01

# Колебания и волны в нелинейной системе с $1/f$-спектром

© В.П. Коверда, В.Н. Скоков

Институт теплофизики УрО РАН,
620016 Екатеринбург, Россия
e-mail: koverda@itp.uran.ru

(Поступило в Редакцию 22 апреля 2017 г.)

Численными методами исследована пространственно-распределенная система двух нелинейных стохастических уравнений, моделирующая взаимодействующие фазовые переходы. Найдены условия формирования автоколебаний и волн. Показано формирование $1/f$- и $1/k$-спектров экстремальных флуктуаций на фоне образования и движения волн под воздействием белого шума. Распределение экстремальных флуктуаций соответствует максимуму энтропии, что свидетельствует об устойчивости $1/f$- и $1/k$-спектров. Показано, что на фоне образования и движения волн при внешнем периодическом возмущении возникает пространственно-временной стохастический резонанс, при котором наблюдается расширение границ области периодических пульсаций под влиянием белого шума.

DOI: 10.21883/0000000000

## Введение

Флуктуационные явления лежат в основе многих физических процессов. В термодинамически равновесных макроскопических системах с большим числом структурных элементов вероятность больших флуктуаций мала, и они, как правило, не оказывают существенного влияния на поведение системы. В то же время известно, что многие природные и техногенные процессы сопровождаются большими отклонениями от средних значений [1–4]. Такие макроскопические флуктуации могут возникать в сложных статистических системах, находящихся вдали от термодинамического равновесия, и проявляются как экстремальные пульсации параметров процесса. В работах [5–7] экстремальные пульсации были обнаружены в критических и переходных процессах тепломассопереноса, таких как кризис кипения, взрывное вскипание в жидких струях, ультразвуковая кавитация. Исследование причин возникновения и свойств макроскопических флуктуаций в неравновесных системах является весьма актуальной задачей.

Отличительной особенностью экстремальных флуктуаций является то, что функции распределения переменных обладают свойством масштабной инвариантности и имеют степенные „хвосты“. Релаксация таких флуктуаций также имеет степенной вид в отличие от экспоненциальной релаксации флуктуаций в равновесных системах. Другой отличительной чертой больших флуктуаций является поведение спектров мощности. Так, спектр мощности флуктуаций может быть обратно пропорциональным частоте ($1/f$-спектр). Энергия флуктуаций с $1/f$-спектром накапливается на низких частотах, поэтому в системе возможны крупномасштабные выбросы [6]. Описание случайных процессов с экстремально большими флуктуациями часто производят с использованием аналогий с турбулентными потоками жидкости [8], моделей самоорганизованной критичности [1,9], дробного интегрирования белого шума [10].

Ранее нами было показано, что случайные процессы с экстремальными флуктуациями могут возникать во взаимодействующих фазовых переходах под действием белого шума [11,12]. В этом случае при достижении интенсивностью шума критического значения в системе происходит индуцированный шумом переход, и спектр мощности флуктуаций принимает $1/f$-вид. Состоянию системы с $1/f$-спектром мощности флуктуаций соответствует максимум энтропии, что свидетельствует об устойчивости случайных процессов с таким спектром [13,14].

При внешней периодической нагрузке в системе возможен стохастический резонансный отклик, проявляющийся в увеличении чувствительности нелинейной системы к периодическому входному воздействию при наличии внешнего шума [15]. В этом случае амплитуда периодических пульсаций многократно возрастает при добавлении шумового сигнала. Стохастический резонанс показывает индуцированный белым шумом эффект увеличения порядка. В работах [16,17] было показано, что совместное действие шума и периодической силы на взаимодействующие фазовые переходы может приводить к стохастическому резонансному отклику. Стохастический резонанс усиливается с понижением частоты периодического воздействия. В области низких частот и достаточно высоких амплитуд внешнего периодического сигнала наблюдается анизотропный стохастический резонанс [18].

В настоящей работе рассматривается вариант пространственно распределенной системы нелинейных стохастических уравнений, моделирующей взаимодействующие фазовые переходы, в которой возможно спонтанное возникновение и распространения волн под воздействием белого шума, и на этом фоне формирование времен-

ных $1/f$- и пространственных $1/k$-спектров мощности экстремальных флуктуаций.

В разд. 1 вводится вариант пространственно-распределенной системы, в которой рассматриваются нелинейные эффекты, связанные с экстремальными флуктуациями, возможными в гидродинамике и теплофизике. В разд. 2 показаны условия зарождения и роста волн в системе. В разд. 3 анализируется устойчивость $1/f$- и $1/k$-спектров. В разд. 4 описаны свойства пространственно-временного стохастического резонанса.

## 1. Экстремальные флуктуации с $1/f$-спектром мощности при взаимодействующих фазовых переходах

При моделировании случайных процессов, описывающих взаимодействующие фазовые переходы с экстремальными флуктуациями, используется система нелинейных стохастических уравнений [11,12]:

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\varphi\psi^2 + \psi + \xi_1(t),$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\varphi^2\psi + 2\varphi + \xi_2(t), \qquad (1)$$

где $\varphi$ и $\psi$ — динамические переменные, $\xi_k$ — гауссовский белый шум с $\langle\xi_k(t)\rangle = 0$, $\langle\xi_k(t)\xi_l(t')\rangle = 2\sigma\delta_{k,l}\delta(t-t')$, $k, l = 1, 2$ и $\sigma$ — амплитуда шума.

