

05

## Об обращении интегродифференциального оператора тонкой линейной наноантенны и дисперсионных силах

© М.В. Давидович

Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского,  
410012 Саратов, Россия  
e-mail: Davidovichmv@info.sgu.ru

Поступило в Редакцию 6 февраля 2022 г.  
В окончательной редакции 29 мая 2022 г.  
Принято к публикации 30 мая 2022 г.

Рассмотрены методы обращения интегро-дифференциальных операторов тонких линейных антенн, а также связанные с дисперсионным взаимодействием силы Казимира–Лифшица между двумя тонкими линейными объектами, описываемыми диэлектрической проницаемостью в форме Друде–Лоренца. Предложена новая строгая модель для вычисления сил Казимира–Лифшица для тонких диэлектрических или проводящих нитей, основанная на силе Лоренца. Для определения корреляций использованы формулы Г.Т. Маркова, флуктуационно-диссипационная теорема и принцип детального равновесия с тепловым полем. В дальней зоне выполнены аналитические оценки полученных спектральных интегралов.

**Ключевые слова:** наноантенны, уравнение Поклингтона, дисперсионные силы, силы Казимира–Лифшица, корреляции, флуктуационно-диссипационная теорема, диэлектрическая проницаемость, нанопроволоки, углеродные нанотрубки.

DOI: 10.21883/JTF.2022.10.53246.26-22

### Введение

Задача о линейной дипольной (вибраторной) антенне является классической, возникшей с начала развития электродинамики (Поклингтон, 1897, [1]). За девять лет до Поклингтона в 1988 г. Герц получил решение задачи о точечном диполе и предложил использовать проволочные антенны [2]. За более чем столетний период теория линейной вибраторной антенны прошла существенное развитие (Галлен, 1938, [3]; Леонтович и Левин, 1944, [4]; Капица, Фок и Вайнштейн, 1959, [5,7]; Вайнштейн, 1959–1967, [7–12]). Следует отметить, что и в последние годы к теории линейной вибраторной антенны проявляется существенный интерес и даже получены новые формы интегральных уравнений (ИУ) и интегро-дифференциальных уравнений (ИДУ) [13–27]. Так, в [26] рассмотрена формулировка относительно магнитного поля. В работе [25] рассмотрена форма, получаемая в обычных объемных ИУ методом выделения особенности и интегрирования по ее малой окрестности, т.е. путем сведения к интегралам в смысле главного значения по Коши. В этой же работе приведены ссылки на семь публикаций с 1991 по 2007 гг., где рассмотрены проволочные антенны, методы регуляризации их ядер и алгоритмы. В частности, интересны наноантенны с толщиной от одного до нескольких нанометров, выполненные из углеродных нанотрубок (УНТ), графеновых нанолент и нанопроволок [28–37]. Указанные структуры могут иметь высокий поверхностный импеданс [38,39], а из-за их относительно малых длин они интересны в ТНz- и ИК диапазонах [28–37]. Перспективно исследование взаимодействия как отдельных УНТ [40–43],

так и их массивов с электромагнитным полем, причем взаимодействие может быть как резонансным, так и нерезонансным при этом важны пондеромоторные силы [44]. Возбуждение таких антенн точечными (локализованными) источниками затруднено, но наноантенны из УНТ и графеновых нанолент можно сделать активными, например, путем оптической накачки [32–34,36,37,45]. Их возбуждение тепловым полем в широком диапазоне важно для дисперсионных сил, связанных с электромагнитными флуктуациями, при этом для определения корреляций нужна обращенная форма ИУ и ИДУ [46].

Обращение или построение обратного оператора — основная задача теории дифракции. Она рассмотрена в первой части работы. Дисперсионные силы между двумя наноантеннами рассмотрены во второй ее части. В третьей части приведены методы аналитических оценок интегралов, определяющих силы.

Под тонкими линейными антеннами будем понимать линейные диэлектрические, полупроводниковые и металлические цилиндрические структуры, поперечное сечение  $S = \pi a^2$  которых столь мало, что для всех рассматриваемых частот продольную компоненту электрического поля  $E_z(\mathbf{r}_\perp, z) = E_z(z) = \eta_0 \eta(\mathbf{r}_\perp) J_z(z)$  на них можно считать постоянной по сечению, а поперечным током поляризации можно пренебречь по сравнению с продольным. Здесь и далее  $\eta_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$ , а безразмерный удельный импеданс  $\eta(\mathbf{r}_\perp, \omega) = \eta = c/[i\omega(\epsilon(\omega) - 1)]$  мы считаем постоянным по сечению, т.е. описываем антенны с металлическими, полупроводниковыми и диэлектрическими свойствами постоянной по сечению макроскопической диэлектрической проницаемостью (ДП)  $\epsilon(\omega) = \epsilon'(\omega) - i\epsilon''(\omega)$ . Последнюю будем брать в форме

Друде–Лоренца:

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \sum_{m=1}^M \frac{\omega_{mP}^2}{\omega_{mre}^2 - \omega^2 + i\omega\omega_{mc}} - \frac{\omega_{0P}^2}{\omega^2 - i\omega\omega_{0c}}. \quad (1)$$

Обратное соотношение для плотности тока имеет вид  $J_z(z) = \sigma(\omega)E_z(0, z) = i\omega\varepsilon_0(\varepsilon(\omega) - 1)E_z(z)$ . Здесь мы выбрали начало координат на оси антенны,  $\sigma(\omega) = \sigma'(\omega) + i\sigma''(\omega)$  — удельная проводимость. Удобно ввести нормированные величины: поверхностную проводимость  $\xi = \xi' + i\xi'' = 2\pi a\eta_0\sigma$ , погонную (линейную) проводимость  $\zeta = \zeta' + i\zeta'' = \pi a^2\sigma$  и погонное сопротивление  $\xi = \xi' + i\xi'' = \zeta^{-1}$ . Заметим, что  $\zeta'|\xi|^2 = \xi'$ ,  $\xi'|\zeta|^2 = \zeta'$ . Для осевого тока  $I_z(z) = \pi a^2 J_z(z)$  связь приобретает вид  $I(z) = \zeta\eta_0^{-1}E(z)$  или  $E(z) = \xi\eta_0 I(z)$ . Индекс  $z$  мы опустили. Приведенные уравнения описывают различные структуры: УНТ с металлическим и полупроводниковым типом проводимости, металлические нанопроволоки, длинные линейные молекулы, тонкие полупроводниковые и диэлектрические цилиндры. Во всех случаях должно выполняться соотношение  $a \ll \lambda$  для всех длин волн, а также  $a \ll \delta(\omega)$  для всех глубин проникновения  $\delta$  (толщин скин-слоя). Именно в этом случае поперечными компонентами токов поляризации в антеннах можно пренебречь по сравнению с продольной компонентой  $J_z$ . Такие антенны, по сути, есть нити с осевым током  $I = \pi a^2 J_z(z)$ . При размере  $a$  порядка нанометров, макроскопическую ДП следует определять квантовыми методами [47]. Для УНТ эффективную ДП можно связать с ее продольной поверхностной проводимостью:  $\nu_{zz}(\omega) = 2i\pi k_0 a \eta_0^{-1}(\varepsilon(\omega) - 1)$ . Далее мы считаем ДП заданной.

