

03

Об инкрементах неустойчивости волн различной симметрии на движущейся относительно материальной среды объемно заряженной струе

© А.И. Григорьев, С.О. Ширяева, Г.Е. Михеев

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
150000 Ярославль, Россия
e-mail: shir@uniyar.ac.ru

Поступило в Редакцию 31 мая 2017 г.

В окончательной редакции 18 февраля 2019 г.

Принято к публикации 20 февраля 2019 г.

Исследованы инкременты неустойчивости капиллярных волн с произвольной симметрией (с произвольными азимутальными числами m) на поверхности объемно заряженной цилиндрической струи идеальной несжимаемой диэлектрической жидкости, движущейся относительно идеальной несжимаемой материальной диэлектрической среды. Показано, что при не слишком больших скоростях движения струи с увеличением объемной плотности заряда первой становится неустойчивой осесимметричная мода ($m = 0$), затем изгибная ($m = 1$), а затем изгибно-деформационная ($m = 2$). Такая последовательность реализации неустойчивости азимутальных мод и определяет закономерности дробления заряженных струй в экспериментах. При скоростях струи, сравнимых с критической для реализации аэродинамической неустойчивости, первой теряет устойчивость мода с $m = 1$. Для всех азимутальных мод определены зависимости величин максимальных инкрементов от волновых чисел.

Ключевые слова: объемно заряженная струя, капиллярные волны, инкременты.

DOI: 10.21883/JTF.2019.08.47888.2368

Введение

В экспериментальных работах [1–4] отмечаются различные виды реализации неустойчивости жидкой струи, движущейся относительно материальной среды. Это, по всей видимости, связано с различными видами симметрии капиллярных волн, бегущих по поверхности струи. Амплитуды волн на струе $\propto J_m(kR)$, где J_m — цилиндрическая функция порядка m , k — волновое число, R — радиус струи, m — азимутальный параметр, характеризующий симметрию волн. При $m = 0$ имеем осесимметричные волны, которым посвящено большинство исследований, поскольку они отвечают за распад струи на капли (см., например, [5–9]), феномен, имеющий основное приложение в практике.

При $m = 1$ получим неосесимметричные изгибные волны, отвечающие за „хлыстообразное“ движение конца реальной струи [1–4, 10–13].

При $m = 2$ реализуются неосесимметричные изгибно-деформационные волны. В экспериментальных работах [2–4] обнаружено, что при весьма больших электрических потенциалах, подаваемых на струю, она начинает ветвиться: из исходной (толстой) родительской струи выбрасываются дочерние (примерно на два порядка более тонкие) струйки, при этом все они совершают „хлыстообразные“ движения (и родительская струя, и дочерние) и распадаются на капельки.

Теоретическое истолкование описанный режим дробления струи получил в [14, 15]. При больших напряжениях электрического поля у поверхности жидко-

сти на ней образуются эмиссионные выступы (конусы Тейлора [16–18]) как на плоской [18, 19], так и на сферической [20] границах. Из вершин конусов Тейлора и выбрасываются дочерние струйки.

Неустойчивость неосесимметричных волн на струе исследована лишь поверхностно. Изучение их инкрементов γ и их связи с инкрементами осесимметричной моды представляет очевидный интерес хотя бы потому, что при реализации неустойчивости изгибно-деформационной моды (с $m = 2$) одновременно реализуется неустойчивость и первых двух мод (с $m = 1$ и $m = 0$).

Инкремент γ — это постоянный положительный коэффициент в экспоненциальном законе возрастания со временем амплитуд неустойчивых волн [21]. В случае жидкой струи экспоненциальное возрастание во времени амплитуды осесимметричной волны приводит к неустойчивости струи и распаду ее на капли. Решающее значение для распада струи имеет рост амплитуды волны, волновое число которой k_{\max} имеет значение, отвечающее максимуму инкремента.

Еще Рэлей [22] показал, что в случае незаряженной осесимметричной струи

$$k_{\max} \approx \frac{2\pi}{9.02R}.$$

Подставляя значение k_{\max} в аналитическое выражение для инкремента, несложно найти и максимальное значение для него:

$$\gamma_{\max} \approx 0.12\sqrt{\sigma/\rho R^3}.$$

Здесь σ и ρ — коэффициент поверхностного натяжения и массовая плотность жидкости. Волны с $k = k_{\max}$ обладают наибольшей неустойчивостью по сравнению со всеми другими волнами.

За время

$$\tau = \frac{1}{\gamma_{\max}} \approx 8.46 \sqrt{\rho R^3 / \sigma}$$

амплитуда волны возрастает в e раз. При этом распад струи происходит на капли $r \approx 3R \sqrt[3]{4}$, размер которых связан с длиной волны, обладающей максимальным инкрементом $\lambda_{\max} \equiv 2\pi/k_{\max}$, т.е. примерно в два раза превышает радиус струи.

