, в которой вектор индукции между слоями имеет одинаковый модуль, но различные направления. Примером может быть распределение вида

$$\begin{aligned} B_{z,n} &= B_0 \cos \frac{(n-1)\Delta\pi}{2d}, \\ B_{\varphi,n} &= B_0 \sin \frac{(n-1)\Delta\pi}{2d}, \end{aligned} \quad (40)$$

где  $d \approx N\Delta$  — толщина обмотки.

В этом примере

$$(F_n)_{\max} = \frac{B_0^2}{4\mu_0} \left(1 - \cos \frac{\Delta\pi}{2d}\right), \quad (41)$$

т. е. равнодействующие одинаковы во всех слоях и обмотка является равнонагруженной. При этом максимальное значение объемной силы в каждом слое имеет место на его внутренней границе ( $x = 0$ ) и составляет

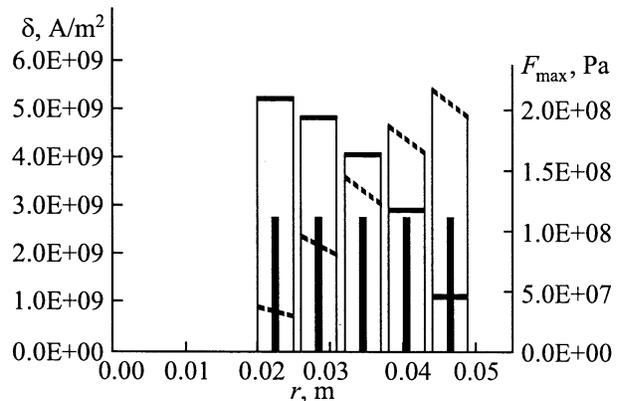
$$f_{\max} = \frac{B_0^2}{\mu_0 \Delta} \left(1 - \cos \frac{\Delta\pi}{2d}\right). \quad (42)$$

В частном случае одного слоя  $\Delta = d$ ,  $F_{\max} = 0.5B_0^2/(2\mu_0)$ . Этот случай был рассмотрен в работе [8]. Для двух и трех слоев имеем соответственно  $F_{\max} \approx 0.15B_0^2/(2\mu_0)$  и  $F_{\max} \approx 0.065B_0^2/(2\mu_0)$ . Эти оценки показывают, что даже сравнительно простые двух- и трехслойные системы с токами переменного направления могут обеспечить резкое снижение напряжений в слое по сравнению с магнитным давлением поля с индукцией  $B_0$ . В первом из этих примеров вектор плотности тока в слое направлен под углом  $\pi/4$  к оси  $z$ , во втором и третьем направлении этого вектора изменяется одинаковыми скачками при переходе от слоя к слою. Такая же картина имеет место и в общем случае  $N$  слоев. При  $N \gg 1$  имеем  $\Delta\pi/(2d) = \pi/(2N) \ll 1$ , следовательно,

$$F_{\max} \approx \frac{B_0^2}{2\mu_0} \frac{\pi^2}{16N^2}, \quad f_{\max} \approx \frac{B_0^2 \pi^2}{8\mu_0 \Delta N^2}. \quad (43)$$

Порядок величины  $F_{\max}$  соответствует приведенной выше оценке  $F_{\max} = \text{const}/N^2$ .

Этот же результат подтверждается численными расчетами реальных систем без допущения малой кривизны проводников. На рис. 5 приведены результаты компьютерных расчетов равнонагруженной пятислойной обмотки с цилиндрическими слоями. Сравнение с рис. 3 показывает, что при сопоставимых параметрах напряжения



**Рис. 5.** Распределение равнодействующей объемной силы и плотностей тока в квазибессильной обмотке, состоящей из 5 слоев с наклонными токами (результаты численного расчета): — —  $\delta_z$ , - - -  $\delta_\varphi$ , ■ —  $E_{\max}$ .

в слоях с токами переменного направления примерно в 7 раз ниже, чем в системе с парами токоведущих слоев. При  $B_0 = 100$  Т максимальное значение равнодействующих  $F_{\max}$  составляет  $1.1 \cdot 10^8$  Ра. Отметим, что расчет по формуле (41), не учитывающей кривизну слоев, дает близкий результат ( $F_{\max} = 0.97 \cdot 10^8$  Ра).

## Заключение

1. В системе тонких цилиндрических токовых слоев электромагнитные силы могут быть резко снижены, если эти слои разбиты на пары проводников с ортогональными токами (азимутальным и аксиальным) и при этом силы, действующие на каждый из проводников данной пары, уравновешены. Остаточные напряжения в прослойке между слоями имеют порядок величины  $B_0^2/(\mu_0 N)$ , где  $B_0$  — индукция поля на оси,  $N$  — число слоев.

2. Еще более резкое снижение остаточных напряжений имеет место в системе уравновешенных цилиндрических слоев с токами переменного направления. В этой системе при рациональном выборе распределения тока по слоям напряжения имеют порядок величины  $B_0^2/(\mu_0 N^2)$ .

## Список литературы

- [1] Шнеерсон Г.А. // ЖТФ. 1986. Т. 56. Вып. 1. С. 36–43.
- [2] Shneerson G.A. // IEE Transactions (Magnetics). 1992. Vol. 28. N 1. P. 505–508.
- [3] Shneerson G.A. // Megagauss Magnetic Field Generation and Pulsed Power Applications / Ed. M. Cowan, R.B. Spielman. New York: Nova Science Publishers, Inc., 1994. Vol. 1. P. 25–34. 171–172.
- [4] Shneerson G.A., Khosikov V.Yu., Amromin E.L. // Plasma Devices and Operations. 1998. Vol. 4. P. 321–327.
- [5] Игнатченко В.А., Карнеко М.М. // ЖТФ. 1968. Т. 38. P. 200.
- [6] Shneider-Muntau H.J., Rub P. // The Helix Project. Colloques internationaux C.N.R.S. N 242. Physique Sous Champs Intenses. 1974. P. 161.
- [7] Бодров С.Г., Шнеерсон Г.А. // Письма в ЖТФ. 1994. Т. 20. Вып. 9. С. 47–70.
- [8] Кузнецов А.А. // ЖТФ. 1961. Т. 31. Вып. 6. С. 650.
- [9] Монтгомери Д.Б. Получение сильных электромагнитных полей с помощью соленоидов. М.: Мир, 1971. С. 259.