

02

Параметрическое преобразование частоты в сверхпроводящей волноводной линии с встроенным джозефсоновским осциллятором

© М.В. Денисенко, В.О. Муняев, А.М. Сатанин[†]

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского,
Нижний Новгород, Россия

[†] E-mail: sarkady@mail.ru

Обсуждается эффект параметрического деления частоты в копланарной линии с встроенным одноконтактным высокочастотным сквидом — джозефсоновским осциллятором. Предполагается, что возбуждение осциллятора осуществляется импульсами накачки, несущая частота которых может быть кратна плазменной частоте осциллятора. Показано, что джозефсоновский осциллятор, возбуждаемый на частоте накачки, может осуществить деление частоты, излучая субгармоники, кратные основной (дробные резонансы). Определены параметры, при которых реализуется параметрическое преобразование частоты. Обсуждается возможное обобщение рассмотренного эффекта на квантовый случай, когда возможна генерация скоррелированных микроволновых фотонов (перепутанных состояний фотонов).

Работа поддержана проектами РФФИ № 16-57-51045 НИФ а и 16-07-01012 а и стипендией Президента РФ для молодых ученых и аспирантов, осуществляющих перспективные научные исследования и разработки по приоритетным направлениям модернизации российской экономики в 2016–2018 г.

1. Введение

Современная технология позволяет изготавливать сверхпроводниковые петли с встроенными слабыми связями (джозефсоновскими переходами), обладающими малой емкостью. В настоящее время разработана методика упаковки петель в двумерные или трехмерные структуры, сопряжение петель с волноводными линиями и инкорпорирование их в высокодобротные резонаторы [1–3]. При высоких температурах, когда характерные частоты джозефсоновских осцилляторов ω_J таковы, что $\hbar\omega_J \ll kT$, динамика переходов описывается в рамках классической механики. В то же время при низких температурах ($kT \ll \hbar\omega_J$) осцилляторы ведут себя как квантовые объекты (искусственные атомы) с дискретным спектром. Интерес к квантовой электродинамике джозефсоновских цепей [4–8] обусловлен их возможным применением для селективного возбуждения уровней (фоковских состояний) [9]. Кроме того, благодаря неэквидистантному спектру на их основе удалось реализовать как отдельные кубиты, так и многокубитные регистры. Джозефсоновские осцилляторы, работающие в классическом режиме, также могут выступать в качестве высокоточных измерительных устройств, реализующих неразрушающие измерения кубитов. Важную роль для современных информационных технологий представляют источники перепутанных состояния. В оптическом диапазоне частот для генерации скоррелированных двухфотонных состояний используются нелинейные среды, в которых реализуются эффекты параметрического деления частоты [10,11].

В настоящей работе рассмотрены процессы параметрического деления частоты в копланарной линии с встроенным одноконтактным высокочастотным сквидом. Поскольку размер сверхпроводящей петли с контактом (несколько микрометров) много меньше длины электромагнитной волны (в СВЧ-диапазоне) в линии, встроен-

ный осциллятор можно рассматривать как сосредоточенный элемент. Если на переход посылается импульс когерентного (классического поля), то задача об описании перехода сведена к изучению динамики обобщенного нелинейного осциллятора во внешнем поле. При этом в режиме относительно слабой нелинейности может реализоваться дробный (1:2) резонанс, сопровождаемый параметрическим преобразованием частоты. Сценарий перекрытия резонансов и явление хаотического движения в данной работе не рассматриваются. Исследование захват в резонанс при наличии диссипации. Предварительные расчеты показывают, что обобщение рассматриваемого эффекта на квантовый случай позволит осуществить в генерацию скоррелированных фотонов [12].

2. Модель системы и основные уравнения

Нас будет интересовать идеальный копланарный волновод, представляющий собой сверхпроводящую полосу, отделенную вакуумным промежутком от полубесконечных сверхпроводящих пластин (см. рисунок, *a*). Один из вариантов конструкции копланарной линии, в которую вставлено сверхпроводящее кольцо с джозефсоновским контактом, представлен на рисунке, *a*.

