

01  
**Взаимодействие неустойчивости Эйлера, Гельмгольца, Рэлея**

© М.А. Ильгамов

Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН,  
101830 Москва, Россия  
Институт механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского научного центра РАН,  
450054 Уфа, Россия  
e-mail: ilgamov@anrb.ru

(Поступило в Редакцию 23 декабря 2016 г. В окончательной редакции 15 июля 2017 г.)

Статический изгиб тонкой упругой пластины, разделяющей две жидкости с разными плотностями и скоростями движения, рассмотрен в предположении несжимаемости жидкостей и срединной поверхности пластины. В этой простейшей модели длины волн считаются малыми по сравнению с протяженностью пластины и областями, занятыми жидкостями. Изучено статическое взаимодействие неустойчивостей Эйлера, Гельмгольца и Рэлея в зависимости от сжимающей пластину силы, скоростей движения жидкостей, а также ускорения, направленного перпендикулярно к контактной границе. Найдены области изменения этих параметров, когда происходят стабилизация и дестабилизация плоской формы пластины и контактных поверхностей.

DOI: 10.21883/JTF.2018.02.45401.2144

## Введение

В гидроупругих системах может иметь место одновременное проявление упругих и гидродинамических неустойчивостей и их взаимодействие. Вопросам статического и динамического поведения продольно сжатого упругого элемента, контактной границы жидкостей с разными плотностями и скоростями движения посвящены многочисленные исследования. Укажем лишь на первоисточники [1–4] и на некоторые монографические и обзорные работы [5–8].

Теория статической неустойчивости тонкостенных оболочек и пластин получила сильное развитие в связи с созданием объектов надводного и подводного флота, нефтехимии, аэрокосмической техники, а неустойчивости контактной границы жидкостей — для объяснения некоторых природных явлений и описания процессов в технических системах, в частности, поведения мишеней под действием детонационной волны ВВ и лазерного обжатия [7]. В динамической постановке они носят названия неустойчивостей Гельмгольца — Кельвина и Рэлея—Тейлора [8].

В настоящей работе статическое взаимное влияние указанных неустойчивостей называется взаимодействием неустойчивостей Эйлера, Гельмгольца и Рэлея. Малость инерционных сил обуславливается относительно медленным изменением возмущений контактной границы при медленном изменении внешних воздействий (сил сжатия пластины, гидростатических сил, скоростного напора). Например, в эксперименте [9] жидкостью в нижней полости служила вода, а в верхней полости вода с изменяющейся концентрацией солей и других более тяжелых веществ. В результате происходило медленное изменение разности плотностей, что обеспечивало статический режим волнообразования границы. Очевидно,

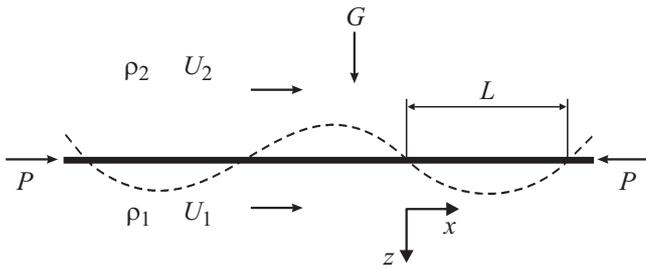
такой режим имеет место только в начальной стадии развития возмущений.

Взаимодействие гидродинамических неустойчивостей с учетом капиллярных сил впервые было рассмотрено в [3]. В дальнейшем были учтены сжимаемость и вязкость жидкостей, вихреобразование и другие нелинейные эффекты [8]. Внешние воздействия могут быть как независимыми друг от друга, так и связанными. В [10] было указано на необходимость учета течения жидкостей вдоль контактной границы, обусловленного волнообразованием при неустойчивости. Перепад давления на пластину нулевой кривизны обуславливает появление продольных сил в ней.

