

01;03

## Неустойчивость двумерного режима пленочного течения при неоднородной температуре свободной поверхности

© О.В. Шарыпов, К.А. Медведко

Институт теплофизики СО РАН, Новосибирск

E-mail: model@itp.nsc.ru

Поступило в Редакцию 29 января 2002 г.

Показана локальная длинноволновая неустойчивость двумерного стационарного режима течения тонкой пленки жидкости с неоднородным полем температуры свободной поверхности. Обосновано критическое условие перехода к регулярной трехмерной „струйной“ структуре течения, получено выражение для характерного периода.

При наличии локального источника тепла на поверхности пленки жидкости возникает неоднородность поля температуры, вызывающая термокапиллярный эффект, который может оказывать существенное влияние на процессы тепломассобмена и должен учитываться при проектировании технологического оборудования в химической промышленности и энергетике. На рисунке представлена типичная схема задачи. Ось  $x$  направлена вдоль подложки параллельно основному потоку, ось  $y$  — перпендикулярно плоскости подложки. Локальным (в направлении оси  $x$ ) источником тепла в экспериментах являлись нагреватель, смонтированный в подложку [1], или фронт волны горения [2]. При достаточно большом значении градиента температуры поверхности жидкости  $|\mathbf{grad} T|$  наблюдалось формирование трехмерной структуры течения: основная часть жидкости собиралась в периодические (по  $z$ ) струи. В двумерном режиме течения толщина пленки не постоянна, и при  $|\mathbf{grad} T| = |T_x|_{cr}$  достигается условие локального останова течения жидкости на поверхности пленки [3]. Более высоким значениям  $|\mathbf{grad} T|$  в двумерной модели соответствует режим с зоной возвратного течения. Мы предполагаем, что данное критическое условие связано с потерей устойчивости двумерной структуры течения по отношению к малым трехмерным возмущениям.

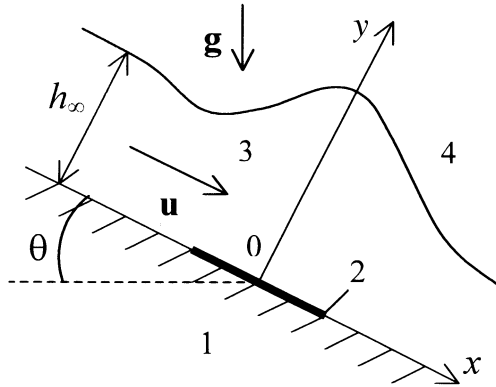


Схема течения: 1 — подложка, 2 — нагреватель, 3 — жидкость, 4 — газ.

Рассмотрим задачу об устойчивости стационарного двумерного решения по отношению к трехмерным возмущениям, монотонным по  $|x|$  и периодическим по  $z$ , в окрестности точки локального останова жидкости, т.е.  $x \rightarrow 0$ ,  $u|_{x \rightarrow 0, y \rightarrow h} \rightarrow 0$ . Это условие означает, что значения ряда термодинамических и гидродинамических параметров являются экстремальными:

$$T_x|_{x \rightarrow 0, y \rightarrow h} \rightarrow (T_x)_{cr}, \quad T_{xx}|_{x \rightarrow 0, y \rightarrow h} \rightarrow 0, \quad \sigma_{xx}|_{x \rightarrow 0} \rightarrow 0, \quad T_{yy}|_{x \rightarrow 0, y \rightarrow h} \rightarrow 0,$$

$$h_x|_{x \rightarrow 0} \rightarrow 0, \quad u_x|_{x \rightarrow 0} \rightarrow 0, \quad v|_{x \rightarrow 0} \rightarrow 0, \quad v_x|_{x \rightarrow 0} \rightarrow 0, \quad y_y|_{x \rightarrow 0} \rightarrow 0, \quad (1)$$

