11

Спектр волн проводящего цилиндра в изотропной плазме

© В.А. Малахов, А.С. Раевский, С.Б. Раевский

Нижегородский государственный технический университет
им. Р.Е. Алексеева, Нижний Новгород
E-mail: physics@nntu.nnov.ru

Поступило в Редакцию 30 июля 2015 г.

Импедансным методом решена краевая задача о распространении электромагнитного поля вдоль цилиндрического проводника в изотропной плазменной среде. Показана ограниченность спектра волн такой направляющей структуры, включающего в себя быструю собственную волну E_{01} и несобственные гибридные волны HE_{nm} и EH_{nm}, как быстрые, так и медленные, счетное множество которых определяется азимутальным индексом.

Несмотря на простоту аналитического описания рассматриваемой направляющей структуры, целый ряд вопросов, касающихся полноты спектра ее волн, до настоящего времени остается открытым. При строгом подходе электромагнитное поле, связанное с проводящим цилиндром (с проводником, при малых радиусах цилиндра), описывается несамосопряженной краевой задачей. При этом несамосопряженность при использовании импедансного метода обусловливается неэквивалентностью граничных условий прямой и сопряженной краевых задач. В общем случае собственные значения несамосопряженных краевых задач являются [1] комплексными величинами, что определяет комплексность волновых чисел [2–4]. В связи с этим исключительно важным является вопрос классификации волн направляющей структуры и определения их полного спектра.

Исследованию процессов распространения электромагнитных полей вдоль импедансных поверхностей посвящено достаточно много работ [5–10]. Однако полной ясности относительно особенностей волн, направляемых этими поверхностями, нет. В частности, несмотря на многократные обсуждения, так и нет ясности в отношении волны Ценнека. Основным недостатком дискуссий было то, что они, как правило, проводились на уровне двумерных краевых задач. Целью данной

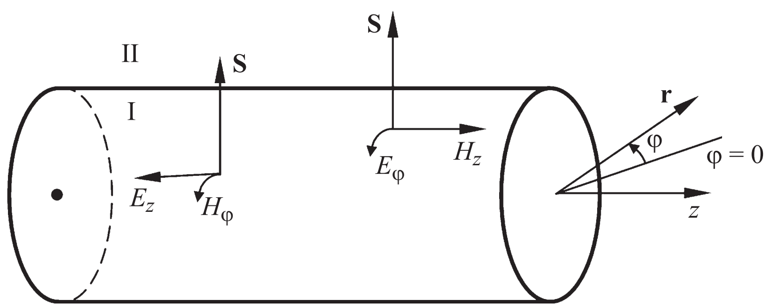

Рис. 1. Проводящий цилиндр в изотропной плазме.

работы является иследование особенностей спектра волн проводящего цилиндра, помещенного в неограниченную плазменную среду.

Рассмотрим краевую задачу о распространении электромагнитного поля вдоль проводящего цилиндра, помещенного в неограниченную плазменную среду (рис. 1). Параметры направляющей структуры

$$\varepsilon_1 = \varepsilon' + i\varepsilon'' = \varepsilon' - i\,\frac{\sigma}{\omega}, \quad \tilde{\varepsilon} = 1 - \omega_p^2/\omega^2, \quad \omega_p = \sqrt{4\pi N e^2/m},$$

где ε_1, $\tilde{\varepsilon}$ — диэлектрические проницаемости проводника и плазменной среды, ω_p — ленгмюровская частота, N — концентрация электронов, e и m — заряд и масса электрона.

Поле во внешней области II в общем случае описывается векторами Герца, продольные компоненты которых удовлетворяют уравнению Гельмгольца и записываются в виде

$$\Pi_z^e = AH_n^{(2)}(\alpha r)\cos n\varphi e^{-i\beta z}, \Pi_z^m = BH_n^{(2)}(\alpha r)\sin n\varphi e^{-i\beta z}, \qquad (1)$$

где $\alpha = \sqrt{\varepsilon_2\mu_2\omega^2 - \beta^2}$; $\alpha = \gamma + i\delta$ — поперечное и продольное волновые числа; $H_n^{(2)}(\alpha r)$ — функция Ханкеля 2-го рода.