Прежде всего, сформулируем основные уравнения для описания тока и напряжения в волноводной линии, изображенной на рисунке, *b*. Законы Кирхгофа для ячейки, примыкающей к сверхпроводящему кольцу, приводят к уравнениям

$$V_{n+1} = V_n - L_l \Delta x \frac{\partial I_n}{\partial t} - M \frac{\partial I_S}{\partial t}, \quad (1)$$

$$I_{n+1} = I_n - C_l \Delta x \frac{\partial V_n}{\partial t}, \quad (2)$$

C_l — погонная емкость, L_l — погонная индуктивность волноводной линии, M — коэффициент взаимоиנדукции,

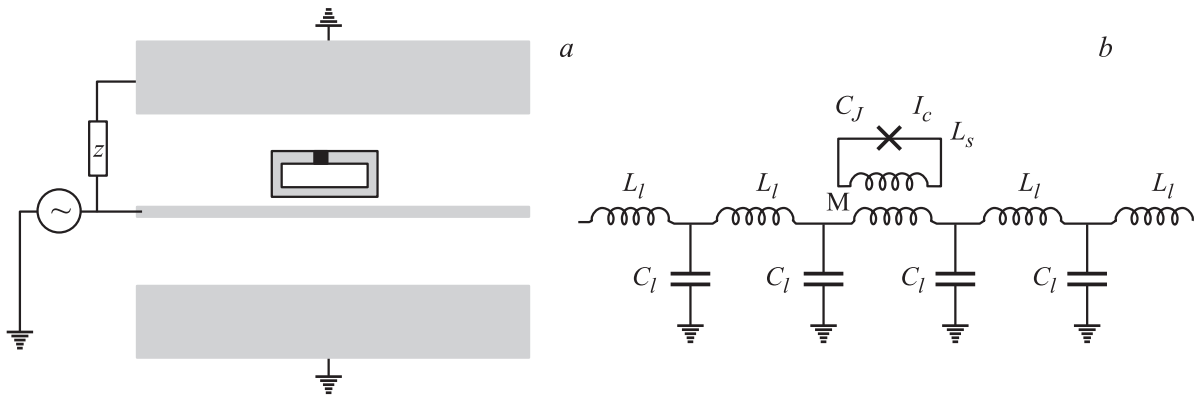


Схема копланарного волновода (а). Центральная сверхпроводниковая жила планарного волновода индуктивно связана со сверхпроводящим кольцом микронных размеров, в которое встроены джозефсоновский контакт. Эквивалентная схема волноводной линии (б). Предполагается, что контур петли пронизывает поток постоянного управляющего магнитного поля.

I_s — ток в кольце. Предполагается, что ток в петле определен выражением:

$$I_s = -\frac{\hbar}{2e} \frac{1}{L_s} (\varphi - \varphi_{\text{ext}}),$$

где L_s — индуктивность петли; $\varphi_{\text{ext}} = 2\pi\Phi_{\text{ext}}/\Phi_0$, Φ_{ext} — поток внешнего поля через контур петли (который далее считается независимым от времени: $\frac{\partial\varphi_{\text{ext}}}{\partial t} = 0$), $\Phi_0 = h/2e$ — квант потока. Для остальных ячеек последнее слагаемое (пропорциональное коэффициенту взаимной индукции M) в правой части (1) необходимо опустить.

Поскольку длина волны СВЧ-поля намного больше размера петли, можно перейти к пределу $\Delta x \rightarrow 0$

$$\frac{\partial V(x, t)}{\partial x} = -L_l \frac{\partial I(x, t)}{\partial t} - M \frac{\partial I_s(t)}{\partial t} \delta(x), \quad (3)$$

$$\frac{\partial I(x, t)}{\partial x} = -C_l \frac{\partial V(x, t)}{\partial t}. \quad (4)$$

Как видно из (2), влияние петли эквивалентно локальному скачку потенциала.

Введем заряд, распределенный по волноводной линии начиная от точки с координатой x до ∞ : $Q(x, t)$. Ток и потенциал будут равны, соответственно:

$$I(x, t) = \frac{\partial Q(x, t)}{\partial t}, \quad V(x, t) = \frac{\partial Q(x, t)}{C_l \partial x}. \quad (5)$$

Уравнения (3) и (4) сводятся к выражению

$$\frac{\partial^2 Q(x, t)}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 Q(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\hbar}{2e} \frac{M}{L_l L_s} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \delta(x), \quad (6)$$

где $v = 1/\sqrt{L_l C_l}$; считается выполненным неравенство $M \ll L_s$ (квадратичные по M слагаемые далее не учитываются).