На антенну, расположенную в области  $0 \leq z \leq L = 2l$ , могут действовать внешние поля (например, тепловое поле), возбуждающие в ней ток. В свою очередь, ток излучает дифракционное поле, создавая вектор-потенциал

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{z}_0 A_z(\mathbf{r}) = \mathbf{z}_0 \int_0^L G(\mathbf{r}_\tau, z - z') I(z') dz'. \quad (2)$$

Здесь скалярная функция Грина (ФГ) имеет вид  $G(\mathbf{r}_\tau, z - z') = (4\pi R)^{-1} \exp(-ik_0 R)$ ,  $R = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - z')^2}$ . С другой стороны, имеются представления ФГ [48]:

$$G(\mathbf{r}_\tau, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-i\mathbf{q}\mathbf{r}_\perp - ik_z z)}{(2\pi)^3 [q^2 + k^2 - k_0^2]} d^2 q dk. \quad (3)$$

$$G(\mathbf{r}_\tau, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-i\mathbf{q}\mathbf{r}_\perp - ik_z |z|)}{8\pi^2 i k_z} d^2 q. \quad (4)$$

Здесь  $d^2 q = dk_x dk_y$ ,  $k_z = \sqrt{k_0^2 - q^2}$ . Ток на антенне удовлетворяет ИДУ. Для его получения

учтем, что он создает дифракционное поле  $E_z^d(\mathbf{r}) = (i\omega\varepsilon_0)^{-1}(k_0^2 - \partial_z^2)A_z(\mathbf{r})$ . Полное поле на оси равно сумме падающего  $E_z = E$  и дифракционного полей и удовлетворяет импедансному условию  $E_z^{ful}(z) = \eta_0 \xi I(z) = E_z^d(z) + E(z)$ , откуда получаем

$$\eta_0 \xi I(z) - \frac{k_0^2 + \partial_z^2}{i\omega\varepsilon_0} \int_0^L G(a, z - z') I(z') dz' = E(z). \quad (5)$$

Это гиперсингулярное при  $a = 0$  интегральное уравнение (ИУ) может быть преобразовано в ИДУ. Мы его называем ИУ, поскольку оператор  $\partial_z^2$  действует на ядро, а в ИДУ он должен действовать на искомую функцию. Его можно записать в виде ИУ Фредгольма второго рода

$$I(z) - \kappa \int_0^L K(z - z') i(z') dz' = \eta_0^{-1} E(z). \quad (6)$$

Использование ФГ (3) приводит к  $\kappa = \zeta$  и к ядру

$$K(z - z') = \frac{1}{ik_0} \times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(k_0^2 - k^2) \exp(-ik(z - z'))}{(2\pi)^3 [q^2 + k^2 - k_0^2]} d^2 q dk. \quad (7)$$

Использование ФГ (4) приводит к ядру вида

$$K(z - z') = -\frac{1}{k_0} \int_0^{\infty} \frac{q^3 \exp(-ik(z - z'))}{4\pi k_z} dq. \quad (8)$$

В нем мы перешли к положительной области интегрирования и проинтегрировали по углу. При  $z = z'$  интегралы расходятся, т.е. ядра в (7) и (8) сингулярные. Обращение интегрального оператора в (6) означает получение решения в виде

$$I(z) = \eta_0^{-1} \int_0^L K^{-1}(z, z') E(z') dz'. \quad (9)$$

Здесь  $K^{-1}$  — некое безразмерное ядро обратного интегрального оператора. Обращение оператора важно для многих приложений, в частности, для определения теплового излучения антенн и определения дисперсионных сил [46].

## 1. Формы уравнений и их обращения

Рассмотрим вывод некоторых уравнений. Осевой линейный ток создает линейный (погонный) заряд  $\tau$  согласно уравнению непрерывности  $I'(z) + i\omega\tau(z) = 0$ . Соответственно также можно использовать функции  $\tau(z)$  или  $I'(z) = \partial_z I(z)$ . Обычный вывод уравнения Галлена заключается в представлении (5) в виде

$$(k_0^2 + \partial_z^2) A_z(z) = F(z). \quad (10)$$

Здесь  $F(z) = ik_0 [\xi I(z) - \eta_0^{-1} E(z)]$ . В частном случае  $\xi = 0$  суммарное падающее поле  $E$  (например, поле плоской волны) вместе с излученным полем (левая часть (10) с точностью до множителя) равно нулю. Уравнения Галлена получается как интеграл (10) из условия  $A_z(z) = A^+ \exp(-ik_0 z) + A^- \exp(ik_0 z) + \tilde{A}_z(z)$ , где  $\tilde{A}_z(z)$  — любое частное решение уравнения (10) в рассмотренной области, в частности

$$\tilde{A}_z(z) = (2ik_0)^{-1} \left[ \exp(-ik_0 z) \int_0^z F(z') \exp(ik_0 z') dz' + \exp(ik_0 z) \int_0^L F(z') \exp(-ik_0 z') dz' \right]. \quad (11)$$

Интегральное уравнение Галлена получим, представляя здесь вектор-потенциал в виде (2):

$$\int_0^L \left[ G(0, z - z') I(z') - \frac{\exp(-ik_0 |z - z'|)}{2ik_0} F(z') \right] dz' = A^+ \exp(-ik_0 z) + A^- \exp(ik_0 z). \quad (12)$$

Это неоднородное ИУ, поскольку, согласно (10), функция  $F$  зависит от тока, импеданса и внешнего возбуждающего поля. В нем ядро

$$G(0, z - z') = (4\pi |z - z'|)^{-1} \exp(-ik_0 |z - z'|)$$

сингулярное и может быть представлено как два слагаемых с особенностью типа Коши. Очевидно,  $K(z - z') = G(0, z - z')$ . Часто рассматривают уравнения Галлена и Поклингтона с конечным (ограниченным) ядром  $\tilde{G}(z - z') = \exp(-ik_0 R)/R$ , где  $R = \sqrt{(z - z')^2 + a^2}$  при  $k_0 a \ll 1$ , вводя малый радиус нити или малый параметр  $1/\ln(k_0 a)$ . Такое ядро также будем обозначать  $G(a, z - z')$ . Получение решения с ядром  $K(z - z')$  можно рассматривать как предельный переход в решении с ядром  $\tilde{G}(z - z')$ , в том числе и в уравнении (5). Если же заменить  $a^2$  на  $a^2 = \rho^2 - 2a\rho \cos(\varphi - \varphi')$  и рассматривать точку наблюдения и истока на поверхности цилиндра, то получим ИУ (5) Поклингтона с сингулярным ядром. Обычно при этом рассматривают идеальную проводимость. Оно двумерное, поэтому от угловой зависимости обычно избавляются (см. [4,5,13–24]), переходя к одномерному ИУ. Сингулярность ядра  $G(0, z - z')$  приводит к тому, что можно написать приближенное решение, поскольку максимальный вклад в интеграл вносит небольшая окрестность точки  $z$ . Оно наиболее удобно для симметричной антенны в системе координат относительно центральной точки  $s = z - l, -l \leq s \leq l$ . Считая вектор-