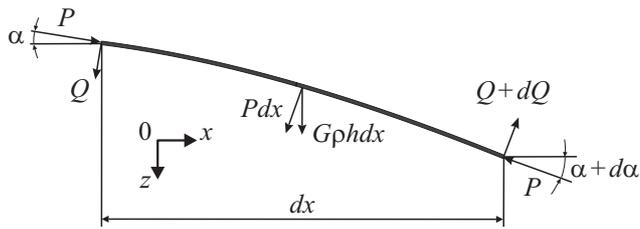
К взаимодействию неустойчивостей Эйлера и Гельмгольца близко примыкает явление дивергенции пластины в потоке жидкости и газа, а также к динамической неустойчивости — явление флаттера [11–13]. При этом динамическое взаимодействие изгиба пластины и газовых течений рассматривается при дозвуковых и сверхзвуковых скоростях во многих случаях с учетом нелинейностей. Это направление получило сильное развитие с ростом скоростей движения аппаратов с тонкостенными элементами конструкции. Взаимодействие неустойчивостей Эйлера и Рэлея рассмотрено в [14], где приводится также соответствующая литература.

## Постановка задачи

Тонкая упругая пластина закреплена на опорах, расположенных равномерно на расстояниях  $L$  друг от друга, причем опоры не препятствуют свободному повороту срединной поверхности пластины при ее изгибе и течению жидкостей с плотностями  $\rho_1$ ,  $\rho_2$  и скоростями  $U_1$ ,  $U_2$  вдоль ее поверхностей (рис. 1). На опорах прогиб и изгибающий момент равны нулю. Ускорение  $G$



**Рис. 1.** Пластина на равномерно удаленных опорах разделяет жидкости с разными плотностями и скоростями движения.



**Рис. 2.** Схема действия сил на тонкую упругую пластину при ее изгибе по оси \$x\$.

направлено перпендикулярно к контактной границе. Используются допущения о несжимаемости срединной поверхности пластины, идеальности и несжимаемости жидкостей и об их безотрывном обтекании при волнообразовании контактной границы. Пластина подвержена продольному сжатию силой \$P\$. Если рассматривать поведение контактной границы в области нескольких пролетов (например, \$-L < x < L\$), то способ приложения силы к пластине и создания течения жидкостей вдали от этой области можно не конкретизировать.

Сила \$P\$, ускорение \$G\$ и скорости \$U\_1, U\_2\$ изменяются независимо друг от друга. Интенсивность их возрастания от нуля будем считать такой, чтобы инерционные силы в системе были малы. Поведение системы рассматривается в постановке плоской задачи.

При \$P = 0, G = 0, U\_1 = U\_2 = 0\$ пластина имеет малое отклонение от плоскости в виде

$$w_0 = W_{0n} \sin n\beta x, \quad \beta = \pi/L, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1)$$

При этом напряжения в ней отсутствуют, например, в результате отжига пластины. Сумма проекций на ось \$z\$ всех сил, действующих на элемент длиной \$dx\$, равна (рис. 2)

$$Q \cos \alpha - (Q + dQ) \cos(\alpha + d\alpha) + P \sin \alpha - P \sin(\alpha + d\alpha) + Gphdx + p \cos \alpha dx = 0,$$

где \$Q\$ — перерезывающая сила; \$p\$ — перепад давлений жидкостей, действующих на поверхности пластины; \$\rho\$; \$h\$ — плотность и толщина пластины. Принимая в линейной задаче \$\cos \alpha = 1, \sin(\alpha + d\alpha) = \alpha + d\alpha\$ и учитывая

\$\alpha = d(w\_0 + w)dx, d\alpha = (d^2(w\_0 + w)/dx^2)dx\$, получаем

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + P \frac{d^2(w_0 + w)}{\partial x^2} - Gph - p = 0.$$

Из уравнения моментов в том же приближении следует \$Qdx + dM = 0\$, где в выражение изгибающего момента \$M = Dd^2w/dx^2\$ не входит \$w\_0\$ ввиду указанного выше предположения об отсутствии напряжений до начала внешних воздействий. Линейное уравнение изгиба пластины единичной ширины относительно текущего прогиба \$w(x)\$ приобретает вид

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + P \frac{\partial^2(w_0 + w)}{\partial x^2} = Gph + p, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}, \quad (2)$$

где \$E, \nu\$ — модуль упругости, коэффициент Пуассона.