Представляет интерес и длина нераспавшейся части струи L :

$$L \approx 8.46 \cdot U \sqrt{\rho R^3 / \sigma},$$

где U — скорость струи. Оценки, например, для струи воды дают $L \approx 10$ nm при $R = 1$ cm и $U = 100$ cm/s [21].

Таким образом, знание инкремента осесимметричных волн позволяет получить важные для исследования диспергирования струи на капли характеристики. Но что нам даст знание инкрементов неосесимметричных волн?

Инкремент волн с $m = 1$ дает скорость нарастания изгиба первоначально прямолинейной струи, а инкремент волн с $m = 2$ характеризует количество дочерних струек, на которые распадается первоначальная струя, или расстояние между „конусами Тейлора“, вырастающими на родительской струе при реализации неустойчивости волн с $m = 2$, из вершин которых и выбрасываются дочерние струйки. Но чтобы эти рассуждения были не голословными, нужно найти соотношения между величинами инкрементов волн с различными азимутальными числами m .

Формулировка задачи

Пусть имеется бесконечная цилиндрическая струя идеальной несжимаемой диэлектрической жидкости радиуса R , движущаяся вдоль своей оси симметрии с постоянной скоростью \mathbf{U} . Пусть массовая плотность жидкости есть ρ_1 , диэлектрическая проницаемость — ϵ_1 , коэффициент межфазного натяжения — σ . Окружающая струю среда моделируется идеальной несжимаемой диэлектрической жидкостью с диэлектрической проницаемостью ϵ_2 и массовой плотностью ρ_2 . В нижеследующем изложении нижним индексом 1 будем отмечать физические величины, относящиеся к струе, а индексом 2 — относящиеся к среде. Примем, что струя объемно заряжена, и что в рамках модели „вмороженного“ заряда он распределен равномерно по объему с постоянной объемной плотностью μ , при этом на единицу длины струи приходится заряд $\eta \equiv \pi R^2 \mu$. Напряженность электрического поля в струе будет $\mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t)$, в среде — $\mathbf{E}_2(\mathbf{r}, t)$.

Для упрощения задачи перейдем в инерциальную систему координат, движущуюся вместе со струей с такой же скоростью \mathbf{U} . В такой системе отсчета поле

скоростей течения жидкости в струе $\mathbf{U}_1(\mathbf{r}, t)$ полностью определится возможными капиллярными волнами на ее поверхности, и будет величиной такого же порядка малости, что и амплитуда капиллярных волн.

Предполагаем, что в жидкости существует волновое движение во всем спектре длин капиллярных волн, что приводит к искажению равновесной поверхности раздела сред. Это искажение имеет весьма малую (тепловую) амплитуду $\sim \sqrt{\kappa T / \sigma}$, где κ — постоянная Больцмана; T — абсолютная температура. Такие волны порождают уже тепловым движением молекул жидкости [19].

Будем искать критические условия реализации неустойчивости капиллярных волн на границе раздела сред. Все расчеты проведем в цилиндрической системе координат с осью OZ , совпадающей с осью симметрии невозмущенной струи, орг \mathbf{e}_z которой направлен вдоль вектора скорости \mathbf{U} .

В безразмерных переменных, в которых радиус струи R , плотность жидкости ρ_1 и коэффициент поверхностного натяжения σ выбраны в качестве основных масштабов ($R = \rho_1 = \sigma = 1$), уравнение границы раздела сред, искаженной капиллярным волновым движением малой амплитуды, может быть записано в виде

$$r(\varphi, z, t) = 1 + \xi(\varphi, z, t),$$

где $\xi(\varphi, z, t)$ — функция возмущения равновесной поверхности струи, вызванного капиллярными волнами на границе раздела сред. Для всех жидкостей (включая жидкие металлы) амплитуда тепловых волн не превышает ангстрема, так что $|\xi| \ll 1$. Величину $|\xi|$ примем в качестве малого параметра задачи.

Математическая формулировка задачи о расчете устойчивости капиллярных волн на поверхности струи имеет вид (в предположении, что скорость движения жидкости много меньше релятивистской):

$$\text{div } \mathbf{U}_1(\mathbf{r}, t) = 0;$$

$$\partial_t \mathbf{U}_1(\mathbf{r}, t) + (\mathbf{U}_1(\mathbf{r}, t), \nabla) \mathbf{U}_1(\mathbf{r}, t) = -\nabla P_1(\mathbf{r}, t);$$

$$\text{div } \mathbf{U}_2(\mathbf{r}, t) = 0;$$

$$\partial_t \mathbf{U}_2(\mathbf{r}, t) + (\mathbf{U}_2(\mathbf{r}, t), \nabla) \mathbf{U}_2(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{\rho_2} \nabla P_2(\mathbf{r}, t);$$

$$\text{rot } \mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t) = 0;$$

$$\text{div } \mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t) = \frac{4\pi\mu}{\epsilon_1}; \text{rot } \mathbf{E}_2(\mathbf{r}, t) = 0; \text{div } \mathbf{E}_2(\mathbf{r}, t) = 0.$$