Критичность системы (1) соответствует такому уровню белого шума, который соответствует индуцированному шумом переходу [19]. Случайный процесс $\varphi$, описываемый системой (1), имеет $1/f$-спектр мощности флуктуаций. Спектр мощности переменной $\psi$ обратно пропорционален квадрату частоты, т.е. имеет $1/f^2$-вид.

Важным является вопрос об устойчивости экстремальных низкочастотных флуктуаций. Критерием устойчивости может служить максимум статистической энтропии, определяемой по функции распределения стохастических переменных. Считается, что статистическая энтропия Гиббса–Шеннона не применима для случайных процессов с $1/f$-спектром из-за неинтегрируемости степенных „хвостов“ [20]. В [14] было показано, что второе уравнение системы (1) для переменной $\psi$ является управляющим. Функция распределения переменной $\psi$ спадает при возрастании аргумента так же, как и для гауссовского распределения. Поэтому эта функция распределения может быть использована для нахождения информационной энтропии Гиббса–Шеннона. Было показано, что информационная энтропия для переменной, определяемой управляющим стохастическим уравнением, имеет максимум. Координаты максимума энтропии соответствуют критическому состоянию системы, при котором спектры флуктуирующих величин обратно пропорциональны частоте. Максимум энтропии свидетельствует об устойчивости случайных процессов с $1/f$-спектром флуктуаций.

Точечная система (1) может быть обобщена на пространственно распределенный случай [21]:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = -\varphi\psi^2 + \psi + D\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \xi_1(x,t),$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\varphi^2\psi + \varphi + \xi_2(x,t), \qquad (2)$$

где $\langle\xi_k(x,t)\rangle = 0$, $\langle\xi_k(x,t)\xi_l(x',t')\rangle = 2\sigma\delta_{k,l}\delta(x-x')\delta(t-t')$, $k, l = 1, 2$ и $D$ — коэффициент диффузии. Пространственно-распределенная система (2) демонстрирует статистику флуктуаций и скейлинговые соотношения [21], аналогичные точечной системе (1). В пространственно-распределенной системе (2) при достижении достаточно большой интенсивности белого шума обнаруживается индуцированная шумом синхронизация, похожая на критический фазовый переход [22].

Для качественного рассмотрения нелинейных эффектов, связанных с экстремальными флуктуациями в гидродинамике и теплофизике, в настоящей работе взято другое обобщение точечной системы [23]:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = -\varphi\psi^2 + \psi + D\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + v\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \xi_1(x,t),$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\varphi^2\psi + 2\varphi + D\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + v\frac{\partial\psi}{\partial x} + \xi_2(x,t), \qquad (3)$$

где сохранены обозначения системы (2), $v$ — скорость дрейфа. Коэффициент диффузии $D$, а также и скорость дрейфа взяты равными в том и другом уравнении системы (3).

Расчеты показывают, что при разных значениях коэффициента диффузии и скорости дрейфа в уравнениях системы (3) стационарное решение определяется наибольшими $D$ и $v$. При этом только возрастает время установления стационарного состояния, так что равенство коэффициентов диффузии и скорости дрейфа не является упрощающим положением. Детерминированные части уравнений системы (3) отличаются только коэффициентом 2 перед линейным слагаемым во втором уравнении. Это делает второе уравнение системы (3) управляющим, а первое уравнение подчиненным, как и в точечной системе (1).

## 2. Зарождение и распространение волн

При численном интегрировании система (3) записывается в виде [21]

$$\varphi_{i+1,j} = \left(\varphi_{i,j} + \frac{D}{2}\varphi_{i,j+1}\Delta t + \frac{D}{2}\varphi_{i,j-1}\Delta t + \psi_{i,j}\Delta t + v\varphi_{i,j}\Delta t - v\varphi_{i,j-1}\Delta t\right)\left[1 + (\psi_{i,j})^2\Delta t + D\Delta t\right]^{-1} + \sigma_e(p_i)_j(\Delta t)^{0.5},$$

$$\psi_{i+1,j} = \left(\psi_{i,j} + \frac{D}{2}\psi_{i,j+1}\Delta t + \frac{D}{2}\psi_{i,j-1}\Delta t + 2\varphi_{i,j}\Delta t + v\varphi_{i,j}\Delta t - v\varphi_{i,j-1}\Delta t\right)\left[1 + (\varphi_{i,j})^2\Delta t + D\Delta t\right]^{-1} + \sigma_e(q_i)_j(\Delta t)^{0.5}, \quad (4)$$

где $p_i$ и $q_i$ — последовательности гауссовских случайных чисел с нулевым средним и единичным стандартным отклонениями. Они моделируют белый шум и должны различаться по направлению времени и пространства. Амплитуда гауссовских случайных чисел $\sigma_e$ моделирует интенсивность белого шума. Она связана с амплитудой белого шума $\sigma$ соотношением: $\sigma_e^2 = \sigma^2\Delta t$. Масштаб пространственного разбиения $\Delta x$ выражен через временной шаг интегрирования $\Delta t$ и включен в коэффициент диффузии и скорость дрейфа $v$. Поэтому коэффициент диффузии пропорционален квадрату шага интегрирования: $D \sim (\Delta t)^2$, а скорость дрейфа пропорциональна первой степени шага интегрирования: $v \sim \Delta t$. Это следует учитывать при изменении шага интегрирования $\Delta t$.