Перепад давлений жидкостей равен [14]

$$p = G(\rho_2 - \rho_1)(w_0 + w) + S \frac{\partial^2(w_0 + w)}{\partial x^2} - Gph + p_h,$$

$$S = h \left( p_0 + G\rho_2 H + \frac{1}{2} Gph \right),$$

$$p_h = \rho_1 U_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - \rho_2 U_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}. \quad (3)$$

Здесь \$p\_0\$ — давление в жидкости на высоте \$H\$ от пластины. Величина \$p\_h\$ равна разности скоростных напоров жидкостей на поверхности пластины. Отметим, вывод уравнений (2) и (3) основан на гипотезах Кирхгоффа для тонких пластин, в соответствии с которыми нормаль к срединной поверхности остается нормалью к ней при изгибе и толщина \$h\$ не меняется.

Входящие в (3) потенциалы скоростей \$\varphi\_i\$ определяются из уравнения

$$\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial z^2} = 0 \quad (i = 1, 2) \quad (4)$$

и условий затухания решений при удалении от плоскости \$z = 0\$ и

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial z} = U_i \frac{\partial(w_0 + w)}{\partial x} \quad (z = 0). \quad (5)$$

### Отклонение контактных границ и пластины

Примем частное решение уравнений (2)–(5) в виде

$$w = W_n \sin n\beta x, \quad \varphi_i = \Phi_n^i(z) \cos n\beta x \quad (i = 1, 2). \quad (6)$$

Следующая из (4) функция \$\Phi\_n^i = B\_n^i \exp[(-1)^i n\beta z]\$ удовлетворяет указанным условиям затухания. Условие (5) дает \$B\_n^i = (-1)^i U\_i (W\_{0n} + W\_n)\$. Поэтому при \$z = 0\$ потенциал имеет вид \$\varphi\_i = (-1)^i U\_i (W\_{0n} + W\_n) \cos n\beta x\$ или \$\partial \varphi\_i / \partial x = (-1)^{i+1} n\beta U\_i (w\_0 + w)\$. При этом

$$p_h = n\beta(\rho_1 U_1^2 + \rho_2 U_2^2)(w_0 + w). \quad (7)$$

Подставляя (1), (3), (6), (7) в уравнение (2), получаем отношение амплитуды текущего прогиба к амплитуде начального прогиба в виде

$$\frac{W_n}{W_{0n}} = \frac{R_n}{P_E(n^2\beta)^2 - R_n}, \quad P_E = D\beta^2 = \frac{\pi^2 E h^3}{12(1 - \nu^2)L^2},$$

$$R_n(P - S)(n\beta)^2 + G(\rho_2 - \rho_1) + (\rho_1 U_1^2 + \rho_2 U_2^2)(n\beta). \quad (8)$$

Здесь  $P_E$  — критическое значение статической продольной сжимающей силы на пластину ( $n = 1$ ). Из (8) видно, что прогиб тем больше, чем больше величины  $P$ ,  $G(\rho_2 - \rho_1)$ ,  $\rho_1 U_1^2$ ,  $\rho_2 U_2^2$ , и меньше  $P_E$ ,  $S$ . Роль скоростей  $U_1$ ,  $U_2$  такая же, что и роль  $G(\rho_2 - \rho_1)$ , когда это произведение является положительным. Относительная их доля может быть разной. Например, при  $\rho_1 \ll \rho_2$ ,  $U_1 = U_2$ ,  $L = 1$  м,  $G = 10$  м/с<sup>2</sup>,  $U_2 = 13$  м/с,  $n = 1$  член, содержащий скорости течения жидкостей в 40 раз больше, чем член, содержащий  $G$ . Очевиден противоположный пример, когда скорости  $U_1$ ,  $U_2$  малы или равны нулю.