Дополним систему уравнений естественными граничными условиями:

$$r \rightarrow \infty : \mathbf{U}_2(\mathbf{r}, t) \rightarrow -\mathbf{U} = -U \mathbf{e}_z; \mathbf{E}_2(\mathbf{r}, t) \rightarrow 0;$$

$$r \rightarrow 0 : \mathbf{U}_1(\mathbf{r}, t) \rightarrow 0; |\mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t)| < \infty.$$

На поверхности струи, заданной уравнением:

$$F(\mathbf{r}, t) \equiv r - 1 - \xi(\varphi, z, t) = 0;$$

должны выполняться следующие граничные условия: кинематическое

$$-\frac{\partial F}{\partial t} + (\mathbf{U}_j, \nabla F) = 0; (j = 1, 2);$$

динамические

$$P_1(\mathbf{r}, t) - P_2(\mathbf{r}, t) + P_E(\mathbf{r}, t) = P_\sigma(\mathbf{r}, t);$$

$$\varepsilon_2(\mathbf{n}(\mathbf{r}, t), \mathbf{E}_2(\mathbf{r}, t))(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{E}_2)$$

$$= \varepsilon_1(\mathbf{n}(\mathbf{r}, t), \mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t))(\boldsymbol{\tau}(\mathbf{r}, t), \mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t));$$

и условия на компоненты вектора напряженности электрического поля на границе раздела двух диэлектриков

$$(\boldsymbol{\tau}(\mathbf{r}, t), \mathbf{E}_2(\mathbf{r}, t)) = (\boldsymbol{\tau}(\mathbf{r}, t), \mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t));$$

$$\varepsilon_2(\mathbf{n}(\mathbf{r}, t), \mathbf{E}_2(\mathbf{r}, t)) = \varepsilon_1(\mathbf{n}(\mathbf{r}, t), \mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t)).$$

В выписанных соотношениях $\mathbf{U}_j(\mathbf{r}, t)$ и $P_j(\mathbf{r}, t)$ — поля скоростей и поля давлений внутри и вне струи.

$$P_E(\mathbf{r}, t) = -\mu\Phi_1 + \frac{\varepsilon_1}{8\pi} \left(E_1^2 - 2(\mathbf{n}, \mathbf{E}_1)^2 \right)$$

$$- \frac{\varepsilon_2}{8\pi} \left(E_2^2 - 2(\mathbf{n}, \mathbf{E}_2)^2 \right)$$

— давление электрического поля на поверхность струи;

$$P_\sigma(\mathbf{r}, t) = \text{div } \mathbf{n}(\mathbf{r}, t); \mathbf{n}(\mathbf{r}, t) = \frac{\nabla F(\mathbf{r}, t)}{|\nabla F(\mathbf{r}, t)|} \Big|_{F(\mathbf{r}, t)=0}$$

— давление капиллярных сил (лапласовское); $\mathbf{n}(\mathbf{r}, t)$ и $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{r}, t)$ — единичные вектора нормали и касательной к возмущенной поверхности струи.

Кроме приведенных условий, должно выполняться дополнительное требование постоянства объема участка струи, длина которого равна длине волны λ :

$$\int_{z_0}^{z_0+\lambda} \int_0^{2\pi} \int_0^{1+\xi} r dr d\varphi dz = \pi\lambda.$$

Сформулированная задача решается стандартными методами (см., например, [23]), поэтому сразу выпишем, согласно [23], ее дисперсионное уравнение

$$\omega^2 + 2\omega \cdot k \cdot U \cdot \eta(m, k) - \omega_0^2 = 0; \quad (1)$$

$$\omega_0^2 \equiv \frac{g(m, k)}{\left(1 - \rho \frac{g(m, k)}{h(m, k)}\right)} \left(k^2 + m^2 - 1 + \frac{\pi\mu^2}{(\varepsilon_1 g(m, k) - \varepsilon_2 h(m, k))} \right)$$

$$\times \left(4 - g(m, k) \left(3 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \right) + h(m, k) \left(3 - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \right) \right)$$

$$+ \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} g(m, k) h(m, k) \Bigg) + \frac{k^2 \rho U^2}{h(m, k)} \Bigg);$$

$$\rho \equiv \rho_2 / \rho_1; g(m, k) \equiv m + k \frac{I_{m+1}(k)}{I_m(k)};$$

$$h(m, k) \equiv m - k \frac{K_{m+1}(k)}{K_m(k)};$$

$$\eta(m, k) \equiv \frac{\rho g(m, k)}{h(m, k) - \rho \cdot g(m, k)}.$$

Здесь $I_m(k)$ и $K_m(k)$ — модифицированные цилиндрические функции первого и второго рода порядка m соответственно.