потенциал и  $F$  четными, имеем ИУ:

$$\int_{-l}^l \left[ K(s - s') I(s') - \frac{\exp(-ik_0 |s - s'|)}{2ik_0} F(s') \right] ds' = A \cos(k_0 s). \quad (13)$$

Здесь в функции  $I(s)$  координата отсчитывается от центра нити и в прежних обозначениях следует брать  $I(z - l)$ . Уравнение (13) можно записать в симметричном виде

$$\int_0^l \left\{ [K(s - s') + K(s + s')] I(s') - \frac{\exp(-ik_0 |s - s'|) + \exp(-ik_0 |s + s'|)}{2ik_0} F(s') \right\} ds' = A \cos(k_0 s),$$

из которого сразу видна четность по  $s$ . Сингулярность ядра позволяет выполнить частичное обращение оператора. ИУ (13) запишем в форме

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\text{sgn}(u - u') \exp(-ik_0 l |u - u'|) I(u'l)}{u - u'} du' = f(u) = \frac{4A \cos(k_0 l u)}{l} + 2 \int_{-1}^1 \frac{\exp(-ik_0 l |u - u'|)}{ik_0} F(u'l) du'.$$

Его можно представить в виде

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\exp(\pm ik_0 l u') I(u'l)}{u - u'} du' = f_{\pm}(u) = \frac{\exp(\pm 2ik_0 l u)}{\pi} = \int_{-1}^1 \frac{\exp(\mp ik_0 l u') I(u'l)}{u - u'} du' \pm \exp(\pm 2ik_0 l u) f(u) \quad (14)$$

и в виде

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\exp(\pm ik_0 l u') I(u'l)}{u - u'} du' = f_2(u) = \frac{\exp(-2ik_0 l u)}{\pi} = \int_{-1}^1 \frac{\exp(ik_0 l u') I(u'l)}{u - u'} du' - \exp(-ik_0 l u) f(u). \quad (15)$$

Обращая интеграл Коши (см. [49]) слева в (14), имеем

$$\exp(\pm ik_0 s) = - \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1 - u'^2} f_{\pm}(u')}{u - u'} du' + \frac{c_1}{\sqrt{1 - u^2}}.$$

В этих уравнениях  $u = s/l$ , и в них входят две константы интегрирования. Поскольку их правые части зависят от тока, эти уравнения не очень удобны. Однако их можно решать итерационно, взяв в качестве первого приближения распределение тока в виде  $I(s) = I_0 \sin(k_0(l - |s|))$  [50]. Неизвестные константы определяются из условий  $I(0) = I_0, I(\pm l) = 0$ .

Вывод ИУ Галлена есть не что иное, как интегрирование соотношения (10) по точке наблюдения, при этом вводятся две константы интегрирования. Как видим, оно не приводит к полному обращению. Можно непосредственно интегрировать уравнение (10) по точке наблюдения без введения констант интегрирования:

$$A'_z(z) = A'_z(0) + \int_0^z [F(z') - k_0^2 A_z(z')] dz', \quad (16)$$

$$A_z(z) = A_z(0) + \int_0^z A'_z(z') dz' = A_z(0) + A'_z(0)z + \int_0^z K(z - z') I(z') dz'. \quad (17)$$

Это ИУ Вольтерры второго рода фактически содержит две константы интегрирования — значение вектор-потенциала и его производной в нуле, входящие во внеинтегральный член. Оно также неудобно, поскольку содержит кратные интегралы. ИУ (6) можно решать итерационно, но параметр перед интегралом может быть большим. При численном интегрировании с ядром Галлена  $\tilde{K}(z - z')$  не обращающаяся в нуль величина  $R = \sqrt{(z - z')^2 + a^2}$  при использовании базисных функций создает большие диагональные члены, и обращение матриц происходит с хорошей точностью (саморегуляризация).

Другой способ преобразования ИУ состоит в следующем приеме. Имеем

$$(\partial/\partial z)K(z - z') = -(\partial/\partial z)K(z - z').$$

Внося оператор  $\partial_z$  под интеграл в (5), перенося его действие на координату точки истока и интегрируя по частям, имеем

$$\eta_0 \xi I(z) - \frac{k_0^2}{i\omega\epsilon_0} \int_0^L \tilde{K}(z - z') I(z') dz' - \frac{\partial_z}{i\omega\epsilon_0} \times \int_0^L [\tilde{K}(z - z') I'(z')] dz' = E(z). \quad (18)$$

Это ИДУ Фредгольма второго рода в литературе называется часто ИУ Харрингтона [51,52]. Оно и близкое к нему ИУ Ричмонда [52] рассматривалось в основном при  $\xi = 0$ , т.е. как уравнения Фредгольма первого рода.

Здесь взято конечное ядро, поскольку ядро в ИУ (5) при  $a \rightarrow 0$  становится гиперсингулярным. Исчезновение констант интегрирования в (18) связано с наложением условий  $I(0) = 0, I(L) = 0$ . При решении ИУ (18) эти естественные условия налагать следует. Еще один перенос  $\partial_z$  и интегрирование по частям приводят к ИДУ

$$I(z) + ik_0 \varsigma \int_0^L \tilde{K}(z - z') I(z') dz' + \frac{i\varsigma}{k_0} \int_0^L [\tilde{K}(z - z') I''(z')] dz' = \eta_0^{-1} \varsigma E(z) + \varsigma \frac{\tilde{K}(z) I'(0) - \tilde{K}(z - L) I'(L)}{ik_0}. \quad (19)$$

Здесь, налагая условия  $I(0) = 0, I(L) = 0$ , можно определить константы  $I'(0)$  и  $I'(L)$ .

Уравнение Поклингтона (5) с ядром  $\tilde{K}$  при идеальной проводимости  $\xi = 0$  в работе [4] обращалось методом разложения по малому параметру  $\psi = 1/(2 \ln(k_0 a))$  (приближение большого логарифма). При этом от поверхностной плотности тока авторы перешли к линейному току, проинтегрировав по углу. В первом порядке по  $\psi$  формула обращения имеет аналогичный (9) симметричный вид

$$I(s) = \eta_0^{-1} \int_{-l}^l K_{k_0}^{-1}(s, s') E(s') ds' \quad (20)$$

с ядром [4]

$$K_{k_0}^{-1}(s, s') = \frac{i\psi}{2 \sin(2k_0 l)} [\cos(k_0(s + s')) - \cos(2k_0 l - k_0|s - s'|)]. \quad (21)$$