В расчетах использовались циклические граничные условия. В пространственно-распределенной системе (3) имеется первая производная по времени и вторая по пространству, поэтому для достижения стационарного решения при численном интегрировании системы (4) временных точек должно быть больше, чем пространственных. Интегрирование было проведено для системы, содержащей $K = 128$ пространственных точек при $N = 2048$ шагах интегрирования $\Delta t = 0.1$. Коэффициент диффузии $D$ и скорость дрейфа $v$ в разных расчетах были в интервале $0.3-1$.

Если в качестве начальных условий в системе (3) выбрать гармоническую периодику: $\varphi_{0,j} = A\cos(2\pi k_0 jK^{-1})$ и $\psi_{0,j} = A\cos(2\pi k_0 jK^{-1})$, то независимо от величины амплитуды $A$ длины волн подстраиваются к заданному начальными условиями волновому числу $k_0$. Это происходит как в отсутствие белого шума, так и при небольших его интенсивностях за счет синхронизации, которая может появляться в нелинейных системах. Величина $k_0$ определяет начальное количество волн. Распространение волн в отсутствие шума демонстрирует рис. 1. На этом рисунке показаны временные и пространственные реализации переменных $\psi$ и $\varphi$, полученные численным интегрированием системы (4) в отсутствие шума. Для наглядности помимо реализаций на рисунке приведены контурные графики.

В отсутствие шума и при небольших его интенсивностях в системе происходит зарождение и распространение волн. Для близких к нулевым начальным условиям и малых амплитудах шума система (3) демонстрирует релаксационное поведение. При увеличении амплитуды белого шума примерно до значений $0.2-0.3$ происходит спонтанное зарождение и рост волн. Этот процесс показан на рис. 2. Количество волн ограничено, для выбранных параметров расчета образуется $4-6$ волн. При дальнейшем увеличении амплитуды белого шума

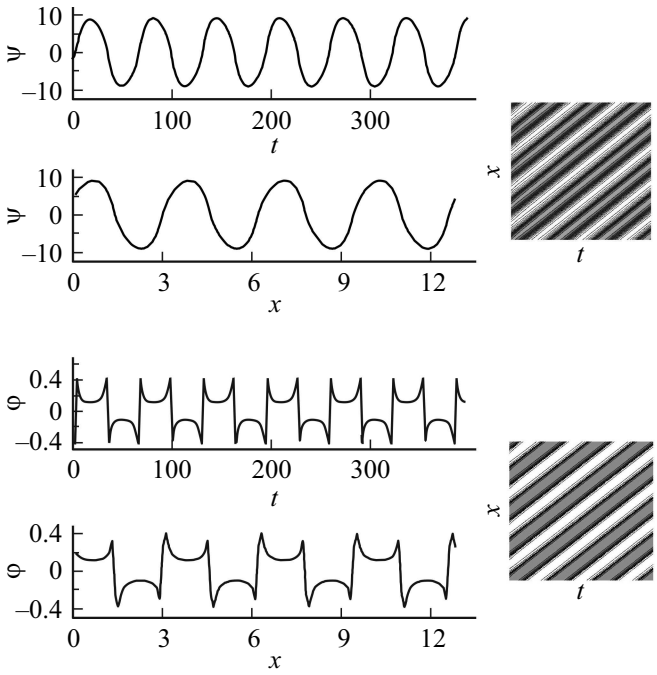



**Рис. 1.** Пространственно-временные колебания переменных $\psi$, $\varphi$ и распространение волн в отсутствие шума.

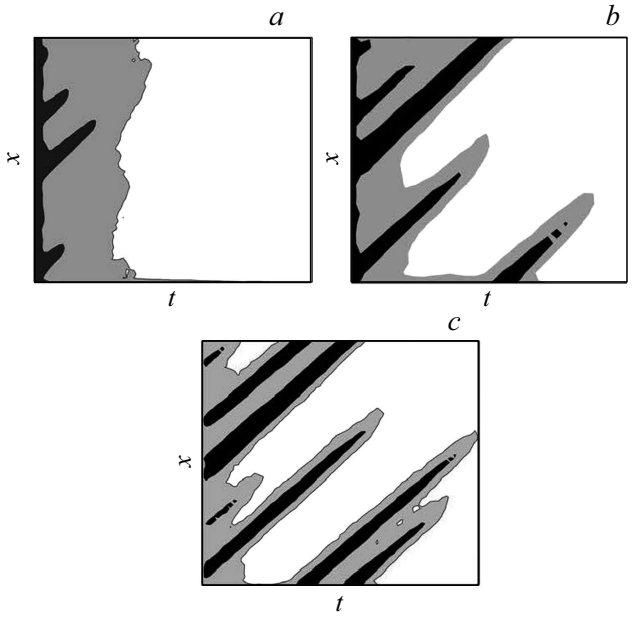



**Рис. 2.** Спонтанное зарождение и рост волн при увеличении амплитуды белого шума: $a$ — $\sigma_e = 0.2$, $b$ — 0.25, $c$ — 0.3.