Корни уравнения (1) легко получаются в виде

$$\omega(m, k, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \rho, \mu, U) = \omega_1$$

$$\equiv -kU\eta(m, k) - \sqrt{k^2 U^2 \eta(m, k)^2 + \omega_0^2};$$

$$\omega(m, k, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \rho, \mu, U) = \omega_2$$

$$\equiv -kU\eta(m, k) + \sqrt{k^2 U^2 \eta(m, k)^2 + \omega_0^2}. \quad (2)$$

В этих выражениях $g(m, k)$, $h(m, k)$, $\eta(m, k)$, $\omega_0^2 = \omega_0^2(m, k, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \rho, \mu, U)$ — вещественные функции.

При изменении физических параметров системы частоты волн изменяются. Пока частоты ω вещественны, волновое движение на поверхности струи устойчиво. Неустойчивость проявляется, когда частоты становятся комплексными. При этом, согласно (2), у одной из частот мнимая часть будет отрицательной (амплитуда соответствующей волны будет экспоненциально затухать с декрементом $\chi \equiv -\text{Im } \omega$), а у другой — положительной (амплитуда соответствующей волны будет экспоненциально расти с инкрементом $\gamma \equiv \text{Im } \omega$). Легко видеть, что условием появления положительной мнимой части у частоты является отрицательность подкоренного выражения в радикалах (2):

$$F(m, k, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \rho, \mu, U) \equiv k^2 U^2 \eta(m, k)^2 + \omega_0^2 \leq 0. \quad (3)$$

Выписанное выражение для функции F в области $F \leq 0$ определит величину квадрата инкремента $F \equiv -\gamma^2$. В нижеследующих рассуждениях нас будет интересовать функция F именно в этой области, и все сказанное ниже относится к отрицательным значениям F .

На рис. 1 приведены зависимости функции $-F$ (т.е. квадрата инкремента) для нулевой, первой и второй азимутальных мод ($m = 0; 1; 2$) в зависимости от волнового числа и объемной плотности заряда при фиксированных значениях прочих физических параметров. Несложно видеть, что по мере роста объемной плотности заряда при малых μ сначала возбуждается осесимметричная нулевая мода, затем — неосесимметричная, изгибная первая, а затем — неосесимметричная, изгибно-деформационная вторая.

Видно, что при определенных значениях физических параметров поверхность $F(k, \mu)$ для $m = 0$ становится отрицательной, т.е. струя становится неустойчивой. Затем по мере роста объемной плотности заряда ее судьбу повторяет мода (с $m = 1$), инкремент неустойчивости изгибной моды превышает таковой для осесимметричной моды, и поверхность $F(k, \mu)$ для $m = 1$, превышает таковую для осесимметричной моды. Далее с дальнейшим