Влияние обоих этих членов на прогиб  $W_n$  несколько уменьшается за счет члена  $S\beta^2 \approx (\pi^2 h/L^2)(p_0 + G\rho_2 H)$ , т.е. гидростатического давления верхней жидкости и относительной толщины пластины. Здесь и далее в составе  $S$  по (3) не учитывается последний член по сравнению с суммой первых членов. При

$$R_n = P_E(n^2\beta)^2 \quad (9)$$

прогиб в рассматриваемом линейном приближении растет неограниченно. Здесь  $R_n$  представляет собой критическую комбинацию внешних воздействий  $P$ ,  $S$ ,  $G$ ,  $U_1$ ,  $U_2$  для системы с заданными параметрами материалов и размерами  $E$ ,  $\nu$ ,  $\rho$ ,  $\rho_1$ ,  $\rho_2$ ,  $h$ ,  $L$ .

С возрастанием внешних воздействий рост прогиба (8) происходит наиболее быстро при  $n = 1$ . Указанная критическая комбинация внешних воздействий по (9) является минимальной также при  $n = 1$ . Однако число полуволн  $n$  между опорами сохраним произвольным, так как при некотором изменении постановки задачи могут быть реализованы случаи с другими числами. Пусть, например,  $U_1 = 0$ , область под пластиной разделена на отдельные полости под каждым пролетом длиной  $L$  с жесткими боковыми и нижними стенками. Тогда это условие замкнутости каждой полости  $\int_0^L w dx = 0$  и выражение (6) дают  $n = 2, 4, \dots$ . При этом в (8) и (9) наибольший рост прогиба и минимальное значение внешних воздействий имеет место при  $n = 2$ .

### Частные случаи

Ввиду большого количества входных параметров может быть выделено множество частных случаев, представляющих самостоятельное значение. Рассмотрим некоторые из них.

1. В отсутствие ускорения  $G$  и скоростей  $U_1$ ,  $U_2$  из (8) и (9) получаем критическое значение сжимающей пластину силы

$$P_{cr} = P_E n^2 + h p_0, \quad (10)$$

которое представляет собой обобщение классического критического значения в задаче Эйлера за счет учета величины  $S$ , которая в данном случае равна  $h p_0$ . В случае малых относительных значений толщины пластины  $h/L$  влияние  $S$  мало. В системе, показанной на рис. 1, неограниченное отклонение пластины от плоскости происходит при  $n = 1$  и  $P_{cr} = P_E$ . Однако если в данном частном случае ( $U_1 = U_2 = 0$ ) предположить, как выше, что области, занятые жидкостями, являются замкнутыми на длине пролета  $L$ , то реализуется потеря устойчивости с образованием двух полуволн ( $n = 2$ ). При этом  $P_{cr}$  в 4 раза больше, чем эйлерово значение  $P_E$ .

2. В случае однородной покоящейся жидкости ( $\rho_1 = \rho_2$ ,  $U_1 = U_2 = 0$ ) из (8) следует

$$\frac{W_0}{W_{n0}} = \frac{P - S}{P_E n^2 - P + S}. \quad (11)$$

Если пластина подвержена всестороннему давлению жидкости, в том числе по торцевым поверхностям пластины, то  $P = h(p_0 + G\rho_2 H) = S$ . Поэтому, согласно (11), имеет место абсолютная устойчивость начальной формы пластины (1) при любом значении давления окружающей однородной жидкости ( $W_n \equiv 0$ ). Если на торцевые поверхности пластины не оказывается давление жидкости ( $P = 0$ ), то из (11) следует значение амплитуд полного прогиба  $W_{0n} + W_n = W_{0n} P_E / (P_E + S n^{-2})$ . Таким образом, при увеличении гидростатического давления пластина выпрямляется, причем в наибольшей мере по гармонике  $n = 1$ . На этом эффекте основаны некоторые технологические операции в камерах с высоким давлением.

