

01;11

Воздействие гармонического сигнала на генератор квазипериодических колебаний Анищенко—Астахова

© А.П. Кузнецов, Ю.В. Седова

Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН,
Саратов, Россия

E-mail: sedovayv@yandex.ru

Поступило в Редакцию 16 июня 2021 г.

В окончательной редакции 22 ноября 2021 г.

Принято к публикации 29 ноября 2021 г.

Рассматривается гармоническое воздействие на модифицированный генератор Анищенко—Астахова, способный демонстрировать в автономном режиме двухчастотные квазипериодические колебания. Показана возможность удвоения трехчастотных торов в неавтономной системе. Продемонстрирован эффект подавления хаоса внешним сигналом, приводящий не только к периодическим, но и к квазипериодическим режимам при превышении амплитудой воздействия некоторого порога.

Ключевые слова: удвоения тора, подавление хаоса, генератор квазипериодических колебаний.

DOI: 10.21883/PJTF.2022.04.52086.18925

Радиофизический генератор, предложенный Анищенко и Астаховым, может считаться одной из базовых моделей, демонстрирующей детерминированный хаос [1]. Он представляет собой трехмерную динамическую систему и хорошо изучен как теоретически, так и экспериментально (см. монографии [2,3] и ссылки в них). В работе [4] была предложена его модификация, которая обеспечивает не только периодические и хаотические режимы, но и автономные квазипериодические колебания. С этой целью используется колебательный контур в цепи обратной связи, что дает новую дополнительную частоту. В результате получается автономная четырехмерная модель, которая оказывается удобной для исследования квазипериодических колебаний. В [5] были проведены исследования такого генератора и показана возможность эффекта удвоения двухчастотного тора с ростом параметра возбуждения. Для двух связанных генераторов обсуждались проблема синхронизации резонансного предельного цикла на торе, возникновение резонансных двух- и трехчастотных торов на поверхности четырехчастотного тора, влияние шума на четырехчастотный тор и др. [5–7]. Исследовался вопрос о возникновении гиперхаоса в результате вторичной бифуркации Неймарка—Сакера [8,9]. В то же время воздействие гармонического сигнала на модифицированный генератор практически не изучалось. Однако эта задача представляется важной с позиций построения достаточно полной картины синхронизации квазипериодических колебаний.

Уравнения модифицированного генератора Анищенко—Астахова имеют вид [4]:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= mx + y - x\varphi - dx^3, \\ \dot{y} &= -x, \\ \dot{z} &= \varphi, \\ \dot{\varphi} &= -\gamma\varphi + \gamma\Phi(x) - gz, \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$\Phi(x) = I(x)x^2, \quad I(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases} \quad (2)$$

Здесь m — параметр возбуждения генератора, d — параметр нелинейной диссипации, γ — параметр затухания, g — параметр инерционности фильтра, обеспечивающего вторую независимую частоту. Будем использовать значения параметров $d = 0.001$, $\gamma = 0.2$, $g = 0.5$.

Добавим теперь внешнее гармоническое воздействие:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= mx + y - x\varphi - dx^3 + a \cos \omega t, \\ \dot{y} &= -x, \\ \dot{z} &= \varphi, \\ \dot{\varphi} &= -\gamma\varphi + \gamma\Phi(x) - gz, \end{aligned} \quad (3)$$

где a и ω — амплитуда и частота воздействия.