количество волн начинает уменьшаться за счет их объединения в более крупные. При этом максимум частотного спектра (как временного, так и пространственного), определяемый количеством волн в системе, увеличивается и перемещается в область низких частот. Так продолжается до тех пор, пока не останется одна волна. Существующее значение амплитуды белого шума при этом $\sigma_e \approx 1$. На рис. 3 показана зависимость мак-

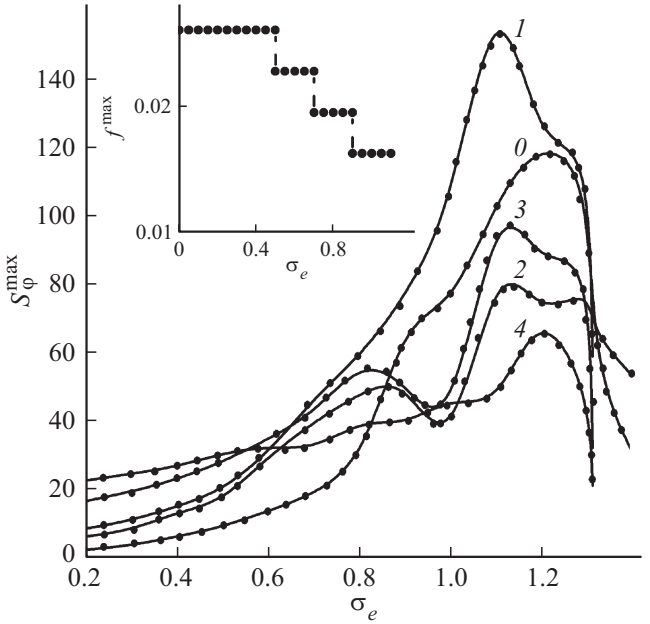



**Рис. 3.** Зависимость максимума спектра мощности переменной $\varphi$ от амплитуды шума для различного начального количества волн. Цифрами показано начальное количество волн. На вставке зависимость частоты, соответствующей максимуму спектра мощности переменной $\varphi$, от амплитуды шума.

симума частотного спектра $S_\varphi^{\max}$ от амплитуды шума $\sigma_e$ для различного начального количества волн. Немонотонность зависимости $S_\varphi^{\max}(\sigma_e)$ обусловлена спонтанными процессами зарождения и слияния волн. На вставке рис. 3 показано ступенчатое уменьшение частоты при увеличении амплитуды шума, что соответствует укрупнению волн и соответственно уменьшению характерной частоты, соответствующей максимуму спектра.

## 3. Максимум энтропии и $1/f$-спектры

При достижении амплитудой белого шума критического значения ($\sigma_e \approx 1$) временные спектры переменных $\varphi$ и $\psi$ становятся обратно пропорциональными частоте и квадрату частоты, т.е. $S_\varphi(f) \sim 1/f$ и $S_\psi(f) \sim 1/f^2$, как и в точечной системе (1). Аналогичным зависимостям подчиняются и пространственные спектры: $S_\varphi(k) \sim 1/k$ и $S_\psi(f) \sim 1/k^2$, где имеем обратно пропорциональную зависимость от волнового числа и квадрата волнового числа. На рис. 4 приведены такие зависимости временных и пространственных спектров динамических переменных, найденные из численного решения системы (4).

При моделировании флуктуационных процессов стохастическими уравнениями критерием устойчивости решения может быть принцип максимума энтропии. Из решений стохастических уравнений находятся плотности вероятности распределений переменных, по которым определяется информационная энтропия Гиббса–Шеннона:

$$H = -\sum_n P_n \log(P_n). \qquad (5)$$

Плотности вероятности распределений $P_n$ должны быть нормированы: $\sum_n P_n = 1$. Индекс $n$ относится к последовательности разбиения аргумента функции распределения по величине. Информационная энтропия по существу имеет свойства статистической энтропии Гиббса, но также справедлива не только для физических систем, но и для более широкого класса социальных, биологических, коммуникационных систем, которые изучаются статистическими методами.

В статистической механике принцип максимума энтропии Гиббса–Шеннона применяется для гауссовского распределения флуктуаций. Для случайных процессов с $1/f$-спектром мощности распределение флуктуаций имеет степенные „хвосты“: функция распределения $P(\varphi)$, найденная из решения системы (4), спадает при больших $\varphi$ по степенному закону. Считается, что при изучении сложных физических систем, для которых характерно распределение со степенными „хвостами“, энтропия Гиббса–Шеннона не может быть использована из-за неинтегрируемости формулы (5) с таким распределением [20,24]. Для решения проблемы вычисления эн-