3. Если  $P = 0$ ,  $U_1 = U_2 = 0$ ,  $n = 1$ , то из (9) следует критическое значение ускорения  $(\rho_2 - \rho_1)G_{cr} = S\beta^2$ . Через входные параметры оно имеет вид

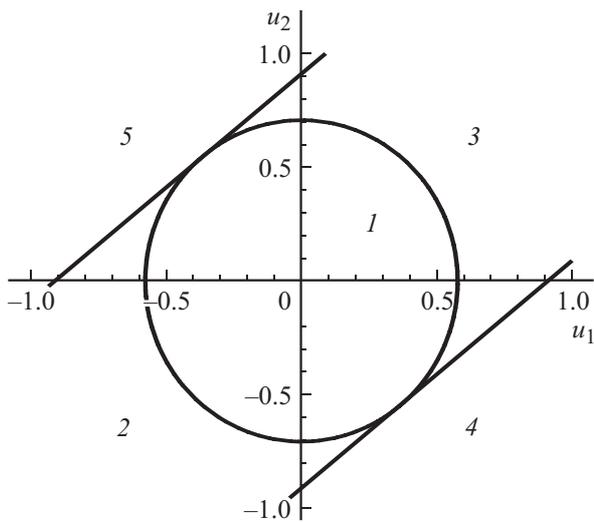
$$G_{cr} = \frac{2\beta^2 h p_0}{2\rho_2(1 - \beta^2 h H) - \beta^2 h^2 \rho - 2\rho_1}, \quad (12)$$

что представляет обобщение критерия неустойчивости Рэлея. Из (12) видно, что давление  $p_0$ , размеры  $h$ ,  $H$  играют стабилизирующую роль. Критическая разность плотностей равна  $(\rho_2 - \rho_1)_{cr} = S\beta^2/G$ . Для очень тонких пластин (малого отношения  $h/L$ ) приходим к известному критерию неустойчивости Рэлея ( $G(\rho_2 - \rho_1) > 0$ ).

4. При  $P = 0$ ,  $G = 0$  критическая комбинация ( $n = 1$ )

$$(\rho_1 U_1^2 + \rho_2 U_2^2)_{cr} = (P_E + S)\beta \quad (13)$$

также зависит от волнового числа  $\beta$ . Этот же случай реализуется при  $P = 0$ ,  $\rho_1 = \rho_2$  и любом значении  $G \neq 0$ .



**Рис. 3.** Области устойчивости на плоскости  $u_1 = U_1(\beta/G)^{1/2}$ ,  $u_2 = U_2(\beta/G)^{1/2}$ : 1 — по уравнению (15); 1–3 — по уравнению (16). Области неустойчивости: 2–5 — по уравнению (15); 4, 5 — по уравнению (16).

5. Если  $U_1 = U_2 = 0$ , то имеет место взаимодействие неустойчивостей Эйлера и Рэлея. Этот случай рассмотрен в [14]. Критическая комбинация внешних воздействий имеет вид

$$(P + G(n\beta)^{-2}(\rho_2 - \rho_1))_{cr} = P_E n^2 + S. \quad (14)$$

При  $G = 0$  или  $\rho_1 = \rho_2$  приходим к критерию (10).

6. В случае весьма малой толщины пластины по сравнению с длиной полуволны ( $nh/L \ll 1$ ) изгибная жесткость  $D$  (или величина  $P_E$ ), а также сила  $P$  могут быть опущены в (8), (9). Тогда имеем критерий общей статической неустойчивости Рэлея и Гельмгольца ( $n = 1$ )

$$G(\rho_2 - \rho_1) + \beta(\rho_1 U_1^2 + \rho_2 U_2^2) > \beta^2 S. \quad (15)$$