В случае резонанса  $2k_0 l = n\pi$  она не работает. В этом случае приближенное решение есть  $I(s) = I_0 \cos(k_0 s)$  при  $n$  нечетном и  $I(s) = I_0 \sin(k_0 s)$  при  $n$  четном. В [4] получено интегро-дифференциальное уравнение  $I''(s) + k_0^2 I(s) = ik_0 \eta_0^{-1} \psi [E(s) + \hat{G}(I, s)]$ , где  $\hat{G}(I, s)$  — интегральный оператор, поэтому амплитуда тока в резонансном случае определяется из условия ортогональности решения правой части этого уравнения. Для вывода ИДУ использовано представление вектор-потенциала  $A_z(\rho, z) = -2I(z) \ln(k_0 \rho) + V(I, z)$ , где  $V(I, z)$  — введенный в [4] интегральный оператор:

$$V(I, z) = \int_{-l}^l \ln(2k_0|z - z'|) \exp(-ik_0|z - z'|) [ik_0 I(z') + \text{sgn}(z - z') I'(z')] dz'.$$

Ядро этого оператора сингулярное, и уже первая его производная  $\partial_z V(I, z)$  не существует в обычном смысле. Поэтому для вычисления производных следует взять этот оператор в виде

$$V(I, z) = \int_{-l}^l \ln(2k_0 R) \exp(-ik_0 R) [ik_0 I(z') + \operatorname{sgn}(z - z') I'(z')] dz'.$$

В окончательных результатах (там, где возможно) будем переходить к пределу  $a \rightarrow 0$ . Аналогично для вектор-потенциала в области нити можно взять  $A_z(z) = A_z(a, z)$ . Усредняя  $A_z(\rho, z)$  по сечению нити, получаем первый член в виде  $-2I(z)(\ln(k_0 a) - 1/2)$ , что просто немного увеличивает большое отрицательное значение логарифма. Интегрируя по частям, имеем

$$V(I, z) = -2 \ln(2k_0 a) I(z) - \int_{-l}^l \frac{\exp(-ik_0 R)}{R} I(z') dz'.$$

Записывая импедансное условие для полного поля, получим

$$I''(z) + \left(k_0^2 + \frac{i\xi k_0}{2 \ln(k_0 a)}\right) I(z) - \frac{V_z''(I, z) + k_0^2 V(I, z)}{2 \ln(k_0 a)} = \frac{ik_0 \eta_0^{-1} E(z)}{2 \ln(k_0 a)}. \quad (22)$$

или

$$I''(z) + \left(k_0^2 + \frac{i\xi k_0}{4 \ln(k_0 a)}\right) I(z) = \frac{ik_0 \eta_0^{-1} E(z) - F(z)}{4 \ln(k_0 a)} - \frac{1}{4 \ln(k_0 a)} \int_{-l}^l \frac{\exp(-ik_0 R)}{R} [I''(z') + k_0^2 I(z')] dz' = ik_0 \chi U(z), \quad (23)$$

где обозначены первая и вторая производные тока (20) и функция

$$F(z) = \frac{\exp(ik_0(l-z))}{\sqrt{a^2 + (l-z)^2}} I'(l) + \frac{\exp(-ik_0(z+l))}{\sqrt{a^2 + (l+z)^2}} I'(-l).$$

Обозначая  $k^2 = k_0^2 + i\xi k_0 \psi / 2$ , получим обращенную форму ИДУ в виде

$$I(s) = \int_{-l}^l K_k^{-1}(s, s') U(s') ds'. \quad (24)$$

Ядро в (24) взято при замене  $k_0$  на комплексный параметр  $k$ . Однако это также неполное обращение, поскольку в функцию  $U$  входит интегро-дифференциальный оператор. Учитывая, что при малом радиусе провода

$I''(s) + k_0^2 I(s) \approx -i\xi k_0 \psi I(z) / 2$ , получаем интегральный оператор с функцией

$$U(s) = \frac{\eta_0^{-1} E(s) + iF(s)/k_0}{2} + \xi \psi \int_{-l}^l \frac{\exp(-ik_0 R)}{4R} I(s') ds'. \quad (25)$$

И только если взять

$$U(s) \approx U_0(s) = [\eta_0^{-1} E(s) + iF(s)/k_0] / 2,$$

получаем замкнутое приближенное обращение. Однако если его рассматривать как нулевое приближение  $I_0(s)$  и определить функцию (25) в первом приближении путем его подстановки, то получим первое приближение для тока. Очевидно, можно строить итерационный процесс

$$I_n(s) = \int_{-l}^l K_k^{-1}(s, s') U(s') ds', \quad (26)$$

$$U_n(s) = \frac{\eta_0^{-1} E(s) + iF(s)/k_0}{2} + \xi \psi \int_{-l}^l \frac{\exp(-ik_0 R)}{4R} I_{n-1}(s') ds'. \quad (27)$$

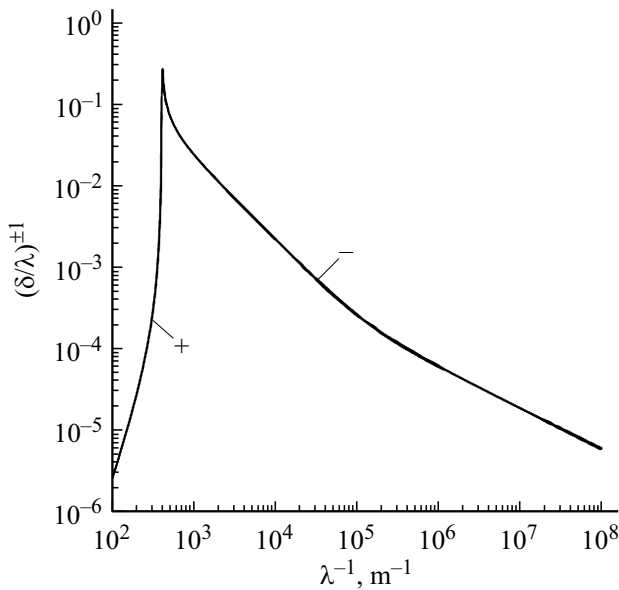
Однако ток (24) можно представить по-другому:

$$I(s) = I_0(s) + \frac{\xi \psi}{4} \int_{-l}^l \int_{-l}^l K_k^{-1}(s, s') \times \frac{\exp(-ik_0 R(s', s''))}{R(s', s'')} I(z') ds'' ds' \quad (28)$$

и непосредственно использовать для этого ИУ интеграционный процесс. Если параметр  $\xi \psi / 4$  (нормированный импеданс) мал, ряд теории возмущений может сходиться быстро.

Поскольку ИУ (28) также приближенное, а использованный в [4] метод не позволяет точно перейти от ИДУ к ИУ типа Фредгольма второго рода, подобные интеграционные процессы обычно не используют, и решают уравнения численно. Заметим, что уравнение (18) есть следствие уравнения для компоненты электрического поля  $E_z(z) = -i\omega\mu_0 A_z(z) - \partial_z \Phi(z)$  (см., например, [48]) при учете того, что скалярный потенциал  $\Phi$  определен из уравнения  $\partial_z A_z(z) + i\omega\epsilon_0 \Phi(z) = 0$ . Налагая импедансное условие, имеем  $\eta \xi I(z) = -i\omega\mu_0 A_z(z) - \partial_z \Phi(z)$ . Записывая теперь вектор-потенциал через ток в форме (2), а скалярный потенциал через погонный заряд  $\tau(z) = iI'(z)/\omega$  в форме

$$\Phi(z) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^L G(z - z') \tau(z') dz',$$



Нормированная глубина проникновения в серебро (+) и обратная ее величина (-) в зависимости от обратной длины волны.