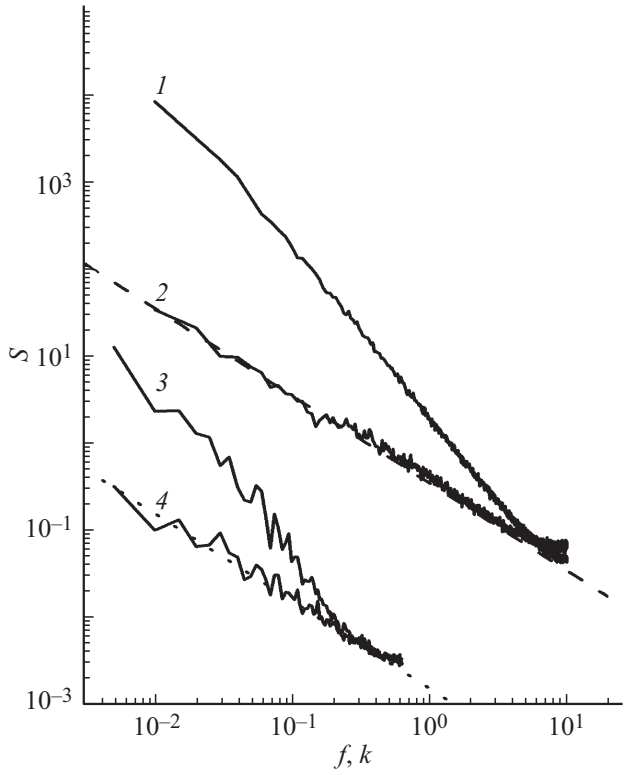



**Рис. 4.** Временные и пространственные спектры динамических переменных системы (3): *1* — временной спектр $S_\psi(f) \sim 1/f^2$; *2* — временной спектр $S_\varphi(f) \sim 1/f$; *3* — пространственный спектр $S_\psi(k) \sim 1/k^2$; *4* — пространственный спектр $S_\varphi(k) \sim 1/k$. Штриховой и пунктирной линиями показаны зависимости $\sim 1/f$ и $\sim 1/k$ соответственно.

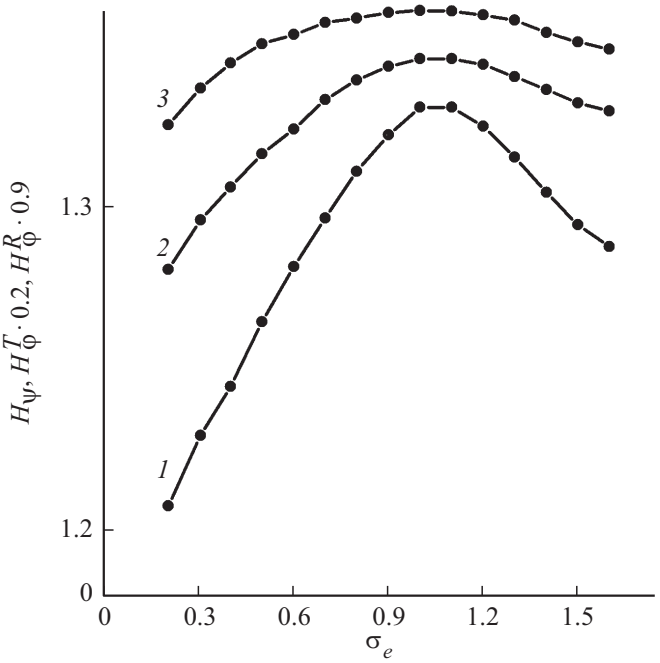



**Рис. 5.** Зависимость энтропии от амплитуды шума: *1* — энтропия Гиббса–Шеннона, *2* — энтропия Цаллиса для $q = 0.6$, *3* — энтропия Реньи для $q = 0.6$.

тропии распределений со степенными „хвостами“ Цаллис [25] предложил деформировать логарифмическую функцию энтропии таким образом, что при больших значениях энергии состояний вероятность их реализации спадала бы не экспоненциально быстро, а по степенному закону. Энтропия Цаллиса определена выражением

$$H^T = \frac{1}{1-q}\left(\sum_n P_n^q - 1\right). \qquad (6)$$

Для степенных функций распределения предлагается также использовать энтропию, введенную Реньи [26]:

$$H^R = \frac{1}{1-q}\ln\sum_n P_n^q. \qquad (7)$$

Обе энтропии $H^T$ и $H^R$ содержат зависимость от параметра $q$, величина которого определяет конкретное положение максимума энтропии.

По нашему мнению, сложная система не может быть характеризована единственной функцией распределения переменных. Достаточно подробная теория сложной системы должна содержать систему нелинейных стохастических уравнений, которые находятся в иерархии подчинения и управления. Можно показать по аналогии с системой (1), что второе уравнение системы (3) является управляющим и имеет функцию распределения, которая спадает при возрастании аргумента $\psi$ так же, как и для гауссовского распределения [14]. Гауссовский характер распределения переменной $\psi$ дает возможность использовать это распределение для нахождения информационной энтропии Гиббса–Шеннона (5).

Было установлено, что информационная энтропия $H_\psi$ для функции распределения $P(\psi^2)$ квадрата переменной $\psi$, рассчитанная по формуле (5), имеет устойчивый максимум. На рис. 5 приведена рассчитанная зависимость информационной энтропии $H_\psi$ от амплитуды шума $\sigma_e$ (кривая *1*). Положение максимума зависимости на рис. 5 соответствует критической амплитуде белого шума, при которой в системе происходит индуцированный шумом переход, и временные и пространственные спектры мощности приобретают соответственно $1/f$- и $1/k$-вид. Дальнейшее увеличение интенсивности белого шума ведет к уменьшению энтропии и разрушению $1/f$- и $1/k$-спектров. Максимум энтропии свидетельствует об устойчивости $1/f$- и $1/k$-спектров.