При описании поля во внешней области функциями Ханкеля предполагается, что оно может как удовлетворять, так и не удовлетворять условию излучения на бесконечности. При $\delta < 0$ поле экспоненциально убывает по радиальной координате и является полем собственной волны. При $\delta > 0$ поле нарастает по радиальной координате и соответствует несобственной волне. В любом случае функция Ханкеля описывает во внешней области поле излучения. При $\delta < 0$ функция Ханкеля является решением однородной (по радиальной координате) краевой задачи, при $\delta < 0$ — полуоднородной. Полуоднородная краевая задача — задача на однородном дифференциальном уравнении с частично неоднородными (в частности, на бесконечности по r) граничными условиями.

Выражая компоненты поля через векторы Герца (1) и подставляя их в граничные условия Щукина–Леонтовича [11], получаем систему двух линейных однородных алгебраических уравнений относительно коэффициентов A и B. Условие нетривиальности решений этой системы приводит к дисперсионному уравнению волн рассматриваемой направляющей структуры

$$W\left(\frac{\beta n}{a}\right)^2 [H_n^{(2)}(\alpha a)]^2 + \left[W\alpha^2 H_n^{(2)}(\alpha a) - i\omega\mu_2\alpha H_n^{(2)'}(\alpha a)\right] \times \left[\alpha^2 H_n^{(2)}(\alpha a) - i\omega\varepsilon_2\alpha W H_n^{(2)'}(\alpha a)\right] = 0, \qquad (2)$$

где $W = \sqrt{\mu_1/\varepsilon_1}$.

При $n \neq 0$ дисперсионное уравнение (2) описывает гибридные волны, при $n = 0$ оно распадается на два дисперсионных уравнения симметричных волн. Введя обозначение $P_n(\alpha a) = H_n^{(2)'}(\alpha a)/H_n^{(2)}(\alpha a)$, разрешаем уравнение (2) относительно функции $P_n(\alpha a)$:

$$P_n(\alpha a) = \frac{-i\omega\alpha^3(\varepsilon W^2 + \mu) \pm \sqrt{4W^2\varepsilon\mu\omega^2\alpha^2\left[\alpha^4 + \left(\frac{\beta n}{a}\right)^2\right] - \omega^2\alpha^6(\varepsilon W + \mu)^2}}{2\varepsilon\mu\omega^2\alpha^2 W}. \qquad (3)$$

Как следует из (3), дисперсионное уравнение имеет две принципиально различные ветви решений, соответствующие двум знакам перед радикалом.

Как отмечено выше, при $n = 0$ дисперсионное уравнение (2) распадается на два уравнения. Первая квадратная скобка дает дисперсионное уравнение симметричных H-волн, вторая — дисперсионное уравнение E-волн.

В соответствии с общим подходом к определению типа электродинамического оператора [2–4] краевые задачи, приводящие к дисперсионным уравнениям симметричных волн, являются самосопряженными. Собственные значения таких задач должны быть [1,2] действительными

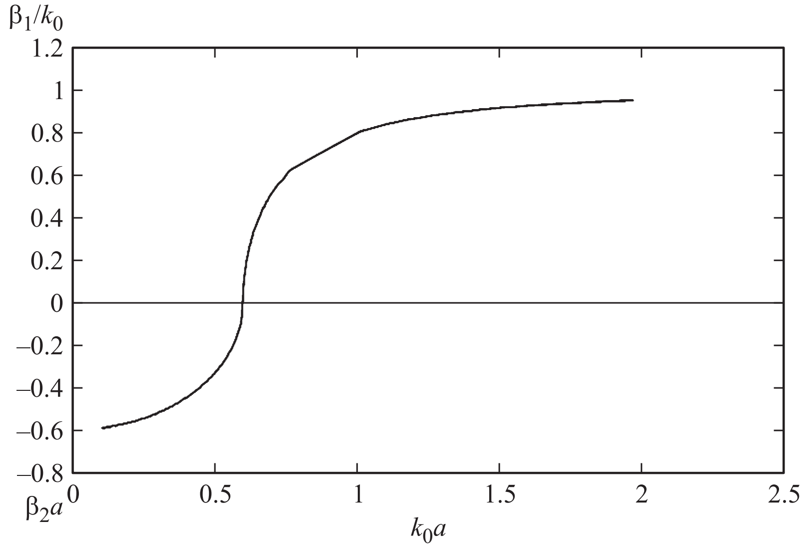

Рис. 2. Характеристика затухания (до точки пересечения с осью $\beta_{1,2} = 0$) и дисперсионная хаарктеристика (выше этой точки по частотной оси) симметричной волны для следующих параметров структуры: радиус металлического стержня $a = 0.3\,\mathrm{m}$; проводимость металла $\sigma = 56 \cdot 10^6\,\mathrm{S/m}$; концентрация электронов плазмы $N = 1 \cdot 10^{24}\,\mathrm{m}^{-3}$.

