

01

Эволюция бегущих волн в бистабильной среде с периодическими граничными условиями

© И.А. Шепелев, Т.Е. Вадивасова

Саратовский государственный университет
E-mail: igor_sar@li.ru

Поступило в Редакцию 1 апреля 2015 г.

Моделируется динамика активной среды с периодическими граничными условиями в виде кольца из 1000 идентичных бистабильных осцилляторов с диффузионной связью. Впервые при данном типе взаимодействия элементов в кольце бистабильных осцилляторов установлены существование бегущих волн и мультистабильность волновых режимов. Исследуется эволюция волновых режимов в зависимости от коэффициента диффузии.

Бистабильными средами принято называть активные среды, состоящие из бистабильных элементов [1,2]. Изолированный элемент такой среды представляет собой динамическую систему с двумя устойчивыми состояниями равновесия. При внешнем воздействии, превышающем некоторый порог, происходят переключения между точками равновесия. В результате взаимодействия элементов в бистабильных средах распространяются волны переключений, которые могут возникать во многих практических задачах, таких как проблема горения [3,4] или описание свойств ферромагнетиков [5]. Бистабильные среды возможны и в задачах биофизики, хотя для биофизических систем более типично возбудимое поведение элементов.

При периодических граничных условиях (ГУ) можно ожидать, что в бистабильной среде будут рождаться бегущие волны переключений, подобно тому, как возникают волновые режимы в возбудимой среде [6–8]. Бегущие волны в бистабильных средах с периодическими ГУ практически не изучались. Моделью бистабильной среды с периодическими ГУ может служить кольцо, составленное из достаточно большого числа бистабильных элементов. Если в качестве элементов использовать наиболее популярную модель бистабильной системы —

осциллятор Дуффинга, то при диффузионном взаимодействии волновых режимов в кольце не возникает. Однонаправленная (конвективная) связь может привести к появлению бегущих волн даже в кольце из передемпфированных бистабильных осцилляторов [5]. Однако однонаправленная связь не столь типична для реальных систем, как диффузионное взаимодействие. Она обеспечивает дополнительную подкачку энергии в систему, что может привести к возникновению сложных колебаний [9]. В то же время, как показано в данной работе, можно выбрать такой бистабильный осциллятор, который позволит построить модель бистабильной среды с диффузионным взаимодействием, обладающей при периодических ГУ множеством волновых режимов.

В данной работе исследуется модель бистабильной среды с диффузионным взаимодействием, представляющая собой кольцо из 1000 бистабильных элементов. В качестве базового элемента выбран осциллятор ФицХью-Нагумо (ФХН) [10], часто встречающийся при моделировании возбудимых систем и сред, особенно в задачах нейродинамики [11,12]. В данной работе осциллятор ФХН рассматривается не в возбудимом, а в бистабильном режиме. Кольцо осцилляторов описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{dx_j}{dt} &= x_j - y_j - \frac{x_j^3}{3} + k(x_{j-1} + x_{j+1} - 2x_j), \\ \frac{dy_j}{dt} &= \varepsilon(\alpha x_j - y_j + \beta), \quad j = 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (1)$$

$$x_{j\pm N}(t) \equiv x_j(t), \quad y_{j\pm N}(t) \equiv y_j(t),$$

где x_j, y_j — безразмерные вещественные динамические переменные, $j \in [1; N]$ — номер элемента (дискретная пространственная координата), N — число элементов в кольце, t — безразмерное время, $\alpha, \beta, \varepsilon$ — управляющие параметры, k — коэффициент связи. Пусть длина системы в пространстве есть L , тогда элементы среды имеют размер Δs (шаг дискретизации пространственной координаты). В непрерывном пределе $N \rightarrow \infty, \Delta s \rightarrow 0$ получаем непрерывную модель среды, задаваемую уравнениями в частных производных:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial t} &= x - y - \frac{x^3}{3} + \delta \frac{\partial^2 x}{\partial s^2}, \\ \frac{\partial y}{\partial t} &= \varepsilon(\alpha x - y + \beta), \end{aligned}$$

$$x(s \pm L, t) \equiv x(s, t), \quad y(s \pm L, t) \equiv y(s, t), \quad (2)$$

где $s \in [0, L]$ — безразмерная пространственная координата, $\delta = k(\Delta s)^2$ — коэффициент диффузии. При заданном коэффициенте диффузии в среде (2) соответствующее значение коэффициента связи между соседними элементами k в дискретной модели (1) должно расти пропорционально N^2 . Во всех проведенных численных экспериментах были зафиксированы значения: $N = 1000$, $L = 100$, $\alpha = 0.7$, $\beta = 0$, $\varepsilon = 0.2$. Коэффициент диффузии δ служил управляющим параметром. При выбранных значениях α , β и ε на фазовой плоскости отдельно взятого осциллятора существуют 2 точки равновесия типа „устойчивый фокус“. Кроме того, следует отметить, что при $\beta = 0$ фазовый портрет осциллятора ФХН обладает симметрией относительно замены $x \rightarrow -x$, $y \rightarrow -y$.