Значение параметра $q$ в выражениях для энтропий Цаллиса (6) и Реньи (7) можно определить из условия, что положение максимума энтропии Гиббса–Шеннона $H_\psi(\sigma_e)$ для управляющего уравнения и распределения $\psi$ совпадает с положением максимумов энтропий Цаллиса $H_\varphi^T(\sigma_e)$ и Реньи $H_\varphi^R(\sigma_e)$ для подчиненного уравнения и распределения $\varphi$. Найдено значение $q = 0.6$, при котором максимум энтропии Цаллиса совпадает с положением максимума энтропии Гиббса–Шеннона. Для энтропии Реньи найдено такое же значение параметра $q = 0.6$. Величина $q$, как и координаты максимумов энтропии, не зависят от расчетного шага интегрирования в выражениях (6) и (7). Результаты расчетов $H_\varphi^T$ и $H_\varphi^R$ в зависимости от амплитуды шума представлены на рис. 5 (кривые *2* и *3*).

Сложная система должна иметь иерархию процессов управления и подчинения, и проблема существования максимума энтропии должна решаться с учетом анализа такой иерархии. Подход Цаллиса [25] или Реньи [26] может быть использован, когда имеется ограниченная информация о сложной системе. Например, в экспериментах часто приходится иметь дело только с одной функцией распределения. Если эта функция спадает по закону гауссова распределения, то ее можно использовать для вычисления энтропии Гиббса–Шеннона, максимум которой определяет устойчивый процесс. Для функции распределения со степенными хвостами можно использовать для вычисления энтропии формулы Цаллиса (5) и Реньи (7), если есть возможность определить значение параметра $q$.

## 4. Пространственно-временной стохастический резонанс

Внешние воздействия на систему приводят к усложнению процесса. Так, при внешней периодической нагрузке в кризисных и переходных режимах наряду с экстремальными пульсациями, имеющими $1/f$-спектр, возможен стохастический резонанс, при котором в

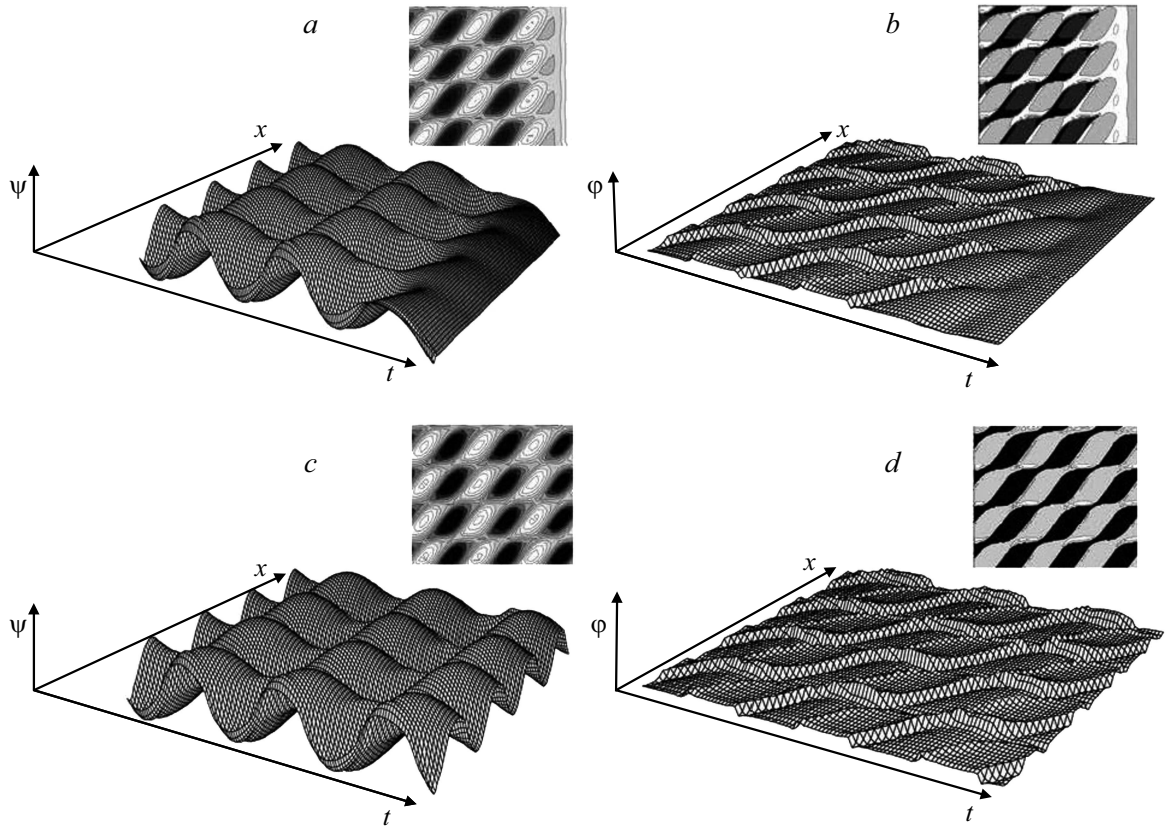



**Рис. 6.** Пространственно-временные развертки пульсаций переменных $\psi$ и $\varphi$: *a* и *b* при отсутствии белого шума, *c* и *d* — при воздействии белого шума с амплитудой $\sigma_e \simeq 0.3$. На верхних вставках контурные графики.