получим указанное уравнение. Численное обращение уравнений (18), (19) возможно также методом нахождения экстремума квадратичных функционалов. Для этого умножим эти уравнения на  $I^*(z)$  и проинтегрируем, перенесем все результаты интегрирования вправо и обозначим их как функционал  $W(I^*, I)$ . При этом второй интеграл в (18) можно преобразовать так:

$$\int_0^L I^*(z) \partial_z \int_0^L [\tilde{K}(z - z') I'(z')] dz' dz = - \int_0^L \int_0^L I'^*(z) [\tilde{K}(z - z') I'(z')] dz' dz,$$

т.е. использовать менее сингулярное ядро. Такую же процедуру можно применить и к исходному уравнению (5), интегрируя его с  $I^*(z)$  и перенося на эту величину действие оператора  $\partial_z^2$ . В этом случае численная реализация требует дважды дифференцируемых базисных функций. Можно использовать и  $I(z)$ . Из-за комплексных уравнений при выборе действительных базисных функций  $u_\alpha(z)$  с коэффициентами  $\alpha_n$ , нахождение экстремума сводится к условиям  $(\partial/\partial\alpha_n)W(I^*, I) = 0$  для билинейного функционала. Они приводят к той же системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)  $(\partial/\partial\alpha_n)W(I, I) = 0$ , что и для квадратичного функционала.

Для линейной антенны естественной системой функций, удовлетворяющих граничным условиям, являются тригонометрические функции  $u_n(z) = \sin(n\pi z/L)$ . Исследованию сходимости с ними посвящено значитель-

ное количество работ [7–12]. Использование ядра, в которое входит  $R$ , при этом неудобно. Использование гиперсингулярных ядер (7), (8) также неудобно. В работах [13–27] использовано поверхностное сингулярное ИУ. Его ядро преобразовано с учетом того, что точки истока и наблюдения находятся на поверхности цилиндра. При этом даже возможно частичное обращение оператора [16–18,22]. Подобные уравнения применимы при сильном скин-эффекте, когда  $\delta \ll a$ . Это соответствует достаточно толстому проводу для обычных антенн, используемых в радиотехническом диапазоне. В случае короткой нерезонансной антенны на низких частотах скин-эффект слабый, а глубина проникновения большая, существенно превышающая  $a$ . В случае очень высоких частот глубина проникновения также может быть существенно больше  $a$ . Зависимость нормированной величины  $(\delta/\lambda)^{\pm 1}$  от обратной длины волны  $\lambda^{-1}$  для серебра приведена на рисунке. Левая кривая „+“ соответствует нормированной глубине проникновения  $\delta/\lambda$  а правая „-“ — ее обратной величине  $\lambda/\delta$ . Для всех частот не превышает 200 nm, причем минимум широкий и лежит в диапазоне длин волн от 5 μm до 1 mm. Для других веществ она еще больше. Поэтому для радиуса  $a$  порядка десятков нанометров и менее распределение тока равномерное. Для более толстых нитей при  $\delta(\omega) \ll a$  можно взять погонную проводимость  $\zeta(\omega) = 2\pi i k_0 (\epsilon(\omega) - 1) \delta(\omega) a$ . Взяв ФГ в цилиндрических координатах в виде (2.17) из [48], подставив в ИУ (5) линейный ток и учтя азимутальную независимость, получим ядро

$$K(\rho, \rho', z - z') = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{(k_0^2 - k_z^2) J_0(k\rho) J_0(k\rho') \exp(-ik_z(z - z'))}{4\pi^2 i k_0 [\kappa^2 + k_z^2 - k_0^2]} k dk dk_z. \tag{29}$$

Поскольку для  $\kappa^2 \leq k_0^2/a^2$  функция Бесселя изменяется слабо и  $J_0(k\rho) \approx 1$ , получим усредненное ядро, проинтегрировав его по сечению и разделив на  $\pi a^2$ . Можно усреднять как по точке истока в поперечном сечении, так и по точке истока и наблюдения. В первом случае ядро и поле зависят от  $\rho$ . Очевидно, результат усреднения сводится к замене  $J_0(k\rho) \rightarrow 2J_1(ka)/(ka)$ . Такое ядро обозначим  $\tilde{K}(\rho, a, z - z')$ . Двойное усреднение дает замену  $J_0(k\rho) J_0(k\rho') \rightarrow 4J_1^2(ka)/(ka)^2$ . Соответствующее ядро обозначим  $\tilde{K}(a, z - z')$ . Для этих ядер следует определить интегральный по сечению ток  $I(z) = \pi a^2 J_z(z)$ :

$$I(z) = \int_0^a \int_0^{2\pi} J(k\rho) J_z(z) \rho d\rho d\phi \approx \pi a^2 J_z(z).$$

Полагая  $\rho = 0$ , получим

$$\begin{aligned} & \tilde{K}(a, z - z') \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{(k_0^2 - k_z^2) J_1(\kappa a) \exp(-ik_z(z - z'))}{2\pi^2 i k_0 a [\kappa^2 + k_z^2 - k_0^2]} dk dk_z. \end{aligned} \quad (30)$$

Интегрированием методом вычетов (29) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} & K(\rho, \rho', z - z') \\ &= - \int_0^{\infty} \frac{J_0(\kappa \rho) J_0(\kappa \rho') \exp(-ik_z |z - z'|)}{4\pi k_0 k_z} \kappa^2 dk. \end{aligned} \quad (31)$$

Аналогично преобразуются усредненные ядра. Здесь уже  $k_z = \sqrt{k_0^2 - \kappa^2}$  не является независимой переменной, и при  $k_0^2 < \kappa^2$  ее следует брать в виде  $k_z = -i\sqrt{\kappa^2 - k_0^2}$ , что соответствует эванесцентным (затухающим) вдоль оси плазмонам. ИУ с ядром  $\tilde{K}(\rho, a, z - z')$  определяет дифракционную компоненту  $E_z(\rho, z)$ . Она слабо зависит от  $\rho$ , а ее значение на оси определяется ИУ с ядром  $\tilde{\tilde{K}}$ . Эти ядра можно усреднить по сечению и получить для (31) представления

$$\begin{aligned} & \tilde{K}(a, z - z') = - \int_0^{\infty} \frac{J_1(\kappa a) \exp(-ik_z |z - z'|)}{2\pi a k_0 k_z} \kappa^2 dk, \\ & \tilde{\tilde{K}}(a, z - z') = - \int_0^{\infty} \frac{J_1^2(\kappa a) \exp(-ik_z |z - z'|)}{k_0 k_z} \kappa dk, \end{aligned} \quad (32)$$