Целью работы было показать возможность существования бегущих по кольцу волн в бистабильной среде с диффузионным взаимодействием, определить область значений коэффициента диффузии, при которых они существуют, рассмотреть возможность сосуществования различных волновых мод, реализуемых с разных начальных условий, и исследовать, как меняются волновые режимы при изменении коэффициента диффузии.

Проведенные численные эксперименты показали, что при малом значении коэффициента диффузии (менее 0.0001) исследуемая модель демонстрирует стационарные во времени пространственные структуры, форма которых определяется исключительно начальными условиями. Такое поведение является следствием дискретности пространственной координаты, поскольку в численных расчетах модель (2) заменяется на модель (1) [13]. При дальнейшем увеличении коэффициента δ в модели среды рождаются бегущие волны с ненулевой амплитудой и очень малой фазовой скоростью, которая увеличивается с ростом коэффициента диффузии. При этом имеет место явление мультистабильности, т.е. выбором начальных условий при одних и тех же значениях параметров и коэффициента диффузии можно получить множество бегущих волн, которые отличаются друг от друга длинами волн и направлением их распространения. Для обозначения различных волновых мод введем номер n , равный количеству длин волн, укладывающихся на длине системы. Численно строились пространственно-временные диаграммы режимов, на которых градации серого цвета (от

черного до белого) соответствуют различным уровням сигнала $x(s, t)$. Примеры пространственно-временных диаграмм приведены на рис. 1, *b*. Из рисунка видно, что структура бегущей волны может быть как простой (темные и светлые полосы одинаковой ширины на рис. 1, *a*), так и достаточно сложной, что проявляется в чередовании полос различной ширины (рис. 1, *b*).

Расчеты показали, что с ростом коэффициента диффузии δ пространственные профили волн претерпевают качественные изменения. Рассмотрим интервалы между последовательными переключениями элементов среды в одном направлении, определяя момент переключения условием $x(s, t) = 0$. При малых значениях δ переключения в среде происходят через один и тот же интервал. С ростом δ возникают несколько таких интервалов, что соответствует чередованию полос разной ширины на пространственно-временной диаграмме (рис. 1, *b*). Причина этого явления становится понятной, если рассмотреть проекции фазовой траектории на плоскость переменных x, y в какой-либо фиксированной точке пространства. Примеры таких проекций для трех значений δ представлены на рис. 2. На плоскости x, y отмечены характерные точки F_1 и F_2 , соответствующие устойчивым фокусам в отдельном элементе среды. Траектория переходит из окрестности одной точки в окрестность другой, образуя замкнутый контур, соответствующий колебаниям во времени. При низком уровне диффузии траектория, обходя замкнутый контур, каждый раз делает по одному витку вокруг точек F_1, F_2 (рис. 2, *a*). В этом случае существует только один интервал переключения. Далее, начиная с некоторого значения δ , траектория ведет себя более сложным образом, совершая витки вокруг точек F_1, F_2 или обходя контур без них (рис. 2, *b*). Таким образом, могут возникать различные последовательности длин интервалов переключений. При этом колебания во времени и пространстве будут иметь достаточно сложную форму. С увеличением значения коэффициента диффузии выше определенного предела вращения траектории вокруг точек F_1, F_2 исчезают (рис. 2, *c*). Снова существует только один интервал переключения, но колебания имеют уже другую форму.

На рис. 3 представлена зависимость интервалов переключений от коэффициента диффузии, полученная для моды $n = 10$. Можно видеть область значений коэффициента диффузии, в пределах которой данная волновая мода имеет более сложную форму. При этом внутри области