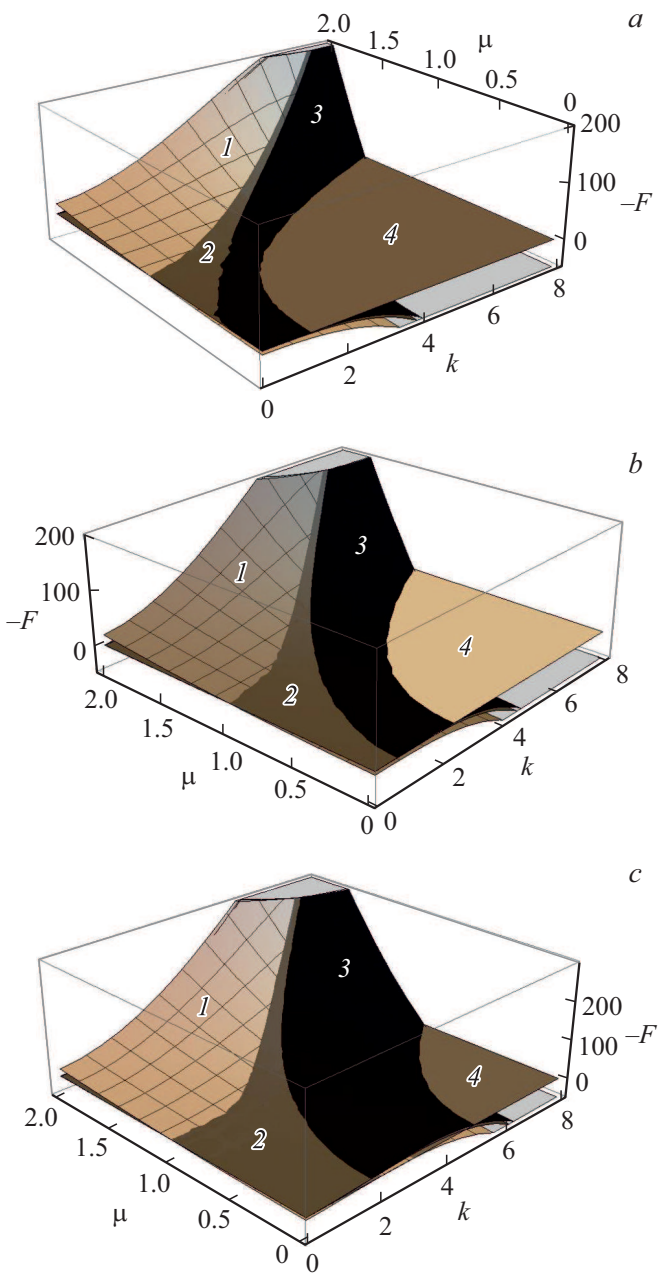


Рис. 1. Зависимости величины $-F$ (квадрата безразмерного инкремента γ^2) нулевой (поверхность 3), первой (поверхность 2) и второй (поверхность 1) азимутальных мод волн ($m = 0; 1; 2$) от безразмерных волнового числа k и объемной плотности заряда μ . Поверхность 4 соответствует равенству нулю поверхности $F(k, \mu)$ при $\varepsilon_1 = 80$, $\varepsilon_2 = 1$, $\rho_2 = 0.001$. *a* — $U = 25$; *b* — $U = 50$; *c* — $U = 73$.

ростом объемной плотности заряда самым большим становится инкремент изгибно-деформационной моды (с $m = 2$).

На рис. 1 поверхность 3 соответствует осесимметричной моде в области ее неустойчивости (там, где $F(k, \mu < 0)$). Плоскость 4 соответствует значениям $F(k, \mu) = 0$. По мере роста объемной плотности заря-

да μ поверхность 3 уходит под поверхность 2, соответствующую изгибной моде, которая с ростом μ , в свою очередь, уходит под поверхность 1, соответствующую изгибно-деформационной моде.

Численные расчеты, проиллюстрированные на рис. 1, *a*, проводились при $\rho = 0.001$, $\varepsilon_1 = 80$, $\varepsilon_2 = 1$, $U = 25$.

Если расчеты провести при $U = 50$ (рис. 1, *b*), картина соотношений между величинами инкрементов мод изменится качественно. В области длинных волн (при $k < 0.6$) по мере роста параметра μ инкременты волн с различными m при фиксированном $k < 0.6$ будут монотонно увеличиваться, начиная с осесимметричных волн с $m = 1$. В итоге первыми будут возбуждаться изгибные волны (с $m = 1$), за ними — изгибно-деформационные (с $m = 2$). Осесимметричные волны (с $m = 0$) по сравнению с ними будут иметь меньшие инкременты. А именно струя сначала будет изгибаться и только потом дробиться на капли. Но сказанное имеет отношение только к длинным волнам на струе. Для более коротких волн все останется по-прежнему.

Необходимо отметить, что неустойчивость различных азимутальных мод происходит независимо друг от друга. Реализация на струе неустойчивости одной из азимутальных мод не препятствует наступлению неустойчивости другой. Так, при реализации электродиспергирования в режиме „ветвящихся струй“ (ramified jet), имеет место неустойчивость всех трех азимутальных мод [2].

Значение скорости $U = 73$ является критическим для реализации аэродинамической неустойчивости: струя разбивается на мелкие капли независимо от наличия на ней заряда. Картина реализации неустойчивости мод с различными азимутальными числами качественно будет такой же, как описано выше для $U = 50$. Изменяется в сторону увеличения только численные значения инкрементов и области реализации неустойчивости несимметричных волн сместятся по сравнению с предыдущим рисунком к более коротким волнам.

Отметим, что неустойчивость осесимметричной ($m = 0$) моды не имеет порога ни по величине объемного заряда, ни по скорости: струя распадается на капли даже будучи незаряженной и неподвижной. Поверхность струи всегда неустойчива по отношению к осесимметричным волнам с волновыми числами $k < 1$, т.е. с длинами, превышающими длину окружности недеформированного сечения струи ($\lambda > 2\pi$), поскольку потенциальная энергия сил поверхностного натяжения цилиндрической струи превышает потенциальную энергию совокупности сферических капель, на которые разобьется струя. В то же время капиллярные волны на поверхности струи с безразмерными волновыми числами, большими единицы ($k > 1$), устойчивы. Наличие у струи объемного заряда и тангенциального скачка поля скоростей на границе раздела с окружающей материальной средой являются дестабилизирующими факторами, приводящими к расширению диапазона неустойчивых волн и к увеличению инкрементов нарастания амплитуд

волн в зонах их неустойчивости. С появлением заряда на струе область неустойчивости расширяется и отодвигается от оси ординат, смещаясь в область больших значений волновых чисел. При увеличении скорости просто увеличивается размер области неустойчивости [23].

Что касается изгибных волн ($m = 1$), то при нулевом объемном заряде они устойчивы, но при сколь угодно малом заряде теряют свою устойчивость [13,23]. То есть неосесимметричные изгибные волны в зависимости от величины волнового числа имеют нулевой порог по объемной плотности заряда. Если струя не заряжена, но движется, то изгибные волны теряют устойчивость при увеличении скорости до $U \approx 2$.

Изгибно-деформационные волны ($m = 2$) в зависимости от физических характеристик системы имеют пороги как по скорости движения струи, так и по величине объемного заряда, и возбуждаются при $\mu \approx 3$ и $U \approx 0$, либо при $\mu = 0$ и $U \approx 73$ [14,23].