Даже при  $S = 0$  он значительно отличается от критерия общей динамической неустойчивости Рэлея и Гельмгольца–Кельвина [8]

$$G(\rho_2^2 - \rho_1^2) + \beta\rho_1\rho_2(U_1 - U_2)^2 > 0, \quad (16)$$

по которому, например, при  $U_1 = U_2$  или  $\rho_1 = 0, \rho_2 \neq 0$  исчезает зависимость от скоростей. По (15) такая зависимость сохраняется, причем независимо от взаимного направления скоростей  $U_1$  и  $U_2$ . При этом их влияние суммируется. При  $\rho_1 = 0, \rho_2 \neq 0$  по (15) имеем  $G + \beta U_2^2 > 0$ , а по (16)  $G > 0$ . В оба условия плотность не входит. По первому из них при изменении направления ускорения неустойчивость возможна, а по второму устойчиво граница устойчива. На рис. 3 показаны области устойчивости при  $G > 0, \rho_1 = 1.5 \cdot \rho_2$ .

Эти результаты показывают, что данный предельный случай, когда исключается из рассмотрения влияние

толщины пластины и изгибной жесткости, является некорректным. В этом случае необходимо учитывать инерционные силы в системе.

### Об упругой нелинейности

Как известно [7,8], линейная стадия гидродинамических неустойчивостей контактной границы двух жидкостей проходит очень быстро. Дальнейшее движение приводит к вихреобразованию и турбулентному перемешиванию прилегающих слоев жидкостей. Учет этих нелинейностей приводит к большим трудностям в анализе поведения рассматриваемой системы. Более простой и наступающей раньше других нелинейностей при увеличении возмущений границы является упругая нелинейность, а именно связь продольной деформации  $\epsilon$  и компонент перемещения  $u(x), w(x)$ . При наличии разделяющей пластины даже сколь угодно тонкой линейная стадия является более длительной и может реализоваться режим деформации границы с малыми инерционными силами.

Рассмотрим случай весьма тонкой пластины (пленки), когда  $nh\beta = \pi nh/L \ll 1$ . Пусть пленка на опорах закреплена неподвижно ( $u = 0, w = 0$  при  $|x| = 0, L, \dots$ ), при  $U_1 = U_2 = 0, G = 0$  имеет плоскую форму ( $w_0 = 0$ ) и не подвержена растяжению. При этом в уравнениях (2), (3) опускаем члены, содержащие  $D$  и  $S$ , а также вместо сжимающей силы  $P$  примем растягивающую силу  $P = Ehc$  или [5]

$$-P = Eh \left( \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left( \frac{dw}{dx} \right)^2 \right). \quad (17)$$

Сила  $P$  не зависит от  $x$ , поэтому интеграл от (17) в пределах от 0 до  $L$  при указанных условиях на опорах дает

$$P = -t \int_0^L \left( \frac{dw}{dx} \right)^2 dx, \quad t = \frac{Eh}{2L}. \quad (18)$$

Уравнения (2), (3), (17), (18) приводятся к виду ( $w_0 = 0, n = 1$ )

$$\left( t \int_0^L \left( \frac{dw}{dx} \right)^2 dx \right) \frac{d^2 w}{dx^2} + (G(\rho_2 - \rho_1) + \beta(\rho_1 U_1^2 + \rho_2 U_2^2)) w = 0. \quad (19)$$

Для частного решения  $w(x)$  в виде (6) при  $n = 1$  из уравнения (19) получаем конечное выражение для отклонения пленки от плоскости

$$w = \pm \frac{2}{\beta^2} \left( \frac{G(\rho_2 - \rho_1) + \beta(\rho_1 U_1^2 + \rho_2 U_2^2)}{Eh} \right)^{\frac{1}{2}} \sin \beta x. \quad (20)$$

Здесь знаки  $\pm$  указывают на равную возможность отклоняться вниз или вверх. Задача может быть рассмотрена

и для отдельного пролета длиной  $L$  с условием замкнутости полости с жидкостью. Тогда в (20) вместо  $\beta$  будет фигурировать  $2\beta$ . На длине пролета будут образовываться две полуволны, амплитуда которых будет меньше в 2 раза при  $\rho_1 = \rho_2$  и в 4 раза при  $U_1 = U_2 = 0$ . В эксперименте [9], упомянутом во Введении к статье, реализован именно такой случай. В направлении короткой стороны пленки образовывалась одна полуволна, а длинной стороны — две полуволны, причем такое состояние является устойчивым. Если принудительно отклонить пленку, то контактная граница, поколебавшись, занимает прежнее положение. При сильном отклонении граница может занять положение в противофазе, что означает реализацию отклонения с противоположным знаком в формуле (20).