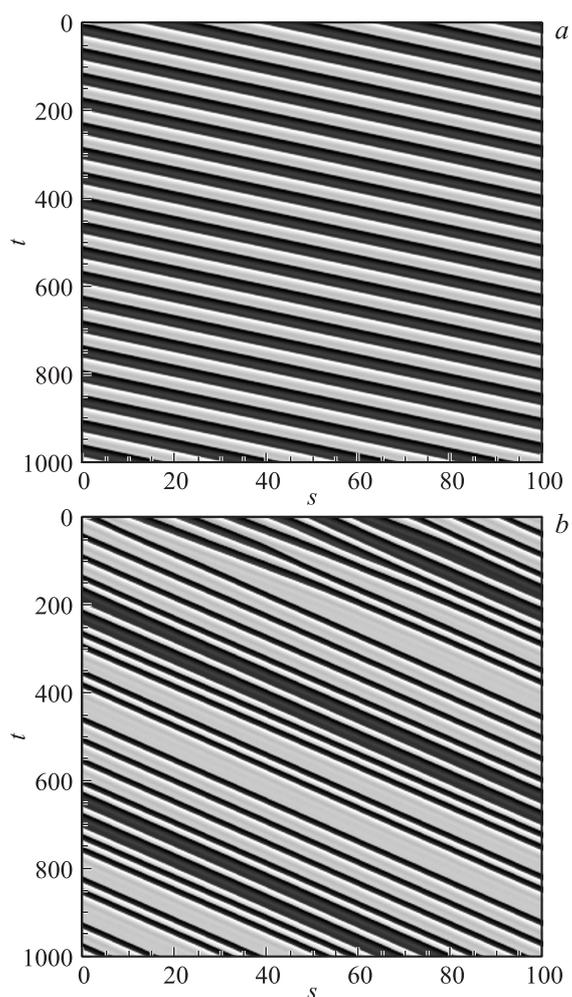


Рис. 1. Примеры пространственно-временных диаграмм волновых структур в бистабильной среде: *a* — волновая мода $n = 4$ при значении коэффициента диффузии $\delta = 0.175$; *b* — волновая мода $n = 10$ при $\delta = 0.036$. На диаграммах по оси абсцисс отложена пространственная координата s , а по оси ординат — время t . Градации серого цвета соответствуют различным уровням сигнала $x(s, t)$: черный цвет — минимальному значению переменной, а белый — максимальному.

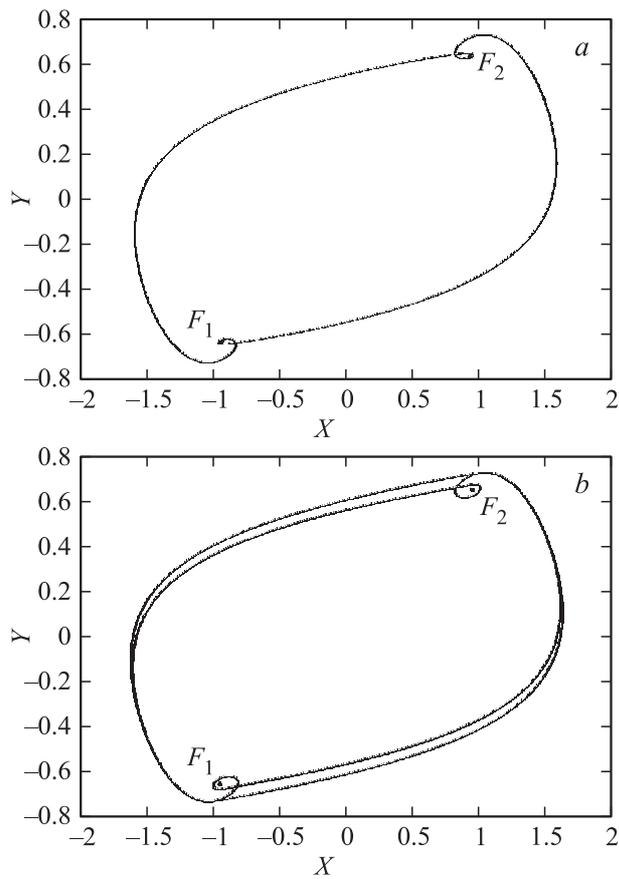


Рис. 2. Проекция фазовых траекторий на плоскость x, y в фиксированной точке пространства для волновой моды $n = 10$ при различных значениях коэффициента диффузии: $\delta = 0.028$ (a); $\delta = 0.035$ (b); $\delta = 0.041$ (c). Точки F_1, F_2 соответствуют точкам равновесия отдельного элемента.

наблюдаются перестройки, проявляющиеся в изменении числа интервалов переключений и скачкообразном изменении длин этих интервалов.

Таким образом, нами установлено, что бегущие волны и явление мультистабильности характерны не только для возбудимых распре-

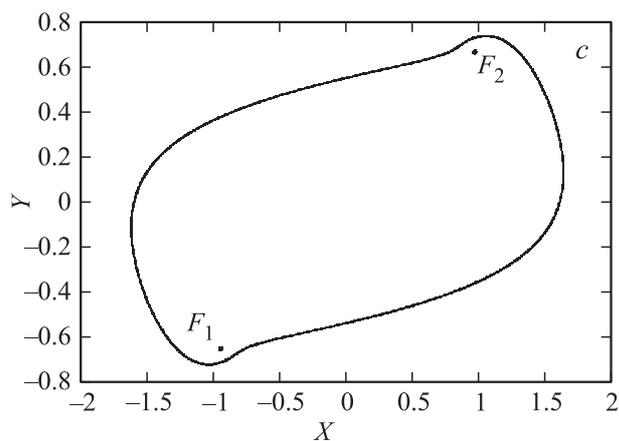


Рис. 2 (продолжение).