В итоге следует сказать, что рис. 1 рассчитывался при закритических значениях комбинации параметров U , μ для $m = 0$ и $m = 1$ и околокритических значениях параметров для $m = 2$: $U = 50$ и $0 \leq \mu \leq 2$.

Из сказанного выше следует, что неустойчивость изгибно-деформационных волн ($m = 2$) реализуется при высоких значениях параметров μ и U , когда волны с $m = 0$ и $m = 1$ заведомо неустойчивы. Но тем не менее, согласно рис. 1, у волны с $m = 2$ самый большой инкремент при заданных значениях параметров $\mu > 1$, $U = 50$ и широком диапазоне значений волнового числа k .

Из рис. 1 следует, что в экспериментах неустойчивость реальной струи конечной длины при фиксированной длине волны по мере роста объемной плотности заряда вначале определяется нулевой модой, и струя дробится на капли. Функция распределения образующихся капель по размерам будет узкой. Затем возбуждается изгибная мода, и свободный конец струи, не прекращая деления на капли, начинает совершать „хлыстообразные“ движения. Отрыву капель от конца струи при этом способствует сила инерции, причем в различных фазах „хлыстообразного“ движения конца струи сила инерции, действующая на отрывающуюся каплю, различна. Это приведет к тому, что отрывающиеся в различных фазах капли будут различаться по размерам. В итоге функция распределения отрывающихся капель по размерам будет расширяться по сравнению со случаем нулевой (осесимметричной) моды. При дальнейшем росте μ реализуется электростатическая неустойчивость и на поверхности струи образуются „конусы Тейлора“, из вершин которых выбрасываются дочерние струйки, в свою очередь изгибающиеся и распадающиеся на мелкие капельки. Функция распределения отрывающихся капель по размерам будет еще более расширяться.

Распад струи на капли определяется неустойчивостью осесимметричных капиллярных волн с максимальным значением инкремента, который можно получить, найдя первую производную от γ (или от F) по k , приравняв ее нулю, и разрешая получившееся уравнение относительно k [21]. В итоге мы должны получить значение

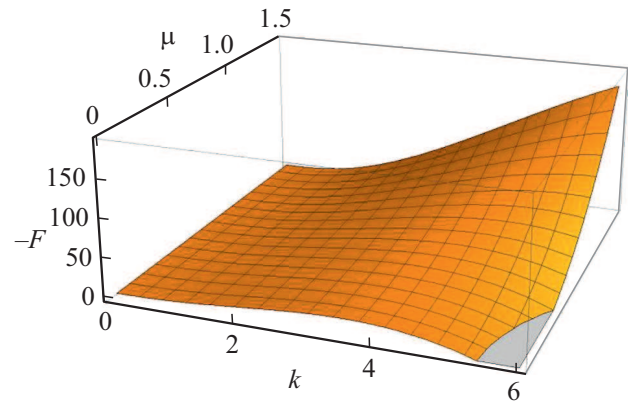


Рис. 2. Поверхность $-F(k, \mu)$, рассчитанная при $m = 0$, $\varepsilon_1 = 80$, $\varepsilon_2 = 1$, $\rho = 0.001$, $U = 73$.

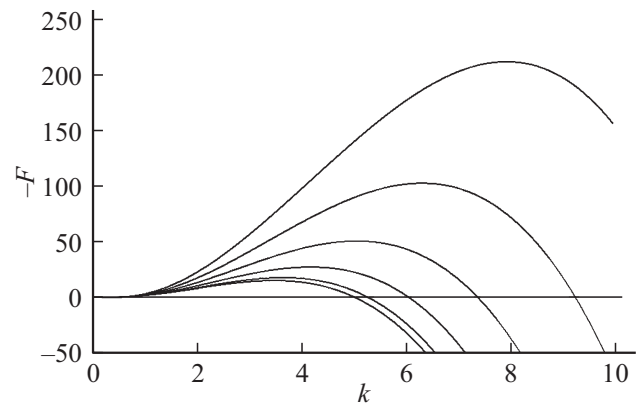


Рис. 3. Сечения поверхности $-F(k, \mu)$ плоскостями $\mu = 0$; 0.3; 0.6; 0.9; 1.2; 1.5. Здесь кривые расположены сверху вниз по мере убывания объемной плотности заряда.

волнового числа k_{\max} , соответствующее максимальному инкременту, подставляя которое в аналитическое выражение для инкремента, найдем его максимальную величину. Проблема в том, что уравнение $\frac{\partial F}{\partial k} = 0$ для нахождения k_{\max} весьма громоздко и трансцендентно (искомая переменная k_{\max} входит в аргумент нескольких цилиндрических функций) и аналитически не может быть разрешено. В нижеследующих рассуждениях мы попытаемся обойти это затруднение.