Для простейшей конструкции перехода (с одиночным джозефсоновским контактом в петле) фаза на переходе

подчиняется уравнению

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \gamma_m \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \omega_J^2 \frac{\partial u(\varphi)}{\partial \varphi} = -\frac{M \omega_J^2}{L_s I_c} \frac{\partial Q(0, t)}{\partial t}, \quad (7)$$

где $\omega_J^2 = \frac{2e}{\hbar} \frac{I_c}{C_J}$, I_c и C_J соответственно, критический ток и емкость джозефсоновского перехода. Диссипация учитывается в рамках резистивной модели МакКамбера [13]: $\gamma_m = 1/RC_J$, R — сопротивление перехода. Мы ввели безразмерную потенциальную энергию петли с переходом

$$u(\varphi) = 1 - \cos \varphi + \frac{(\varphi - \varphi_{\text{ext}})^2}{2\beta}, \quad (8)$$

и безразмерный параметр $\beta = \frac{2e}{\hbar} L_s I_c$ (так называемый параметр одноконтантного интерферометра), определяющий форму потенциала при изменении магнитного потока φ_{ext} .

Таким образом, связанные уравнения (5) и (6) полностью определяют распределение заряда и фазы в системе: копланарном волноводе с одноконтантным высокочастотным сквидом. Отметим, что вывод уравнений (3), (4) и (6) во многом подобен проделанному в работе [8]. При этом вместо сквида в [8] рассматривался контур с тремя переходами Джозефсона, работающий в квантовом режиме, и у которого принималось во внимание только два нижних состояния, т. е. рассматривался кубит.

Рассмотрим случай, когда модулированный импульс тока создается на левом конце линии $I_{\text{ext}}(t - x/v)$. Взаимодействие импульса с петлей приводит к возбуждению осциллятора и переизлучению поля. Удобно рассмотреть отразившийся импульс, который будет приводить к выделению энергии на левом конце волновода, характеризуемое отношением усредненных по периоду мощностей на нагрузочном сопротивлении

$$\mathcal{R} = \langle I_{\mathcal{R}}^2(t) \rangle / \langle I_{\text{ext}}^2(t) \rangle. \quad (9)$$

3. Теория параметрического резонанса

Начнем анализ с уравнения (6). Решение (6) ищется в виде

$$Q(x, t) = Q_{\text{ext}}(t - x/v) + \frac{\hbar}{2ev^2} \frac{M}{L_l L_s} \int_{-\infty}^{\infty} dt' G(x, t - t') \frac{\partial \varphi(t')}{\partial t'}, \quad (10)$$

где введена функция Грина $G(x - x', t - t')$, подчиняющаяся уравнению

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) G(x - x', t - t') = \delta(x - x') \delta(t - t'). \quad (11)$$

Функция Грина легко находится решением (11)

$$G(x - x', t - t') = -\frac{v}{2} \theta \left(t - t' - \frac{|x - x'|}{v} \right). \quad (12)$$

Исходя из (10) и (12), нетрудно записать

$$Q(x, t) = Q_{\text{ext}}(t - x/v) + \frac{\hbar}{2ev} \frac{M}{L_l L_s} \varphi(t - |x|/v), \quad (13)$$

где $Q_{\text{ext}}(t - x/v)$ — решение однородного уравнения (9), которое мы связываем с полем, возбуждаемым внешним источником на левом конце волновода.

Дифференцируя (13), можно найти ток, который далее подставим в (7). В результате получится замкнутое уравнение для фазы

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \gamma \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \omega_J^2 \frac{\partial u(\varphi)}{\partial \varphi} = -\frac{M \omega_J^2}{L_s} \frac{I_{\text{ext}}(0, t)}{I_c}, \quad (14)$$

где

$$\gamma = \gamma_m + \left(\frac{\hbar}{2e} \right) \frac{M^2 \omega_J^2}{L_s^2 I_c L_l} \approx \gamma_m.$$

Дополнительный вклад в затухание обусловлен известным свойством бесконечного волновода поглощать закачиваемую в него энергию. Коль скоро решение (14) найдено, отраженный ток при $x \rightarrow -\infty$ определится выражением

$$I_{\text{ref}}(x, t) = \frac{\hbar}{2ev} \frac{M}{L_l L_s} \frac{\partial \varphi(t + x/v)}{\partial t}. \quad (15)$$

Ниже мы будем интересоваться только процессами деления частоты. Пусть заданный внешний импульс тока (временной масштаб огибающей намного больше периода поля), „поступивший“ на сквид, имеет вид $I_{\text{ext}}(0, t) = I_m \cos(2\omega t)$. Этот импульс будет возбуждать колебание нелинейного осциллятора согласно (14). Будем интересоваться условиями, когда возможен процесс деления частоты, т. е. под действием импульса накачки с частотой 2ω будут возбуждаться устойчивые колебания