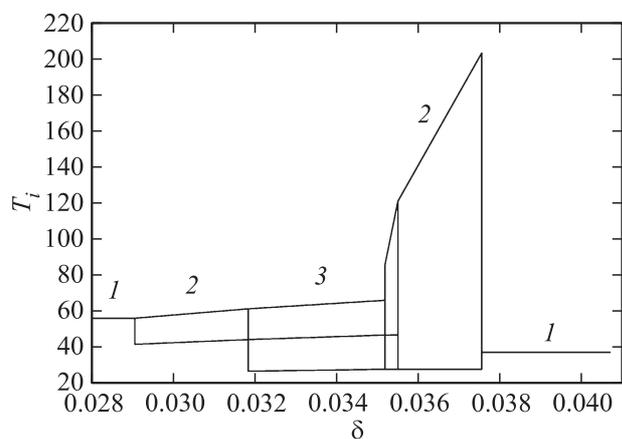


Рис. 3. Длины интервалов переключения элементов среды в зависимости от коэффициента диффузии для волновой моды $n = 10$. Числами указано количество различных интервалов T_i .

ленных систем и сред при периодических граничных условиях, но также могут возникать и в аналогичных бистабильных системах и средах с диффузионным взаимодействием. На примере исследуемой модели бистабильной среды были выявлены закономерности эволюции волновых мод при изменении коэффициента диффузии. Описанное поведение среды характерно именно для бистабильного режима и не наблюдается в случае, если среда является возбудимой.

Было установлено существование областей сложного поведения для всех исследованных волновых мод модели (2). Границы этих областей и последовательность перестроек внутри них для различных мод могут сильно различаться. Общая тенденция состоит в смещении границ областей в сторону меньших значений коэффициента диффузии с ростом номера моды n (т.е. с уменьшением длины волны). Расчеты показали, что при вариации параметров элементарных осцилляторов в достаточно широких пределах волновые режимы в среде (2) существуют и эволюционируют описанным выше образом с ростом коэффициента диффузии. Асимметрия, возникающая в элементе среды при $\beta \neq 0$, не приводит к разрушению указанного типа поведения.

Данная работа поддержана грантом РФФИ № 14-52-12002.

Авторы выражают благодарность проф. В.С. Анищенко и проф. Д.Э. Постнову за интерес к работе и полезные обсуждения.

Список литературы

- [1] Лоскутов А.Ю., Михайлов А.С. Основы теории сложных систем. М.; Ижевск: НИЦ „РХД“, Институт компьютерных исследований, 2007. 620 с.
- [2] Nekorkin V.I., Velarde M.G. Synergetic phenomena in active lattices. Berlin: Springer, 2002.
- [3] Зельдович Я.Б., Баренблатт Г.И., Либрович В.Б., Махвиладзе Г.М. Математическая теория горения и взрыва. М.: Наука, 1980. 478 с.
- [4] Мержанов А.Г., Руманов Э.Н. // УФН. 1987. Т. 151. № 553.
- [5] Bulsara A.R., In V., Kho A. et al. // Phys. Rev. E. 2004. V. 70. P. 036 103.
- [6] Jones K.R.T. // Trans. Amer. Math. Soc. 1984. T. 286. C. 431.
- [7] Nagai Y., González H., Shrier A., Glass L. // Phys. Rev. Lett. 2000. V. 84. P. 4248.

- [8] *Alford J.G., Auchmuty G.* // J. Math. Biol. 2006. V. 53. P. 797.
- [9] *Perlikowski P., Yanchuk S., Wolfrum M.* et al. // Chaos. 2010. V. 20 P. 013 111.
- [10] *Fitz Hugh R.A.* // Biophys. J. 1961. V. 1. P. 445.
- [11] *Романовский Ю.М., Степанова Н.В., Чернавский Д.С.* Математическое моделирование в биофизике. М.; Ижевск: НИЦ „РХД“, Институт компьютерных исследований. 2003. 402 с.
- [12] *Елькин Ю.Е.* Математическая биология и биоинформатика. 2006. Т. 1. С. 24.
- [13] *Postnov D.E., Müller F., Schuppner R.B., Schimansky-Geier L.* // Phys. Rev. E. 2009. V. 80. P. 031 921.