Отыскание зависимости величины максимального инкремента от волнового числа. Численные расчеты

В выражении (3) зафиксируем диэлектрические проницаемости, параметр m , безразмерную плотность и скорость: $\varepsilon_1 = 80$, $\varepsilon_2 = 1$, $m = 0$, $\rho = 0.001$, $U = 73$, и построим поверхность $-F(k, \mu)$ (рис. 2), величина которой в каждой точке фактически определяет квадрат инкремента в данной точке.

Далее возьмем сечения этой поверхности плоскостями, соответствующими значениям объемной плотности заряда $\mu = 0; 0.3; 0.6; 0.9; 1.2; 1.5$ (рис. 3). На этом рисунке кривые расположены сверху вниз по мере убывания объемной плотности заряда. Видно, что по мере увеличения объемной плотности заряда, положения максимумов кривых смещаются вверх и вправо (в сторону увеличения инкремента и соответствующего волнового числа).

Затем определим положения максимумов кривых на рис. 3 и, извлекая корни квадратные из значений ординат (напомним, что $-F$ представляет собой квадрат инкремента в той области, где $F < 0$), построим по полученным таким образом шести точкам, аппроксимируя сплайнами третьего порядка, кривую с помощью пакета аналитических вычислений типа Maple. Найденная таким образом кривая определит зависимость максимального инкремента от волнового числа.

Аналогичные манипуляции проведем для скоростей $U = 0; 25; 50$. Все полученные зависимости отобразим на рис. 4, *a*, где номера у кривых соответствуют скоростям: 1 — $U = 0$, 2 — $U = 25$, 3 — $U = 50$, 4 — $U = 73$. Видно, что с увеличением скорости струи величина инкремента осесимметричной моды слабо увеличивается.

Все это относится к осесимметричной моде ($m = 0$), отвечающей за разбиение струи на капли.

Теперь повторим все действия при тех же значениях физических величин для изгибной моды $m = 1$, и получим зависимости безразмерного инкремента ее неустойчивости от безразмерного же волнового числа, приведенные на рис. 4, *b*. Видно, что кривые почти сливаются. Кривая 4 проходит ниже остальных.

Следует отметить, что кривые 1–4 строились для диапазона объемных плотностей заряда от 0 до 1.5. Поэтому отдельные кривые кончаются при малых волновых числах. Чтобы они шли до $k = 8$, следовало увеличить диапазон изменения объемной плотности заряда. Но было выбрано единообразие.

На рис. 4, *c* приведены графики зависимости безразмерного инкремента $\gamma(k)$ изгибно-деформационной моды $m = 2$ от безразмерного волнового числа, построенные по той же методике. Из рис. 4, *b, c* видно, что с увеличением скорости струи величины инкрементов осесимметричных волн уменьшаются.

Комбинация инкрементов типа, приведенных на рис. 4, *b, c* с учетом вязкости жидкости (не рассматривавшейся в настоящей работе), обуславливает многообразие режимов электродиспергирования наблюдающихся в экспериментах [1—5].

Рассмотрение, проведенное в данном разделе, осуществлено при равных физических условиях (чтобы можно было сравнивать значения инкрементов) и критических значениях комбинации параметров μ и U .

Из рис. 4 видно, что с увеличением скорости для осесимметричной моды инкременты увеличиваются, а для