с частотой ω , причем $\omega \sim \omega_J$, которые будут зависеть от характера нелинейности, т. е. от вида функции $u(\varphi)$, определяемой выражением (8). Предположим, что параметры системы таковы, что $\beta > 1$. Разложим (8) вблизи точки минимума

$$u(\varphi^* + \phi) = u(\varphi^*) + \left(\cos \varphi^* + \frac{1}{\beta} \right) \times \frac{\phi^2}{2!} - \sin \varphi^* \frac{\phi^3}{3!} - \cos \varphi^* \frac{\phi^4}{4!} + \dots, \quad (16)$$

где φ^* есть решение уравнения

$$\sin \varphi^* + \frac{1}{\beta} (\varphi^* - \varphi_{\text{ext}}) = 0.$$

Следовательно, уравнение (14) можно переписать как

$$\ddot{\phi} + \gamma \dot{\phi} + \omega_J^2 a \phi + b \phi^2 + c \phi^3 = f \cos(2\omega t), \quad (17)$$

где

$$a = \cos \varphi^* + \frac{1}{\beta}, \quad b = -\frac{\omega_J^2 \sin \varphi^*}{2}, \\ c = -\frac{\omega_J^2 \cos \varphi^*}{6}, \quad f = -\frac{\hbar}{2e} \frac{M \omega_J^2}{L_s} \frac{I_m}{I_c}.$$

Чтобы иметь представления о характерной величине коэффициентов уравнения (17), рассмотрим случай $\beta \gg 1$. Тогда $\varphi^* \approx \frac{\varphi_{\text{ext}}}{\beta}$, $a \approx 1$, $b = -\frac{\omega_J^2 \varphi_{\text{ext}}}{2\beta}$, $c \approx -\frac{\omega_J^2}{6}$. Для простого джозефсоновского контакта $c = -|c|$.

Для выделения гармоник введем вспомогательную переменную $\psi(t)$, колеблющуюся на характерной частоте ω ($\omega \approx \omega_J$) и сделаем сдвиг переменных: $\phi = \phi_0 + \psi$, где функции подчиняются уравнениям:

$$\ddot{\phi}_0 + \gamma \dot{\phi}_0 + \omega_J^2 a \phi_0 = f \cos(2\omega t) \quad (18)$$

и

$$\ddot{\psi} + \gamma \dot{\psi} + \omega_J^2 a \psi + b(\phi_0 + \psi)^2 + c(\phi_0 + \psi)^3 = 0. \quad (19)$$

Решение (18) запишется в виде

$$\phi_0(t) = A \cos(2\omega t) + B \sin(2\omega t), \quad (20)$$

где

$$A = \frac{D}{D^2 + (2\omega\gamma)^2} f, \quad B = \frac{2\omega\gamma}{D^2 + (2\omega\gamma)^2} f,$$

$$D = \omega_J^2 a - (2\omega)^2.$$

Уравнение (19) решается методом Боголюбова–Митропольского [14]. Вводя медленные переменные q и p соотношениями

$$\begin{cases} \psi = q \cos \omega t + p \sin \omega t \\ \dot{\psi} = \omega(-q \sin \omega t + p \cos \omega t), \end{cases} \quad (21)$$

из (19) можно получить уравнения для медленных амплитуд

$$\begin{cases} \dot{q} = -\bar{\omega}_J \delta p - \frac{\gamma}{2} q + \frac{b}{2}(-Ap + Bq) \\ \quad + \frac{3bc}{8\bar{\omega}_J} (p^2 + q^2 + 2A^2 + 2B^2), \\ \dot{p} = \bar{\omega}_J \delta q - \frac{\gamma}{2} p + \frac{b}{2}(Ap + Bq) \\ \quad + \frac{3bc}{8\bar{\omega}_J} (p^2 + q^2 + 2A^2 + 2B^2), \end{cases} \quad (22)$$

где $\bar{\omega}_J = \omega_J \sqrt{a}$, $\delta = (\omega^2 / \bar{\omega}_J^2) - 1$. Стационарное решение ($\dot{q} = 0$, $\dot{p} = 0$) существует при выполнении неравенств

$$\left(\frac{b}{2\bar{\omega}_J}\right)^2 \frac{f^2}{D^2 + (2\omega\gamma)^2} > \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 \quad \text{и} \quad K > \bar{\omega}_J \delta, \quad \delta > 0,$$

где

$$K = \sqrt{\left(\frac{b}{2\bar{\omega}_J}\right)^2 \frac{f^2}{D^2 + (2\omega\gamma)^2} - \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2}. \quad (23)$$

Из уравнений (22) находим соотношение

$$p^2 + q^2 = \frac{8\omega_J}{3|c|} (K - \bar{\omega}_J \delta) - \frac{f^2}{D^2 + (2\omega\gamma)^2} > 0. \quad (24)$$

Поскольку среднее по периоду $\langle \dot{\psi}^2(t) \rangle = \omega^2(q^2 + p^2)$, то из (24) видно, что существует стационарное колебание с частотой $\omega \approx \bar{\omega}_J$. Как следует из полученных соотношений, квадратичное слагаемое в выражении (17) имеет решающее значение для процесса деления частоты.