Здесь в первом ядре усреднение произведено по точке наблюдения, а во втором — по точке наблюдения и точке истока. При больших аргументах подынтегральная функция в (32) убывает как  $\kappa^{-1} \exp(-\kappa |z - z'|)$ , а для ядра  $\tilde{K}$  имеет зависимость  $\kappa^{-1/2} \exp(-\kappa |z - z'|) \cos(\kappa a)$ . Отметим, что полученные в ряде работ [5,13,16,17] ядра для идеально проводящих цилиндров не соответствуют нашему случаю распределения тока по сечению. Переходя к пределу  $a \rightarrow 0$ , получаем ядро (8). Хотя интегрировать по  $z$  с ядром типа (29) проще, далее используем ядро  $\tilde{K}$ , в котором положим  $\rho = 0$  и обозначим  $k_z = \gamma$ . Обозначим также  $k_n = n\pi/L = nk$ ,  $k = \pi/L$  и вычислим интеграл

$$\begin{aligned} & \tilde{I}_n(z) = \int_0^L \sin(k_n z) \exp(-i\gamma |z - z'|) dz' = \exp(-i\gamma z) \\ & \times \int_0^z \sin(k_n z') \exp(-i\gamma z') dz' + \exp(i\gamma z) \int_z^L \sin(k_n z') \\ & \times \exp(-i\gamma z') dz'. \end{aligned}$$

Он равен

$$\begin{aligned} & \tilde{I}_n(z) = -i \sin(k_n z) \frac{2\gamma}{(\gamma^2 - k_n^2)} \\ & + \frac{k_n [\exp(i\gamma z) (-1)^n \exp(-i\gamma L) - \exp(-i\gamma z)]}{(\gamma^2 - k_n^2)}. \end{aligned}$$

Для образования матричного элемента следует проинтегрировать эту величину с функций  $\sin(k_m z)$ :

$$\begin{aligned} & \tilde{I}_{mn}(\gamma) = \int_0^L \tilde{I}_n(z) \sin(k_m z) dz = -i \frac{\gamma \delta_{mn} L}{(\gamma^2 - k_n^2)} \\ & + k_m k_n \frac{1 + (-1)^{m+n} - [(-1)^n + (-1)^m] \exp(-i\gamma L)}{(\gamma^2 - k_m^2)(\gamma^2 - k_n^2)}. \end{aligned} \quad (33)$$

В (33) выделится большой при  $\gamma^2 \approx k_n^2$  диагональный член  $\tilde{I}_{nn}^0(\gamma) = -i\gamma L / (\gamma^2 - k_n^2)$ . СЛАУ имеет вид

$$\alpha_m - \frac{2\zeta}{L} \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq m}}^{\infty} A_{mn} \alpha_n = E_n,$$

$$E_m = \frac{2\zeta}{\eta_0 L} \int_0^L E(z) \sin(k_m z) dz, \quad m = 1, 2, \dots \quad (34)$$

В ней матричные элементы  $A_{mn}$  безразмерные, коэффициент  $2\zeta/L$  также безразмерный, а коэффициенты  $\alpha_n$  и  $E_m$  имеют размерность тока (А). Матричные элементы имеют вид

$$A_{mn} = -\frac{1}{2\pi k_0 a} \int_0^{\infty} \frac{\tilde{I}_{mn}(\gamma) J_1(\kappa a)}{\gamma} \kappa dk. \quad (35)$$

При больших  $\kappa$  имеем

$$\gamma \approx -i\kappa, \quad J_1(\kappa a) \approx \sqrt{2/(\kappa a)} \sin(\kappa a - \pi/4),$$

при  $m \neq n$  недиагональные элементы  $\tilde{I}_{mn}(\gamma) \sim 1/\gamma^4$ , и интегралы (35) хорошо сходятся. При больших  $\kappa$  также имеем

$$\tilde{I}_{nn} = \tilde{I}_{nn}^0(\gamma) + 2k_n^2 / (\gamma^2 - k_n^2)^2.$$

Второй член здесь мал и пропорционален  $\kappa^{-4}$ . В случае  $\gamma^2 = k_n^2$  имеем  $\exp(-i\gamma L) = (-1)^n$ , и в (35) получаем неопределенность 0/0. Раскрывая ее по Лопиталю, имеем вклад  $ik_n L / (\gamma^2 - k_n^2) / 2$  от второго слагаемого в (35) при  $n = m$ , т.е. в этом случае  $\tilde{I}_{nn} = \tilde{I}_{nn}^0(\gamma) / 2$ . Если же совпадения  $\gamma^2 = k_n^2$  или  $\gamma^2 = k_m^2$  происходят в недиагональном члене, то раскрытие неопределенности дает конечный член. Например, при  $\gamma^2 = k_n^2$  это  $ik_m L [1 + (-1)^{m+n}] / (2k_n^2 - 2k_m^2)$ . Отдельного рассмотрения требует выделенный элемент

$\tilde{I}_{mn}^0(\gamma) = -i\gamma L/(\gamma^2 - k_n^2)$ . Для него

$$A_{mn}^0 = -\frac{iL}{2\pi k_0 a} \int_0^\infty J_1(\kappa a) d\kappa - \frac{iL(k_0^2 - k_n^2)}{2\pi k_0 a} \int_0^\infty \frac{J_1(\kappa a)}{\kappa^2 + k_n^2 - k_0^2} d\kappa.$$

Первый интеграл от функции Бесселя равен  $1/a$ . Обозначаем  $\kappa_n = \sqrt{k_0^2 - k_n^2}$  и представим второй интеграл так:

$$\frac{1}{2\kappa_n} \int_0^\infty \left[ \frac{J_1(\kappa a)}{(\kappa - \kappa_n)} - \frac{J_1(\kappa a)}{(\kappa + \kappa_n)} \right] d\kappa.$$

Если  $k_0^2 < k_n^2$ , то полюса на оси нет, и интегралы вычисляются. Если  $k_0^2 > k_n^2$ , то в первом интеграле возникает полюс. Интеграл понимаем в смысле главного значения, т. е.

$$\frac{1}{2\kappa_n} \int_0^\infty \left[ \frac{J_1(\kappa a) - J_1(\kappa_n a)}{(\kappa - \kappa_n)} - \frac{J_1(\kappa a) - J_1(\kappa_n a)}{(\kappa + \kappa_n)} \right] d\kappa.$$

При резонансе  $\kappa_n = 0$  или  $k_0^2 = k_n^2$  интеграл логарифмически расходится в нуле. Это есть следствие гиперсингулярности ядра в (5). При резонансе в случае идеальной проводимости решение задачи дается функцией  $I(z) = I_0 \sin(k_n z)$ . При конечном импедансе это не так, поэтому выход из ситуации состоит в обрезании интеграла. Можно использовать малую отрицательную мнимую добавку к  $k_0^2$ , что соответствует введению малой диссипации в среду. Такая добавка подразумевается при определении функции Грина. Возникающий большой матричный элемент приводит к решению  $\alpha_n \approx -LE_m/(2\zeta A_{mn})$ ,  $\alpha_m \approx 0$ ,  $m \neq n$ . При численном вычислении матричных элементов можно использовать большой верхний предел  $1/a$ . Отметим, что использование ядра  $\tilde{K}$  не приводит к сингулярностям и сразу дает сходящийся результат. Выделим диагональный член целиком, записав систему уравнений в виде

$$\alpha_m = e_m + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq m}}^\infty B_{mn} \alpha_n, \quad m = 1, 2, \dots \quad (36)$$