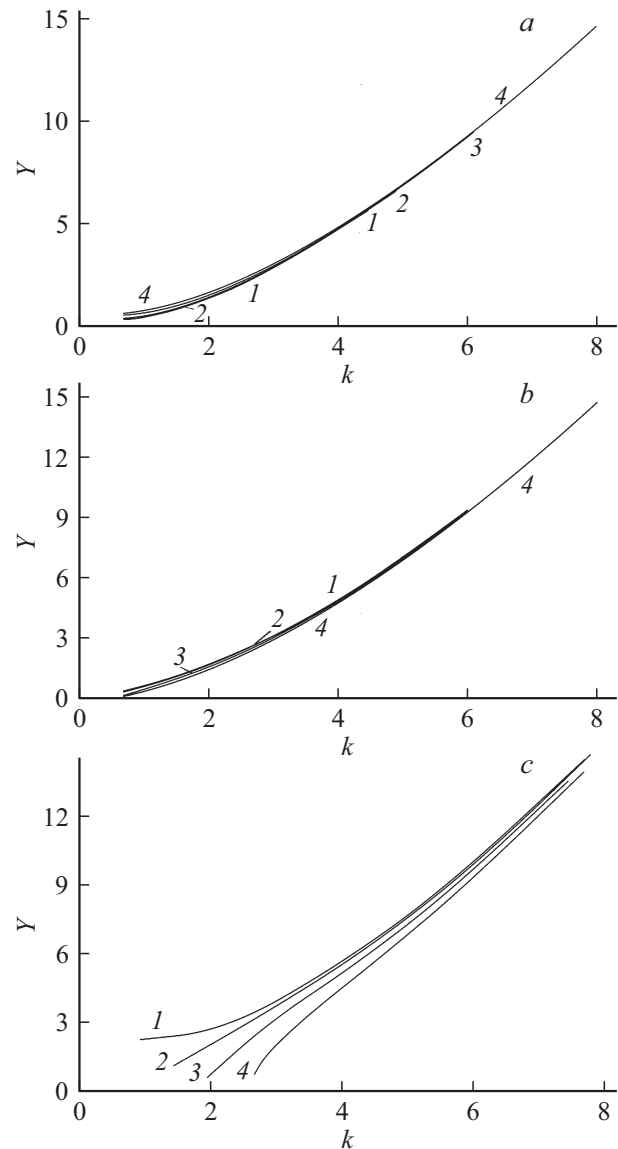


Рис. 4. Зависимость максимального инкремента от волнового числа. Номера у кривых соответствуют скоростям, U : 1 — 0, 2 — 25, 3 — 50, 4 — 73. *a* — осесимметричные волны ($m = 0$); *b* — изгибные волны ($m = 1$); *c* — изгибно-деформационные волны ($m = 2$).

осесимметричных мод с $m = 1$ и $m = 2$ — снижаются. Особенно наглядно это выглядит для $m = 2$.

В конце настоящей работы отметим, что азимутальный параметр m может принимать любые целочисленные положительные значения, и каждому m соответствует волна с некой симметрией. В настоящее время детально исследованы волны на цилиндрической струе с круговым поперечным сечением с $m = 0$. Значительно хуже исследованы волны с $m = 1$. Что касается волн с $m = 2$, то их только начали изучать (см. экспериментальные работы [2–4] и теоретические [14,15]). Волны с $m \geq 3$ пока не изучены совсем. Во всяком случае авторы настоящей работы не в курсе подобных исследований.

Заключение

В расчетах первого порядка малости по отношению амплитуды капиллярных волн к радиусу струи найдены соотношения величин инкрементов неустойчивости волн с различной симметрией. Найдено, что по мере увеличения объемного заряда сначала становятся неустойчивыми осесимметричные волны, а следом за ними претерпевают неустойчивость изгибные и изгибно-деформационные волны. Для волн с различной симметрией определены зависимости величины максимальных инкрементов от волновых чисел.

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

- [1] Macky W.A. // Proc. Roy. Soc. London. 1931. Vol. 133. N A822. P. 565–587.
- [2] Cloupeau M., Prunet Foch B. // J. Aerosol. Sci. 1994. Vol. 25. N 6. P. 1021–1035.
- [3] Jaworek A., Krupa A. // J. Aerosol. Sci. 1999. Vol. 30. N 7. P. 873–893.
- [4] Kim O.V., Dunn P.F. // Langmuir. 2010. Vol. 26. P. 15807–15813.
- [5] Ентов В.М., Ярин А.Л. // ВИНТИ. Итоги науки и техники. Сер. Механика жидкости и газа. 1984. Т. 17. С. 112–197.
- [6] Eggers J., Willermaux E. // Rep. Prog. Phys. 2008. Vol. 71. N 036601. P. 1–79.
- [7] Жакин А.И. // УФН. 2013. Т. 183. № 2. С. 153–177.
- [8] Shiryayeva S.O., Grigor'ev A.I. // Surf. Eng. Appl. Electrochem. 2014. Vol. 50. N 5. P. 395–404.
- [9] Fenn J.B., Mann M. et al. // Science. 1989. Vol. 246. N 4926. P. 64–71.
- [10] Huebner A., Chu H. // J. Fluid Mech. 1971. Vol. 49. N 2. P. 361–372.
- [11] Taylor G. // Proc. Roy. Soc. London. 1969. Vol. A313. P. 453–470.
- [12] Saville D. // Phys. Fluid. 1971. Vol. 14. N 6. P. 1095–1099.
- [13] Ширяева С.О. // ЖТФ. 2010. Т. 80. Вып. 4. С. 24–32.
- [14] Григорьев А.И. // ЖТФ. 2009. Т. 79. Вып. 4. С. 36–45.
- [15] Ширяева С.О. // ЖТФ. 2011. Т. 81. Вып. 6. С. 36–41.
- [16] Tonks L. // Phys. Rev. 1935. Vol. 48. P. 562–568.
- [17] Wilson C.T., Taylor G.I. // Proc. Cambridge Phil. Soc. 1925. Vol. 22. N 5. P. 728–730.
- [18] Зубарев Н.М. // Письма в ЖЭТФ. 2001. Т. 73. № 10. С. 613–617.
- [19] Френкель Я.И. // ЖЭТФ. 1936. Т. 6. № 4. С. 348–350.
- [20] Остроумов Г.А. Взаимодействие электрических и гидродинамических полей. М.: Наука, 1979. 320 с.
- [21] Левич В.Г. Физико-химическая гидродинамика. М.: Физматгиз, 1959. 700 с.
- [22] Strutt J.W. (Lord Rayleigh) // Proc. Roy. Soc. Lond. 1879. Vol. 290. P. 71–97.
- [23] Ширяева С.О., Григорьев А.И., Михеев Г.Е. // ЖТФ. 2017. Т. 87. Вып. 8. С. 1151–1158.