величинами. Однако в силу того что рассматриваемая направляющая структура с потерями (диэлектрическая проницаемость проводящего цилиндра — комплексная величина), ее волны, вообще говоря, должны иметь комплексные волновые числа. Поскольку ввиду использования приближенных граничных условий Щукина–Леонтовича формулировка краевой задачи является приближенной, ее (задачу) следует трактовать как квазисамосопряженную. Поэтому волновые числа, получаемые из дисперсионных уравнений, должны быть „слабо комплексными“. Квазисамосопряженность симметричных краевых задач должна приводить к исчезающе малой комплексности волновых чисел. Последние, в силу формальной самосопряженности краевой задачи, должны быть либо чисто действительными, либо чисто мнимыми величинами. Численные исследования подтверждают эти априорные высказывания. Симметричная E-волна является быстрой (ее фазовая скорость больше скорости света в окружающей проводящий цилиндр среде, рис. 2) с экспоненциально ($\delta < 0$) убывающим при удалении от направляющей структуры полем. Такую волну в литературе принято [11] называть волной Ценнека. Вокруг нее длительное время (более 100 лет) идут научные споры, которые привели [10], вероятно, к ошибочному отрицанию ее реального существования.

Поскольку, как показали численные результаты, волна имеет (при квазисамосопряженности краевой задачи) либо чисто действительное (на частотах выше критической) продольное волновое число, либо чисто мнимое (на частотах ниже критической), групповая скорость ее была вычислена как $v_g = d\omega/d\beta$, т. е. прямым дифференцированием дисперсионной характеристики. Расчеты показали, что рассматриваемая симметричная E-волна имеет $v_g < c$, т. е. вполне физична.

При уменьшении концентрации электронов плазмы критическая частота волны E_{01} уменьшается. На рис. 3, a приведены частотные зависимости фазовых постоянных β_1 и коэффициентов затухания β_2 (в запредельной области) при различных значениях концентрации электронов плазмы для симметричной волны E_{01}. Уменьшая N, переходим к направляющей структуре — проводящий цилиндр в пустоте. В этом случае критическая частота рассматриваемой симметричной волны стремится к нулю (рис. 3, a).

Таким образом, приводимые результаты говорят о существовании в однопроводной цилиндрической структуре волны E_{01}, обладающей признаками волны Ценнека. Эта волна описывается решением квазисамосопряженной краевой задачей: для нее выполняется нулевое граничное условие на бесконечности. Численные исследования показали, что найденное решение дисперсионного уравнения симметричных E-волн является единственным, а уравнение симметричных H-волн вообще не имеет решений.

Краевая задача для несимметричных волн ($n \neq 0$) является несамосопряженной: для нее не выполняется второе условие самосопряженности [2–4] — граничные условия прямой и сопряженной краевых задач не эквивалентны. Поскольку собственные значения несамосопряженных краевых задач в общем случае являются [1] комплексными величинами, волновые числа, как решения дисперсионного уравнения (2), в общем случае должны быть комплексными и соответствовать, в принципе, как собственным, так и несобственным комплексным волнам [2–4].

Наличие у дисперсионного уравнения (3) двух знаков перед радикалом говорит о существовании ветвей решений, соответствующих