где  $h$  — толщина пленки,  $u$  —  $x$ -компонента скорости,  $v$  —  $y$ -компонента скорости,  $\sigma$  — поверхностное натяжение, нижние индексы  $t, x, y, z$  всюду означают дифференцирование. Пренебрегая потоком тепла через свободную поверхность, получим:  $T_y|_{x \rightarrow 0, y \rightarrow h} \rightarrow 0$ . Обмен массой и импульсом между газовой и жидкой фазами также не учитывается. С учетом свойств (1) двумерного решения в области  $x \rightarrow 0$ , уравнения неразрывности и Навье–Стокса в линейном приближении имеют вид:

$$\begin{cases} u'_x + v'_y + w'_z = 0; \\ u'_t + uu'_x + v'u_y + p'_x/\rho = \xi(u'_{xx} + u'_{yy} + u'_{zz}); \\ v'_t + uv'_x + p'_y/\rho = \xi(v'_{xx} + v'_{yy} + v'_{zz}); \\ w'_t + uw'_x + p'_z/\rho = \xi(w'_{xx} + w'_{yy} + w'_{zz}), \end{cases} \quad (2)$$

где  $t$  — время,  $w$  —  $z$ -компонента скорости,  $p$  — давление,  $\rho$  — плотность,  $\xi = \text{const}$  — кинематическая вязкость, штрихи над переменными обозначают возмущение решения двумерной задачи. В линейном приближении граничные условия на возмущенной свободной поверхности имеют вид:

$$\begin{cases} u'_y + h'u_{yy} + v'_x = \sigma'_x(\rho\xi)^{-1}; & v' = h'_t; & w'_y + v'_z = \sigma'_z(\rho\xi)^{-1}, & y = h; \\ p'(\rho\xi)^{-1} + (h'_{xx} + h'_{zz})\sigma(\rho\xi)^{-1} + h'_x u_y = 2v'_y + h'\xi^{-1}|\mathbf{g}|\cos\theta, & y = h, \end{cases} \quad (3)$$

где  $\mathbf{g}$  — ускорение свободного падения,  $\theta$  — угол отклонения от горизонтальной плоскости. В соотношения (3) входят производные возмущения поверхностного натяжения, которое является функцией температуры  $\partial\sigma'/\partial x_i = (d\sigma/dT)(\partial T'/\partial x_i)_{y=h}$ ,  $d\sigma/dT = \text{const}$ . Связь между  $T'$  и возмущениями гидродинамических параметров при  $y = h$  можно получить из линеаризованного уравнения теплопереноса, записанного на возмущенной свободной поверхности. Рассматривая возмущения, имеющие длину волны, намного превосходящую толщину пленки, можно не учитывать в уравнении теплопереноса слагаемые, связанные с кондуктивным теплообменом при условии  $\text{Re} \cdot \text{Pr} \gg 1$ .  $\text{Re} = h_\infty^3 \xi^{-2} |\mathbf{g}| \sin\theta$  — число Рейнольдса,  $\text{Pr}$  — число Прандтля, индекс  $\infty$  означает условие удаленности от температурной неоднородности вверх по потоку. Тогда с учетом (1) получим:

$$\sigma'_t = -\sigma_x(u' + u_y h'), \quad x \rightarrow 0, \quad y = h. \quad (4)$$

В уравнения (2)–(4) входят характеристики двумерного решения, которые приближенно могут быть представлены в форме:  $u|_{x \rightarrow 0} = f_1(y)$ ,  $u_y|_{x \rightarrow 0} = f_2(y)$ ,  $\sigma|_{x \rightarrow 0} = \text{const}$ ,  $\sigma_x|_{x \rightarrow 0} = (\sigma_x)_{cr} = \text{const}$ ,  $u_y|_{x \rightarrow 0, y=h} = (\rho\xi)^{-1}(\sigma_x)_{cr} = \text{const}$ ,  $u_{yy}|_{x \rightarrow 0, y=h} = -\xi^{-1}|\mathbf{g}|\sin\theta = \text{const}$ . Тогда решения задачи (2)–(4) имеют следующий общий вид:

$$\begin{bmatrix} H'(x, y, z, t) \\ \sigma'(x, z, t) \\ h'(x, z, t) \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{s=1}^s \begin{bmatrix} (H'_s(y))_j \\ (\delta\sigma_s)_j \\ (\delta h_s)_j \end{bmatrix} \exp(\lambda_j x + i\kappa_j z + \Omega_j t), \quad (5)$$