Здесь столбец свободных членов и матричные элементы имеют вид  $e_m = LE_m/(L - 2\zeta A_{mm})$ ,  $B_{mn} = 2\zeta A_{mn}/(L - 2\zeta A_{mm})$ ,  $m \neq n$ ,  $B_{mm} = 0$ . Эту бесконечную СЛАУ можно обрезать, решая систему с не очень большим числом неизвестных. Решение получаем в виде  $I(z) = \alpha_1 \sin(kz) + \alpha_2 \sin(2kz) + \alpha_3 \sin(3kz) + \dots$ . После обращения конечной системы можно решать систему итерационно, находя любое необходимое число членов. Для длинной антенны имеем приближенное решение  $\alpha_m = E_m$ . Для такой антенны условия на концах

не существенны, а решение следует искать в виде разложения в интеграл Фурье. Фактически полученное решение означает  $I(\gamma) = \eta_0^{-1} \zeta E(\gamma)$ .

Гиперсингулярность ядра привела к ряду трудностей обращения ИУ типа (5). Более удобно ИДУ типа Харрингтона (18). В нем ядра одинаковые и одинаковые базисные функции разложения тока и его второй производной. При этом

$$I''(z) = -\sum_{n=1} k_n^2 \alpha_n \sin(k_n z), \quad I'(0) = -\sum_{n=1} k_n \alpha_n, \\ I'(L) = \sum_{n=1} (-1)^n k_n \alpha_n. \quad (37)$$

Соотношения (37) для первых производных не являются дополнительными условиями, поскольку их значения неизвестны. Удобно использовать спектральное представление ядра:

$$K(a, z - z') = \int_0^\infty \frac{J_1(\kappa a) \exp(-i\gamma|z - z'|)}{2\pi k_0 a \gamma} d\kappa. \quad (38)$$

С ядром  $\tilde{K}$  ИДУ имеет вид

$$I(z) + \zeta \int_0^L \tilde{K}(a, z - z') [k_0^2 I(z') + I''(z')] dz' \\ = \eta_0^{-1} \zeta E(z) - \zeta [\tilde{K}(a, z) I'(0) - \tilde{K}(a, z - L) I'(L)].$$

Для него имеет место СЛАУ

$$\alpha_m + \frac{2\zeta}{L} \sum_{n=1}^\infty \tilde{A}_{mn} \alpha_n = E_m. \quad (39)$$

Матричные элементы отличаются от (32) более сильной сходимостью:

$$\tilde{A}_{mn} = \int_0^\infty \frac{J_1(\kappa a) [(k_0^2 - k_n^2) \tilde{I}_{mn}^0(\gamma) + c_{mn}(\gamma)]}{2\pi k_0 a \gamma} d\kappa,$$

$$c_{mn}(\gamma) = [(-1)^m \exp(-i\gamma L) - 1] [(-1)^{m+n} - 1] k_m k_n.$$

Для диагональных элементов  $c_{mm}(\gamma) = 0$ , для недиагональных элементов и больших  $\kappa > k_{\max}$  имеем  $c_{mn}(\gamma) = 2k_m k_n$ , и интеграл с этим коэффициентом имеет асимптотику

$$2k_m k_n \int_{k_{\max}}^\infty \frac{\sin(\kappa a - \pi/4)}{\kappa^{3/2}} d\kappa = 2k_m k_n \frac{\cos(k_{\max} a - \pi/4)}{a k_{\max}^{3/2}} \\ - 3k_m k_n \int_{k_{\max}}^\infty \frac{\cos(\kappa a - \pi/4)}{a \kappa^{5/2}} d\kappa.$$



СЛАУ (39) также можно разрешить относительно диагональных членов и решать итерационно.

Итак, использование равномерно распределенной плотности тока по сечению антенны, как и в случае поверхностного тока по цилиндру (см. [4–24]), приводит к сингулярным ИУ и ИДУ. Налагая в поверхностных ИУ и ИДУ импедансные условия, мы можем описывать импедансные антенны. Моделирование зависит от способа введения поверхностного импеданса. Для ряда таких уравнений получены частичные обращения, которые мы здесь не рассматривали. В любом случае обращенная форма имеет вид (9). С другой стороны, ядро обратного оператора можно представить в виде

$$K^{-1}(z, z') = \sum_{n=1, m=1} K_{mn}^{-1} \sin(k_n z) \sin(k_m z'). \quad (40)$$

Коэффициенты разложения  $K_{mn}^{-1}$  получаются, как правило, итерационно при конкретном алгоритме обращения. Согласно (9), решение представляется в виде тригонометрического ряда, коэффициенты которого пропорциональны интегралам от произведения возбуждающего поля  $E(z)$  и соответствующей базисной функции. Такое представление удобно для вычисления корреляций.

## 2. Нити с током в тепловом поле

Нити с током являются хорошей моделью для ряда объектов, для которых важно дисперсионное взаимодействие, приводящее к силам Казимира–Лифшица. Пусть тонкая нить находится в равновесии с вакуумным тепловым полем с планковской плотностью энергии [46]

$$u_p(\omega, T) = \hbar\omega^3 f_{BE}(\omega, T)/(\pi^2 c^3),$$

где  $f_{BE}(\omega, T)$  — функция Бозе–Эйнштейна. Будем обозначать  $\Theta'(\omega, T) = \hbar\omega f_{BE}(\omega, T)$ . Компоненты такого поля — случайные функции с нулевыми средними и ненулевыми корреляциями  $\langle E_\alpha(\omega, T), E_\beta(\omega, T) \rangle = \delta_{\alpha\beta} u_p(\omega, T) \pi / (3\epsilon_0)$ . Мы учли, что полная энергия поля определяется через интеграл от средней за период спектральной энергии по положительным частотам с множителем  $2/\pi$  (или как интеграл от спектральной плотности по всем частотам с множителем  $1/\pi$ ). Планковская плотность  $u_p(\omega)$  определяется так, что интеграл от нее по положительным частотам равен полной плотности энергии черного тела

$$U(T) = \pi^2 (k_B T)^4 / (15 (\hbar c)^3) = 4\sigma_{SB} T^4 / c,$$

где  $\sigma_{SB}$  — постоянная Стефана–Больцмана. Считая излучение изотропным, следует положить  $\langle E_x^2 \rangle = \langle E_y^2 \rangle = \langle E_z^2 \rangle = 2\langle E_0^2 \rangle$ , где  $E_0^2$  — квадрат амплитуды. Здесь двойка учитывает тот факт, что в стоячих волнах теплового поля присутствуют бегущие волны двух направлений. Отсюда имеем  $\langle E_0^2 \rangle = \pi u_p / (6\epsilon_0) = \pi \eta_0 \hbar \omega f_{BE}(\omega, T) k_0^2 / 6$ . Спектральные корреляции понимаются в смысле работы [46]