В этом случае с ростом параметра возбуждения m может наблюдаться удвоение, но уже не двухчастотного, а трехчастотного тора. Это утверждение иллюстрирует рис. 1. На вставках к этому рисунку показаны портреты аттракторов в двойном сечении Пуанкаре. Поясним технику построения такого сечения. Результатом обычного сечения Пуанкаре для системы, испытывающей внешнее гармоническое воздействие, является набор точек, получаемых в результате стробоскопического сечения. Для построения двойного сечения мы учитывали только те точки из упомянутого набора, которые попадают в некоторый тонкий слой фазового пространства, задаваемый, например, условием $|x| \leq 0.005$. Результат двойного сечения (т. е. стробоскопического сечения и сечения плоскостью $x = 0$) фазового пространства системы (3) представлен на рисунке. В двойном сечении трехчастотный тор выглядит как

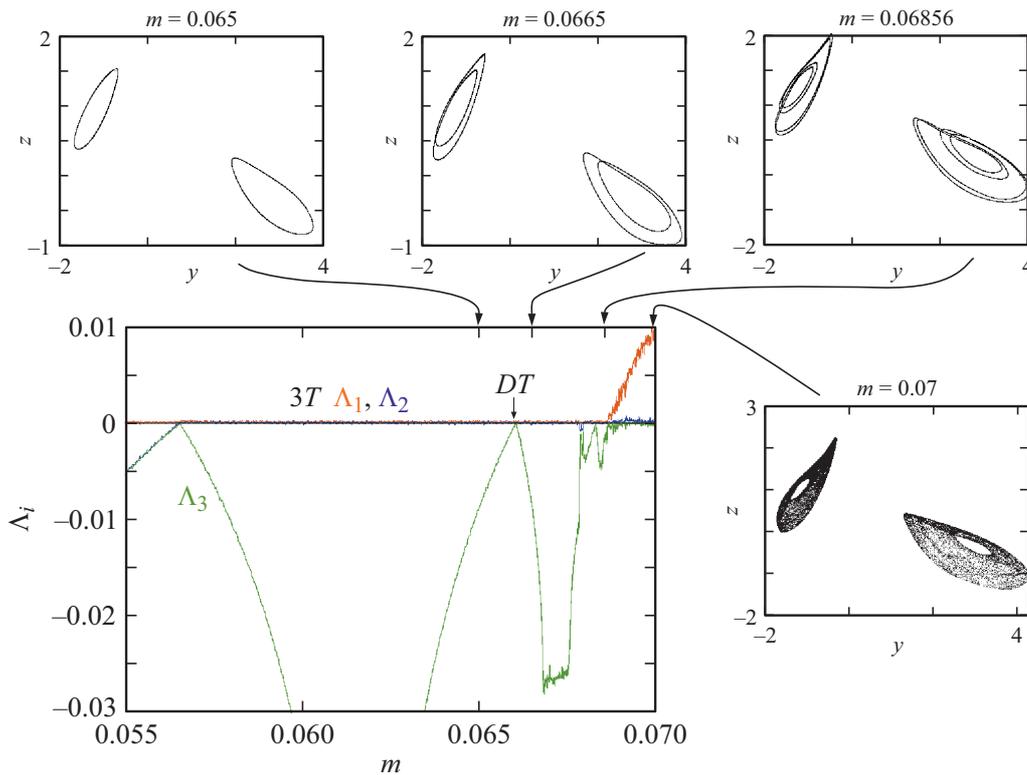


Рис. 1. Портреты в двойном сечении Пуанкаре трехчастотных торов $3T$ (на вставках) и графики показателей Ляпунова Λ_i системы (3) в зависимости от параметра возбуждения m . $a = 0.03$, $\omega = 4$. DT — точка удвоения трехчастотного тора.

два гладких овала. С ростом m в точке DT происходит удвоение такого тора, а затем наблюдается его разрушение.

На основной части рис. 1 показаны графики трех старших показателей Ляпунова системы (3) в зависимости от параметра возбуждения m . Отметим, что для потоковых систем один показатель всегда равен нулю. Мы же вычисляем показатели в стробоскопическом сечении, так что этот нулевой показатель оказывается отброшенным. Таким образом, трехчастотному тору отвечает равенство нулю двух показателей: $\Lambda_1 = \Lambda_2 = 0$ (аналогичная ситуация имеет место для дискретных отображений [10]). Представленные графики также подтверждают характер бифуркации: в ее точке график показателя Λ_3 обращается в нуль, оставаясь отрицательным в ее окрестности. Это признак бифуркации удвоения тора [11,12].