Будем считать, что принимаемый сигнал пропускается через фильтр с частотой, близкой к $\bar{\omega}_J$. Тогда колебание на частоте 2ω , определяемое функцией ϕ_0 , несущественны и мы получаем согласно (9) выражение для коэффициента отражения при параметрическом преобразовании частоты

$$\mathcal{R}(\omega) = \mathcal{R}_0 \left(\frac{8\omega_J}{3|c|} (K - \bar{\omega}_J \delta) - \frac{f^2}{D^2 + (2\omega\gamma)^2} \right), \quad (25)$$

где $\mathcal{R}_0 = \left(\frac{\hbar}{2ev} \frac{M\bar{\omega}_J}{L_l L_s I_m} \right)^2 a$ характеризует нерезонансный вклад. Выражение (25) составляет основной результат данной работы.

4. Заключение

Таким образом, рассмотренная копланарная линия с встроенным сверхпроводящим кольцом с джозефсоновским контактом может выполнять деление частоты. Если на переход посылается импульс когерентного (классического поля), то задача об описании перехода может быть сведена к изучению нелинейной динамики осциллятора во внешнем переменном поле. При этом в режиме относительно слабой нелинейности при определенных

параметрах системы, установленных в данной работе, может реализоваться дробный (1:2) резонанс. Нетрудно показать, что квадратичное слагаемое играет существенную роль при параметрическом преобразовании частоты $2\omega \rightarrow \omega$. Рассмотренная система может работать и в квантовом режиме, когда на переход подается поле, приготовленное в фоковском состоянии, включая однофотонный случай, а джозефсоновский осциллятор слабо возбужден, когда число заселенных уровней невелико. В этом случае предложенная схема волноводной линии с встроенным переходом может осуществлять генерацию скоррелированных фотонов (перепутанных состояний фотонов).

Авторы благодарны Я.С. Гринбергу за полезные замечания.

Список литературы

- [1] A.M. Zagoskin. Quantum Engineering — Theory Design of Quantum Coherent Structures, Cambridge University Press, Cambridge (2011).
- [2] M.H. Devoret, R.J. Schoelkopf. Science **339**, 1163 (2013).
- [3] P. Jung, A.V. Ustinov, S.M. Supercond. Sci. Technol. **27**, 073001 (2014).
- [4] A. Blais, R.-S. Huang, A. Wallraff, S.M. Girvin, R.J. Schoelkopf. Phys. Rev. A **69**, 062320 (2004).
- [5] A. Wallraff, D.I. Schuster, A. Blais, L. Frunzio, R.-S. Huang, J. Majer, S. Kumer, S.M. Girvin, R.J. Schoelkopf. Nature **431**, 162 (2004).
- [6] O. Astafiev, A.M. Zagoskin, A.A. Abdumalikov, Jr., Y.A. Pashkin, T. Yamamoto, K. Inomata, Y. Nakamura, J.S. Tsai. Science **327**, 840 (2010).
- [7] I.-C. Hoi, C.M. Wilson, G. Johansson, T. Palomaki, B. Peropadre, P. Delsing. Phys. Rev. Lett. **107**, 073601 (2011).
- [8] A.N. Omelyanchouk, S.N. Shevchenko, Ya.S. Greenberg, O. Astafiev, E. Il'ichev. Low. Temp. Phys. **36**, 893 (2010).
- [9] A. Wallraff, D.I. Schuster, A. Blais, L. Frunzio, R.-S. Huang, J. Majer, S. Kumar, S.M. Girvin, R.J. Schoelkopf. Nature (London). **431**, 162 (2004).
- [10] P. Kok, W.J. Munro, K. Nemoto, T.C. Ralph, J.P. Dowling, G.J. Milburn. Rev. Mod. Phys. **79**, 135 (2007).
- [11] K. Edamatsu. Japan. J. Appl. Phys. **46**, 7175 (2007).
- [12] M.V. Denisenko, V.O. Munyaev, A.M. Sataniin. J. Phys. Conf. Ser. **681**, 012018 (2016).
- [13] М. Тинкхам. Введение в сверхпроводимость. Атомиздат, М. (1980).
- [14] Н.Н. Боголюбов, Ю.А. Митропольский. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Физматлит, М. (1963). 407 с.