## Заключение

Как известно [8], задача об устойчивости контактной границы по модели идеальной несжимаемой жидкости является некорректной (в смысле Адамара). Эта проблема обычно преодолевается учетом поверхностного натяжения и вязкости, что приводит в свою очередь к другим математическим трудностям. Хотя в настоящей постановке задачи также используется модель идеальной несжимаемой жидкости, наличие упругой пластины в системе частично устраняет указанные особенности классической задачи. Это относится к режиму, когда внешние воздействия, описываемые величиной  $R_n$  в (8), не превышают произведения критического значения сжимающей силы и квадрата волнового числа  $P_E(n^2\beta)^2$ . В противном случае решение (8) теряет смысл. Тогда поведение системы можно рассматривать только при учете нелинейных факторов. Таким примером является решение (20), которое получено для случая пленки ( $P_E = 0$ ).

Учет взаимодействия неустойчивостей пластины и жидкостей позволяет выявить важные свойства гидроупругой системы (в рамках принятой модели). Например, контакт пластины с жидкостью в замкнутой полости повышает критическое значение сжимающей силы в 4 раза, выявляется абсолютная устойчивость начальной формы пластины под всесторонним давлением однородной жидкости и т.д. В частных случаях получаются обобщения критериев Эйлера, Гельмгольца, Рэлея и их парных взаимодействий.

В целом изгибная жесткость пластины, растягивающие силы в ее плоскости, гидростатическое давление стабилизируют контактную границу, а сжимающие силы, движение жидкости с любыми скоростями вдоль пластины дестабилизируют ее. Под растягивающими силами понимаются приложенные внешние силы к краям пластины и возникающие как нелинейный эффект в результате ее изгиба.

Динамическое взаимодействие рассмотренных неустойчивостей представляет собой предмет отдельного исследования.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 17-41-020400\_ра).

## Список литературы

- [1] Эйлер Л. Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума либо минимума или решение изопериметрической задачи, взятой в самом широком смысле. М.—Л.: Гостехиздат, 1934. 600 с.
- [2] Helmholtz H. // Phil. Mag. 1868. Vol. 36. N 4. P. 337–346.
- [3] Kelvin W. // Phil. Mag. 1871. Vol. 42. N 4. P. 362–377.
- [4] Rayleigh J.W.S. // Proc. London Math. Soc. 1883. Vol. 14. P. 170–177.
- [5] Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967. 984 с.
- [6] Kull H.J. // Phys. Reports. 1991. Vol. 206. N 5. P. 197–324.
- [7] Лебо И.Г., Тишкин В.Ф. Исследование гидродинамической неустойчивости в задачах лазерного термоядерного синтеза методами математического моделирования. М.: Физматлит, 2006. 304 с.
- [8] Drazin H.G. Introduction to Hydrodynamic Stability. Cambridge Univ. Press, 2002. 288 p.
- [9] Ilgamov M.A. Static Problems of Hydroelasticity M.: Fizmatlit, 1998. 208 p.
- [10] Fermi E. The Collected Papers of Enrico Fermi. Chicago Univ. Press, 1965. Vol. 2. 821 p.
- [11] Вольмир А.С. Оболочки в потоке жидкости и газа. М.: Физматлит, 1976. 416 с.
- [12] Dowell E.H. Aeroelasticity of Plates and Shells. Leyden. NIP/ 1975. 139 p.
- [13] Dowell E.H., Ilgamov M. Studies in Nonlinear Aeroelasticity. NY—London—Tokyo: Springer-Verlag, 1988. 456 p.
- [14] Ильгамов М.А. // ПММ. 2016. Т. 80. Вып. 5. С. 566–579.