Рассмотрим теперь, как меняется поведение системы в зависимости от амплитуды воздействия a , если при $a = 0$ в системе наблюдается хаос. Зафиксируем значение параметра $m = 0.07$, когда тор разрушен. Графики показателей Ляпунова в зависимости от амплитуды воздействия a показаны на рис. 2. Можно видеть, что при малых амплитудах, как и следовало ожидать, реализуется хаотический или гиперхаотический режим с одним или двумя положительными показателями Ляпунова. При больших амплитудах, однако, возникает

периодический режим P , когда все показатели отрицательны. Таким образом, в системе возникает эффект подавления хаоса периодической внешней силой [13]. Два показателя Ляпунова при этом совпадают ($\Lambda_1 = \Lambda_2$) и в точке NS обращаются в нуль. Это точка бифуркации Неймарка–Сакера, в результате которой возникает двухчастотный квазипериодический режим $2T$, когда $\Lambda_1 = \Lambda_2 = 0$. На вставке к рис. 2 показан соответствующий аттрактор в стробоскопическом сечении, который представляет собой замкнутую инвариантную кривую. Таким образом, в данной системе за счет подавления хаоса возникает не только периодический режим типа описанного в [13], но и квазипериодический режим, который занимает обширную область по амплитуде воздействия. При дальнейшем уменьшении амплитуды воздействия тор удваивается, а затем разрушается.

На рис. 3 приведено бифуркационное дерево для $\omega = 6$. Можно видеть точку бифуркации Неймарка–Сакера NS и двухчастотный квазипериодический режим $2T$.

Таким образом, воздействие гармонического сигнала на квазипериодический генератор Анищенко–Астахова приводит к возможности новых эффектов. При малой амплитуде воздействия это удвоение трехчастотного тора, при большой — эффект подавления хаоса, приводящий не только к периодическому, но и к квазипериодическому режиму.

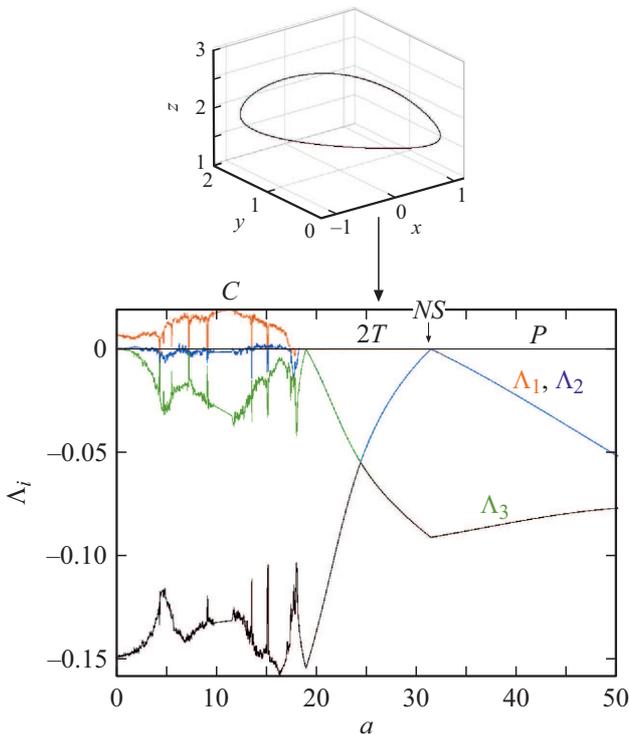


Рис. 2. Портрет в стробоскопическом сечении (на вставке) и графики показателей Ляпунова Λ_i системы (3). $m = 0.07$, $\omega = 6$. P — область периодических режимов, $2T$ — область двухчастотных торов, C — область хаоса, NS — точка бифуркации Неймарка–Сакера.