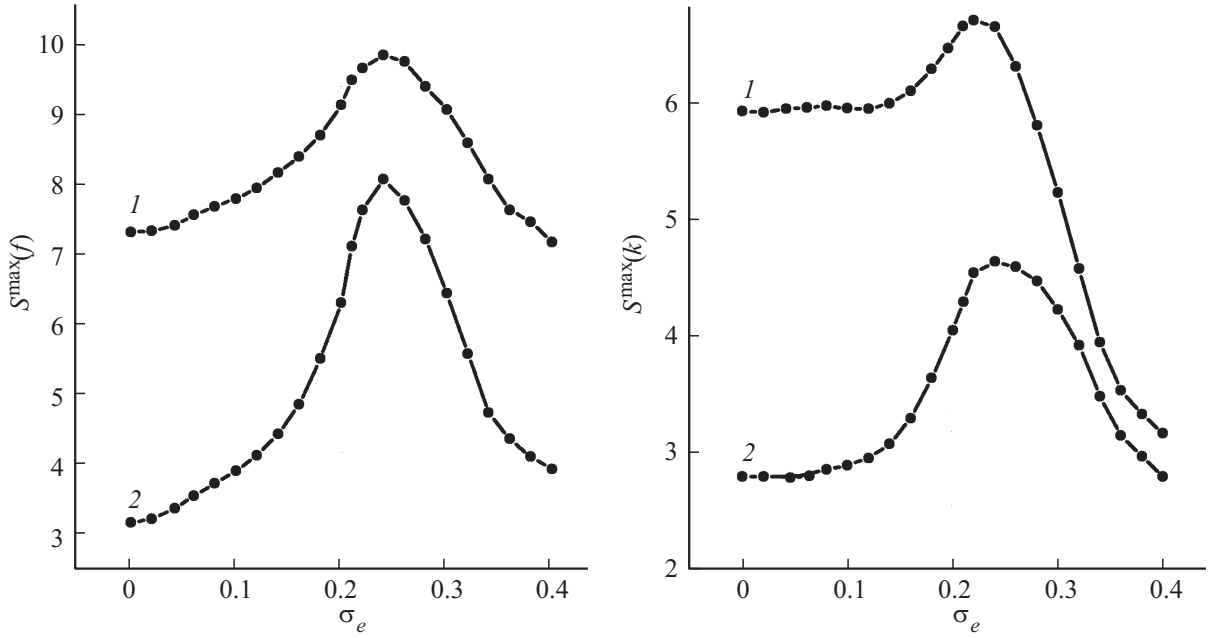



**Рис. 7.** Зависимости максимума временного и пространственного спектров на частоте внешнего периодического воздействия от интенсивности белого шума: *1* — переменная $\psi$; *2* — переменная $\varphi$.

присутствии шума происходит многократное усиление амплитуды периодического сигнала [15,16].

При внешнем периодическом воздействии система (3) переписывается в виде

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\varphi\psi^2 + \psi + D\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + v\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \xi_1(x,t) + A_\Omega \sin(\Omega t),$$
$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\varphi^2\psi + 2\varphi + D\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + v\frac{\partial \psi}{\partial x} + \xi_2(x,t) + A_\Omega \sin(\Omega t), \quad (8)$$

где $A_\Omega$ и $\Omega$ — амплитуда и частота внешнего периодического возмущения.

В области низких частот внешнего воздействия в системе (8), как и в точечной системе (1) [16,17], наблюдается немонотонная зависимость максимума спектральной плотности переменных $S_\psi^{\max}$ и $S_\varphi^{\max}$ и от интенсивности белого шума. Возрастание мощности периодического сигнала в присутствии шума свидетельствует о стохастическом резонансе в системе. Стохастический резонанс усиливается с понижением частоты периодического воздействия. В области низких частот и достаточно высоких амплитуд внешнего периодического сигнала в пространственно распределенной системе, как и в точечной, наблюдается анизотропный стохастический резонанс [18].

В пространственно-распределенной системе (8) наблюдается пространственно-временной стохастический резонанс [23]. Наглядную демонстрацию пространственно-временного стохастического резонанса в системе (8) лучше всего демонстрирует влияние белого шума на расширение границ области периодических пульсаций. На рис. 6 показаны пульсации переменных $\psi$ и $\varphi$ при отсутствии белого шума. Видно, что при заданных параметрах частоты и амплитуды внешнего воздействия пульсации отсутствуют при больших временах. Включение белого шума при определенной интенсивности ($\sigma_e \simeq 0.2-0.3$) при неизменности остальных параметров увеличивает амплитуду пульсаций примерно в полтора раза. При этом происходит восстановление периодических пульсаций во всем диапазоне времен. Такое восстановление пульсаций демонстрирует рис. 6. На рис. 7 показаны зависимости максимума временного $S^{\max}(f)$ и пространственного $S^{\max}(k)$ спектров переменных $\psi$ и $\varphi$ на частоте внешнего периодического воздействия $\Omega$ от интенсивности белого шума. Немонотонная зависимость максимумов спектральной плотности, характеризующих мощность пульсаций на частоте периодического воздействия, связана с пространственно-временным резонансом в системе.

## Заключение

В пространственно-распределенной системе двух нелинейных стохастических уравнений, моделирующей взаимодействующие фазовые переходы, возможно спонтанное возникновение и распространение волн по действию белого шума. При критической интенсивности шума на фоне образования и движения волн формируются $1/f$- и $1/k$-спектры экстремальных флуктуаций. Распределение экстремальных флуктуаций соответствует максимуму энтропии, что свидетельствует об их устойчивости. При внешнем периодическом возмущении в системе можно наблюдать пространственно временной стохастический резонанс, при котором наряду с усилением амплитуды наблюдается расширение границ области периодических пульсаций.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант 15-08-02210а и Программы фундаментальных исследований УрО РАН № 15-1-2-7.