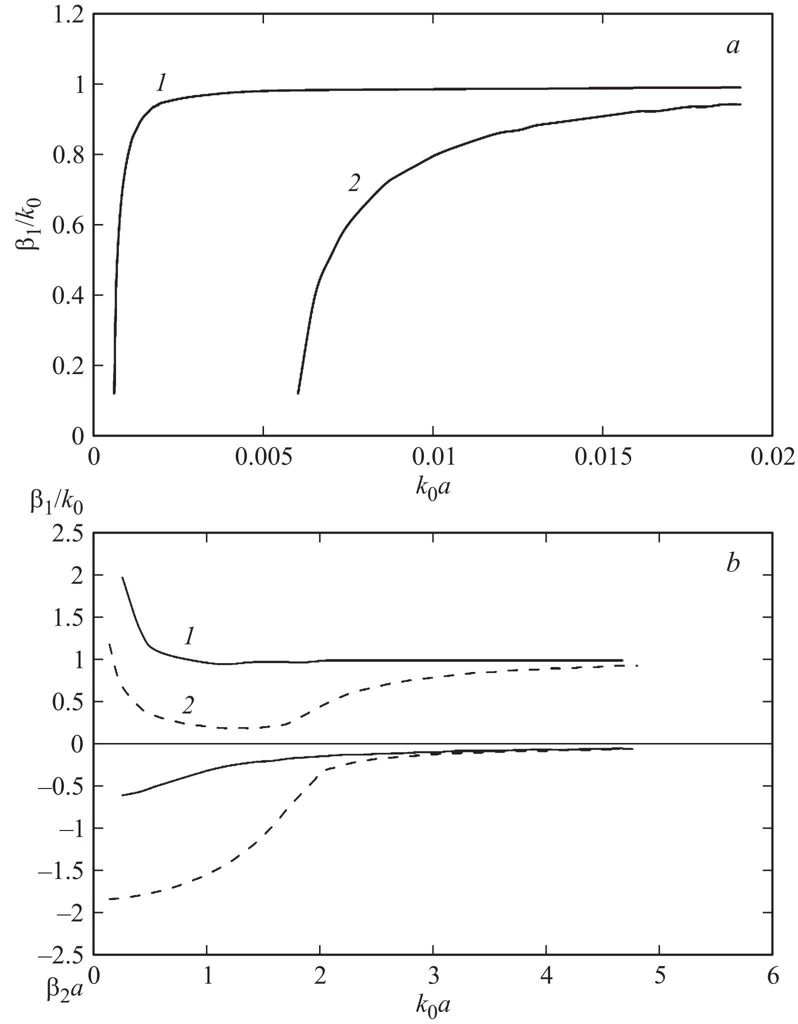

Рис. 3. Дисперсионные характеристики: *a* — симметричной волны для концентрации: *1* — $N = 1 \cdot 10^{18}\,\mathrm{m}^{-3}$, *2* — $N = 1 \cdot 10^{20}\,\mathrm{m}^{-3}$; *b* — волны EH_{11} концентрации: *1* — $N = 1 \cdot 10^{24}\,\mathrm{m}^{-3}$, *2* — $N = 1 \cdot 10^{25}\,\mathrm{m}^{-3}$; *c* — волн HE_{21} и EH_{21} для концентрации $N = 1 \cdot 10^{24}\,\mathrm{m}^{-3}$.

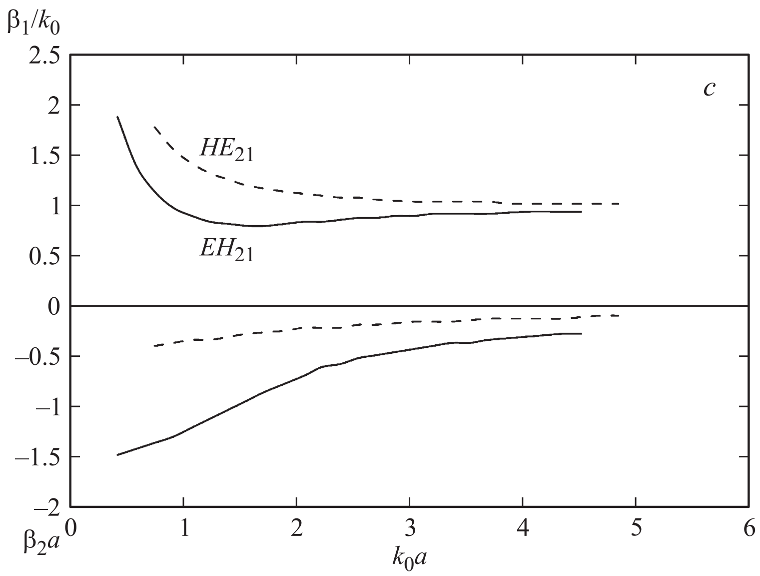

Рис. 3 (*продолжение*).