здесь  $H' \equiv \{u', v', w', p'\}$ , индекс  $s$  обозначает волновые моды возмущений, каждая из которых представляет собой суперпозицию гармоник,  $i = \sqrt{-1}$ , инкременты и волновые числа возмущений  $\Omega_j$ ,

$\kappa_j, \lambda_j$  — постоянные, причем  $\text{Im}(\kappa_j) = 0, \kappa_j \geq 0, \text{Im}(\lambda_j) = 0, (x \cdot \lambda_j) \leq 0$ . Подстановка (5) в уравнения (2) приводит к уравнению Орра–Зоммерфельда:

$$V_{\varphi\varphi\varphi\varphi} + 2(\bar{\lambda}^2 - \bar{\kappa}^2)V_{\varphi\varphi} + (\bar{\lambda}^2 - \bar{\kappa}^2)^2V - (\bar{\Omega} + \bar{\lambda}\bar{u})(V_{\varphi\varphi} + (\bar{\lambda}^2 - \bar{\kappa}^2)V) - \bar{\lambda}V\text{Re}, \quad (6)$$

где  $V = (v'_s(y))_j, \varphi = yh_\infty^{-1}, \bar{\kappa} = \kappa_j h_\infty, \bar{\lambda} = \lambda_j h_\infty, \bar{\Omega} = \Omega_j h_\infty^2 \xi^{-1}, \bar{u} = uh_\infty \xi^{-1}$ . В случае коротковолновых возмущений  $\bar{\kappa} \geq 1$  в исходных уравнениях можно пренебречь конвективными и „термокапиллярными“ слагаемыми по сравнению с эффектами, связанными с вязкостью. Тогда задача сводится к описанию гравитационно-капиллярных волн малой амплитуды на поверхности покоящейся жидкости ( $\bar{\lambda} \rightarrow 0, u' \rightarrow 0$ ). С учетом условия  $V = 0$  при  $\varphi = 0$  для тонкого слоя жидкости ( $\bar{\gamma}_s \ll 1$ ) получим известную [4] связь:

$$\Omega^2 + 4\xi\kappa^2\Omega + \sigma\rho^{-1}\kappa^4h + \kappa^2h|\mathbf{g}|\cos\theta \approx 0. \quad (7)$$

Тем самым, коротковолновые возмущения являются затухающими.

Анализируя случай  $\bar{\kappa} \ll 1$ , рассмотрим решение уравнений (2) вблизи свободной поверхности ( $|\varphi - 1| \ll 1$ ). В этой области эффекты, связанные с вязкостью жидкости, наименее существенны. Предположим, что для длинноволновых возмущений в уравнениях (2) можно пренебречь вязкими членами. Кроме того, учтем:  $u|_{x \rightarrow 0, y \rightarrow h} \rightarrow 0$ . Тогда уравнение (6) существенно упростится:  $\bar{\Omega}V_{\varphi\varphi} + \bar{\lambda}V\text{Re} = 0$ . Это позволяет свести задачу к решению системы алгебраических уравнений и получить выражения:

$$\Omega \approx \pm 9\kappa(\sigma_x)_{cr}^2 / (4\rho^2\xi|\mathbf{g}|\sin\theta); \quad \lambda \approx \mp\kappa. \quad (8)$$