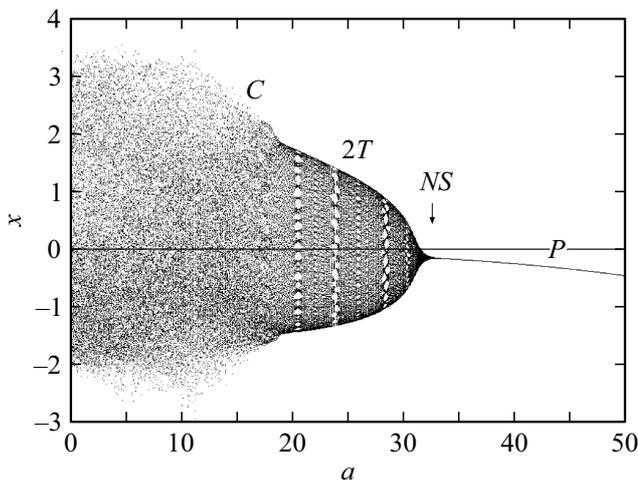


Рис. 3. Бифуркационное дерево системы (3), построенное с использованием стробоскопического отображения. $m = 0.07$, $\omega = 6$.

Финансирование работы

Работа поддержана грантом Российского научного фонда № 21-12-00121 (<https://rscf.ru/project/21-12-00121/>).

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

- [1] В.С. Анищенко, В.С. Астахов, Т.Е. Вадивасова, Изв. Саратов. ун-та. Новая серия. Сер. Физика, **5** (1), 54 (2005). DOI: 10.18500/1817-3020-2005-5-1-54-68
- [2] В.С. Анищенко, *Сложные колебания в простых системах. Механизмы возникновения, структура и свойства динамического хаоса в радиофизических системах* (URSS, М., 2009).
- [3] В.С. Анищенко, Т.Е. Вадивасова, *Лекции по нелинейной динамике* (НИИЦ „Регулярная и хаотическая динамика“, М.—Ижевск, 2011).
- [4] В.С. Анищенко, С.М. Николаев, Письма в ЖТФ, **31** (19), 88 (2005). [V.S. Anishchenko, S.M. Nikolaev, Tech. Phys. Lett., **31** (10), 853 (2005). DOI: 10.1134/1.2121837].
- [5] V. Anishchenko, S. Nikolaev, J. Kurths, Phys. Rev. E, **73** (5), 056202 (2006). DOI: 10.1103/PhysRevE.73.056202
- [6] V. Anishchenko, S. Nikolaev, J. Kurths, Phys. Rev. E, **76** (4), 046216 (2007). DOI: 10.1103/PhysRevE.76.046216
- [7] V.S. Anishchenko, S.M. Nikolaev, Int. J. Bifurcat. Chaos, **18** (09), 2733 (2008). DOI: 10.1142/S0218127408021956
- [8] N. Stankevich, A. Kuznetsov, E. Popova, E. Seleznev, Nonlinear Dyn., **97** (4), 2355 (2019). DOI: 10.1007/s11071-019-05132-0
- [9] I.R. Sataev, N.V. Stankevich, Chaos, **31** (2), 023140 (2021). DOI: 10.1063/5.0038878
- [10] A.P. Kuznetsov, Yu.V. Sedova, Int. J. Bifurcat. Chaos, **24** (07), 1430022 (2014). DOI: 10.1142/S0218127414300225
- [11] R. Vitolo, H. Broer, C. Simó, Regul. Chaot. Dyn., **16** (1-2), 154 (2011). DOI: 10.1134/S1560354711010060
- [12] А.П. Кузнецов, И.Р. Сатаев, Н.В. Станкевич, Л.В. Тюрюкина, *Физика квазипериодических колебаний* (Изд. центр „Наука“, Саратов, 2013).
- [13] A. Pikovsky, M. Rosenblum, J. Kurths, *Synchronization: a universal concept in nonlinear sciences* (Cambridge University Press, 2001).