волнам HE_{nm} и EH_{nm}, которые, будучи собственными волнами, имеют убывающее по r поле, будучи несобственными — нарастающее. В первом случае $\mathrm{Im}\,\alpha = \delta < 0$, во втором $\mathrm{Im}\,\alpha = \delta > 0$, где $\alpha = \gamma + i\delta$. Полагая, что волна EH_{nm} более высокого порядка по сравнению с HE_{nm}, можно записать условие: $\delta(HE_{nm}) > \delta(EH_{nm})$, из которого при сопоставлении уравнений (3) определяем тип волны.

На рис. 3, b представлены частотные зависимости действительной и мнимой частей продольного волнового числа волны EH_{11}, единственной при $n = 1$. Как видно из приведенных характеристик, в широком диапазоне частот волна EH_{11} распространяется практически без дисперсии со скоростью, близкой к скорости света в окружающей среде. Приведенным характеристикам соответствуют значения волновых чисел $\alpha = \gamma + i\delta$, у которых $\delta > 0$. Таким образом, волна имеет нарастающее по радиальной координате поле: в области, где $\beta_1/k_0 < 1$, это вытекающая волна; в области, где $\beta_1/k_0 > 1$, имеем медленную несобственную волну. При большей концентрации электронов плазмы частотное разделение волн по характеру дисперсии более явно выражено: на высоких частотах волна быстрая с сильной дисперсией, на низких — медленная (рис. 3, *b*).

Численные исследования показали, что при индексе $n = 1$ решения дисперсионного уравнения, приведенные на рис. 3, *b*, являются единственными, т. е. при $n = 1$ имеем одну волну, при индексе $n = 2$ число дисперсионных характеристик удваивается (рис. 3, *c*), при $n = 3$ — утраивается и т. д. В этом принципиальная особенность спектра волн рассматриваемой направляющей структуры: он образуется счетным множеством волн, число которых определяется индексом n. При этом все несимметричные волны являются несобственными комплексными волнами [2–4], либо вытекающими, либо медленными несобственными. Их комплексность объясняется излучением поля в окружающую среду.

Таким образом, показана ограниченность спектра волн цилиндрического проводника в изотропной плазме. Такая направляющая структура может работать как протяженная линия передачи только на волне типа Ценнека — волна E_{01}. На остальных волнах структура является сильно излучающей. Рассмотренная задача представляет интерес при исследовании электромагнитных полей, излучаемых летательными аппаратами, вокруг которых при их движении образуется плазменное пространство. Главной особенностью рассмотренной направляющей структуры, обнаруженной на основе решенной краевой задачи, является существование связи индексов волн: число решений дисперсионного уравнения m зависит от азимутального индекса n. В этом смысл выдвигаемого положения об ограниченности спектра волн структуры — проводящий цилиндр в изотропной плазме.

Работа выполнена в рамках исполнения проектной части государственных заданий в сфере научной деятельности (задание № 3.1709.2014/К).

Список литературы

[1] *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969. 526 с.

[2] *Веселов Г.И., Раевский С.Б.* Слоистые металло-диэлектрические волноводы. М.: Радио и связь, 1988. 248 с.

[3] *Раевский А.С., Раевский С.Б.* Неоднородные направляющие структуры, описываемые несамосопряженными операторами. М.: Радиотехника, 2004. 110 с.

[4] *Раевский А.С., Раевский С.Б.* Комплексные волны. М.: Радиотехника, 2010. 223 с.
[5] *Альперт Я.Л.* Распространение электромагнитных волн в ионосфере. 2-е изд. М.: Наука, 1972. 564 с.
[6] *Краснушкин П.Е., Яблочкин Н.А.* Теория распространения сверхдлинных волн. 2-е изд. М.: ВЦ АН СССР, 1963. 93 с.
[7] *Фелсен Л., Маркувиц Н.* Излучение и рассеяние волн. М.: Мир, 1978. Т. 1. 547 с. Т. 2. 555 с.
[8] *Силин В.П., Рухадзе А.А.* Электромагнитные свойства плазмы и плазменноподобных сред. М.: Атомиздат, 1961. 244 с.
[9] *Кузелев М.В., Рухадзе А.А.* Методы теории волн в средах с дисперсией. М.: Физматлит, 2007. 272 с.
[10] *Кукушкин А.В., Рухадзе А.А., Рухадзе К.З.* // УФН. 2012. Т. 182. № 11. С. 1205–1215.
[11] *Вайнштейн Л.А.* Электромагнитные волны. М.: Радио и связь, 2010. 480 с.