Здесь использованы предположения:  $l_\sigma \gg h_\infty, \kappa^2 l_\sigma^2 \gg \cos\theta$ , где  $l_\sigma^2 = \sigma/(\rho|\mathbf{g}|)$  — капиллярная постоянная. Согласно условию  $(x \cdot \lambda_j) \leq 0$ , в области  $x > 0$  показатель  $\lambda \leq 0$  и в соответствии с (8)  $\Omega \geq 0$ , т.е. имеет место усиление малых возмущений, двумерное стационарное решение оказывается неустойчивым. Соотношение (8) не учитывает затухания коротковолновых возмущений и не предсказывает длины волны наиболее быстро растущего возмущения  $\Lambda_*$ . Для расширения сферы применимости решения (8) учтем в нем в качестве малой поправки результат, полученный для коротковолновых возмущений (7), пренебрегая эффектом вязкой диссипации:

$$\Omega_j \approx 9\kappa_j(\sigma_x)_{cr}^2 (4\rho^2\xi|\mathbf{g}|\sin\theta)^{-1} - 2\kappa_j^3 h(\sigma_x)_{cr}^{-2} \sigma\rho\xi|\mathbf{g}|\sin\theta/9. \quad (9)$$

Выражение (9) позволяет определить  $\Lambda_*$ :

$$\begin{aligned} \Lambda_* &\approx 2\pi l_\sigma (2/3 \operatorname{Re} h_\infty / h \sin \theta)^{-1/2} (\sigma_x)_{cr}^{-2} (2/3 \rho h_\infty |\mathbf{g}| \sin \theta)^2 \\ &\approx 5.3 \cdot 10^{-3} \text{ м.} \end{aligned} \quad (10)$$

В (10) приведена оценка величины  $\Lambda_*$  для раствора 25%  $\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}$  в воде при  $\operatorname{Re} = 2/3$ ,  $\theta = \pi/2$ ,  $T_\infty = 300 \text{ К}$  ( $h_\infty \approx 1.26 \cdot 10^{-4} \text{ м}$ ,  $l_\sigma = 1.91 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ ). Оценка, полученная на основе линейной теории, близка к данным экспериментов [1]:  $(6.5 \div 7.5) \cdot 10^{-3} \text{ м}$ . Учитывая  $(\sigma_x)_{cr} \sim h_\infty \rho |\mathbf{g}| \sin \theta$ , из (10) следует, что  $\Lambda_* \sim (\sin \theta)^{-1/2}$  при фиксированном  $\operatorname{Re}$ . Именно такая зависимость наблюдается и в эксперименте [5].

Анализ выполнен для критического режима течения, когда достигается локальный останов жидкости на поверхности пленки. Если критическое условие не выполняется, то возмущения выносятся потоком жидкости из узкой области, в которой возможно их усиление, не успевая достигнуть заметной амплитуды. Тем самым данное условие играет роль критерия перехода к „струйному“ режиму течения. Оно означает предел, до которого можно абстрагироваться от возможного наличия мелкомасштабной трехмерной структуры течения и приближенно описывать его с помощью двумерной модели.

## Список литературы

- [1] *Kabov O.A., Marchuk I.V., Chupin V.M.* // Russian Journal of Engineering Thermophysics. 1996. V. 6. N 2. P. 105–138.
- [2] *Коржавин А.А., Бунев В.А., Гордиенко Д.М.* и др. // Физика горения и взрыва. 1998. Т. 34. № 3. С. 15–18.
- [3] *Шарыпов О.В., Медведко К.А., Фомин А.В.* // Теплофизика и аэромеханика. 2001. Т. 8. № 3. С. 453–457.
- [4] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика: Учеб. пособие. В 10 т. Т. VI. Гидродинамика. 3-е изд., перераб. М.: Наука, 1986. 736 с. § 62.
- [5] *Kabov O.A., Legros J.C., Muzykantov A.V.* et al. // Proc. of APOLLONIA'99: Joint Meeting of the 4<sup>th</sup> Workshop „Transport Phenomena in Two-Phase Flow“ and „EFCE Working Party on Multiphase Fluid Flow“. Sozopol, Bulgaria, 1999. P. 243–250.