## Список литературы

[1] *Bak P.* How Nature Works. Berlin: Springer, 1996.
[2] *Мандельброт Б.* Фрактальная геометрия природы. М.: Институт компьютерных исследований, 2002. (*Mandelbrot B.* The Fractal Geometry of Nature. N.Y.: W.H. Freeman and Co., 1982).
[3] *Климонтович Ю.Л.* Статистическая теория открытых систем. М.: Янус, 1995. (*Klimontivich Yu.L.* Statistical Theory of Open Systems. Dordrecht: Kluwer, 1995).
[4] *Corberi F.* // J. Phys. A. 2015. Vol. 48. N 46. 465003.
[5] *Скоков В.Н., Коверда В.П., Решетников А.В.* // Письма в ЖЭТФ. 1999. Т. 69. Вып. 8. С. 590–593 (*Skokov V.N., Koverda V.P., Reshetnikov A.V.* // JETP Lett. 1999. Vol. 69. N 8. P. 636–639).
[6] *Skokov V.N., Koverda V.H., Reshetnikov A.V., Skripov V.P., Mazheiko N.A., Vinogradov A.V.* // Int. J. Heat and Mass Transfer. 2003. Vol. 46. P. 1879–1883.
[7] *Skokov V.N., Koverda V.P., Reshetnikov A.V., Vinogradov A.V.* // Physica A. 2006. Vol. 364. P. 63–69.
[8] *Колмогоров А.Н.* // ДАН СССР. 1941. Т. 30. № 4. С. 299–303. (*Kolmogorov A.N.* // Proceedings of the USSR Academy of Sciences. 1941. Vol. 30. P. 299–303).
[9] *Bak P., Tang C., Wiesenfeld K.* // Phys. Rev. A 1988. Vol. 38. N 1. P. 364–374.
[10] *Mandelbrot B.B., Van Ness J.W.* // SLAM Rev. 1968. Vol. 10. P. 422–437.
[11] *Коверда В.П., Скоков В.Н., Скрипов В.П.* // ЖЭТФ. 1998. Т. 113. № 5. С. 1748–1757 (*Koverda V.P., Skokov V.N.* // J. Experimental and Theoretical Physics. 1998. Vol. 86. N 5. P. 953–958).
[12] *Koverda V.P., Skokov V.N.* // Physica A. 1999. Vol. 262. P. 376–386.
[13] *Коверда В.П., Скоков В.Н.* // ДАН. 2010. Т. 434. № 6. С. 760–764. (*Koverda V.P., Skokov V.N.* // Doklady Physics. 2010. Vol. 55. N 10. P. 483–487).
[14] *Koverda V.P., Skokov V.N.* // Physica A. 2012. Vol. 391. P. 21–28.
[15] *Анищенко В.С., Нейман А.Б., Мосс Ф., Шиманский-Гайер Л.* // УФН. 1999. Т. 169. № 1. С. 7– 39. (*Anishchenko V.S., Neiman A.B., Moss F., Schimansky-Geier L.* // Uspekhi Fizicheskikh Nauk. 1999. Vol. 169. P. 7).
[16] *Скоков В.Н., Коверда В.П.* // ЖТФ. 2014. Т. 84. Вып. 5. С. 9–13. (*Skokov V.N., Koverda V.P.* // Technical Physics. 2014. Vol. 59. N 5. P. 637–641).

[17] *Koverda V.P., Skokov V.N.* // Physica A. 2014. Vol. 393. P. 173–181.
[18] *Коверда В.П., Скоков В.Н.* // ДАН. 2013. Т. 452. № 6. С. 617–621. (*Koverda V.P., Skokov V.N.* // Doklady Physics. 2013. Vol. 58. N 10. P. 433–437).
[19] *Коверда В.П., Скоков В.Н.* // ДАН 2002. Т. 386. № 2. С. 187–189. (*Koverda V.P., Skokov V.N.* // Doklady Physics. 2002. Vol. 47. N 9. P. 654–656).
[20] *Башкиров А.Г.* // ТМФ. 2006. Т. 149. № 2. С. 299–317. (*Bashkirov A.G.* Theoretical and Mathematical Physics. 2006. Vol. 149. N 2. P. 1559–1573).
[21] *Коверда В.П., Скоков В.Н.* // ЖТФ. 2010. Т. 80. Вып. 4. С. 9–15. (*Koverda V.P., Skokov V.N.* // Technical Physics. 2010. Vol. 55. N 4. P. 442–448).
[22] *Коверда В.П., Скоков В.Н.* // ЖТФ. 2016. Т. 86. Вып. 8. С. 15–19. (*Koverda V.P., Skokov V.N.* // Technical Physics. 2016. Vol. 61. N 8. P. 1135–1140).
[23] *Коверда В.П., Скоков В.Н.* // ДАН. 2016. Т. 471. № 3. С. 281–285. (*Koverda V.P., Skokov V.N.* // Doklady Physics. 2016. Vol. 61. N 11. P. 535–538).
[24] *Montroll E.W., Shlesinger M.F.* // J. Stat. Phys. 1983. Vol. 32. № 2. P. 209–230.
[25] *Tsallis C.* // J. Stat. Phys. 1988. Vol. 52. P. 479.
[26] *Renyi A.* Probability Theory. Amsterdam: North-Holland, 1970.