как усреднение по ансамблю величины  $E_\alpha(\mathbf{r}E_\beta^*(\mathbf{r}))$ . Греческие индексы означают координатные компоненты. Излучение изотропно. Оно создано огромным числом источников (атомов, молекул и зарядов тел) со всех направлений. Такое поле не переносит энергию. Его можно рассматривать как одинаковые потоки по всем направлениям, т.е. как систему стоячих волн [46]. Тепловое поле создает на антенне флуктуационный ток  $I(s) = \eta_0^{-1} \hat{K}^{-1}(s, E_z)$  с корреляцией

$$\langle I(s), I(s') \rangle = \eta_0^{-2} \langle \hat{K}^{-1}(s, E_z), \hat{K}^{-1}(s', E_z) \rangle,$$

где обозначен обратный оператор с ядром  $K^{-1}(s, s')$ . Погонные потери теплового поля равны  $\eta_0 \xi' |I(s)|^2 / 2 = \eta_0^{-1} \xi' |\hat{K}^{-1}(s, E_z)|^2 / 2$ . Дифракционные потери теплового поля переходят в колебания зарядов вещества нити. Указанные колебания являются источником случайной погонной электродвижущей силы. Приведенную корреляцию тока сложно использовать для определения взаимодействия нитей, поскольку необходимо многократно обращать оператор  $\hat{K}$ . Кроме того, необходимо знать корреляцию для поля. В работе [46] для нее приведена формула (приводим ее в системе СИ)

$$\langle E_z(z), E_z(z') \rangle = \eta_0 \xi'(\omega) \Theta(\omega, T) \delta(z - z') / (2\pi)^2.$$

В ней  $\Theta(\omega, T) = k_B T \beta \coth \beta$ ,  $\beta = \hbar\omega / (2k_B T)$ . Здесь средняя энергия квантовых осцилляторов  $\Theta(\omega, T) = \hbar\omega (1/2 + f_{BE}(\omega, T))$  содержит вакуумные нулевые колебания. Эта часть энергии не переносится тепловым полем как излучение тел, но ее следует учесть при определении дисперсионных сил. Из формулы (20.5) работы [53] следует, что для тонких проволочных металлических антенн имеет место следующая связь корреляций (приводим в гауссовой системе):

$$\begin{aligned} \langle E_z(\mathbf{r}), E_z(\mathbf{r}') \rangle &= \langle J_z(\mathbf{r}), J_z(\mathbf{r}') \rangle 16\pi^2 / |\omega \epsilon(\omega)|^2 \\ &= 4\epsilon''(\omega) \Theta(\omega, T) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') / (\omega |\epsilon|^2). \end{aligned}$$

Эта формула получена на основе флуктуационно-диссипационной теоремы (ФДТ). В системе СИ и соответственно. В этих формулах токи и флуктуационные погонные ЭДС коррелированы, т.е. они относятся к металлическим ( $|\epsilon(\omega)| \gg 1$ ) длинным и тонким проволочным антеннам. Влиянием концов пренебрегается. Выполняя интегрирование по поперечному сечению провода в штрихованных и нештрихованных координатах, считая компоненты не зависящими от них и учитывая возникающие множители  $\pi a^2$  в образовании погонных величин, получим  $\langle E_z(z), E_z(z') \rangle = \eta_0 \xi(\omega) \Theta(\omega, T) \delta(z - z') / \pi$ , что говорит о том, что формула (12.10) в [46] приведена в СИ. В используемой там гауссовой системе она должна иметь вид  $\langle E_z(z), E_z(z') \rangle = 4\xi(\omega) \Theta(\omega, T) \delta(z - z')$ , где  $\xi(\omega)$  — погонное сопротивление в  $[s/cm^2]$ . Тем более, что при вычислении потока энергии в единичный телесный угол на стр. 123 в [46] потерян множитель: следует взять

$dJ_\omega/d\omega = cR^2\langle|E|^2\rangle/(8\pi)$ . Рассмотрим формулы (4.10) и (13.1) из [46]. Первая с учетом  $\omega\varepsilon'' = \sigma'$  имеет вид  $\langle J_z(\mathbf{r}), J_z(\mathbf{r}') \rangle = \sigma'(\omega)\Theta(\omega, T)\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')/(4\pi^2)$  (в системе Гаусса). Учитывая связь  $J_z(\mathbf{r}) = \sigma E_z(\mathbf{r})$ , видим, что во второй формуле также потерян множитель  $4\pi$ , или же она записана в СИ. Будем рассматривать корреляции, полученные на основе ФДТ в виде  $\langle E_z(z), E_z(z') \rangle = \eta_0\xi'(\omega)\Theta(\omega, T)\delta(z - z')/\pi$ . Нам удобнее использовать токи. Для длинной антенны влияние концов на большей ее части отсутствует, и имеет место локальная связь  $E_z(z) = \eta_0\xi I(z)$  или  $I(z) = \eta_0^{-1}\zeta E_z(z)$ . Это означает, что обратный оператор почти пропорционален дельта-функции. В этом случае из последней формулы имеем  $\langle I(z), I_z(z') \rangle = \eta_0\zeta'(\omega)\Theta(\omega, T)\delta(z - z')/\pi$ , как и из формул (4.10) и (16.4) работ [46,53] соответственно. Однако вывод на основе ФДТ применим к достаточно объемным телам (каковыми нити не являются), как и вывод указанной формулы (4.10) на основе принципа детального равновесия. Будем считать  $\langle I(z), I_z(z') \rangle = F(\omega, T)\delta(z - z')$  и получим функцию  $F(\omega, T)$  из принципа детального равновесия с тепловым полем. Рассмотрим тонкую и длинную линейную антенну. Ее поле в дальней (волновой) зоне есть

$$E_\theta(\mathbf{r}) = \frac{ik_0\eta_0 \exp(-ik_0R) \sin(\theta)}{4\pi R} \int_{-l}^l \exp(ik_0s \cos(\theta)) I(s) ds,$$

$$H_\varphi(\mathbf{r}) = \frac{ik_0 \exp(-ik_0R) \sin(\theta)}{4\pi R} \int_{-l}^l \exp(ik_0s' \cos(\theta)) I(s') ds',$$

Образуя радиальную часть вектора Пойнтинга, имеем

$$S_r(\mathbf{r}) = \frac{\text{Re}(E_\theta(\mathbf{r})H_\varphi^*(\mathbf{r}))}{2} = \frac{\eta_0 \sin^2(\theta)}{2(4\pi R)^2} \int_{-l}^l \int_{-l}^l \exp(ik_0(s-s')) \times \cos(\theta) \langle I(s), I(s') \rangle ds' ds.$$

Использование корреляции  $\langle I(s), I(s') \rangle \approx F(\omega, T) \times \delta(s - s')$  и интегрирования с дельта-функцией позволяет явно вычислить  $S_r(\mathbf{r})$ . Поэтому полная излученная через сферу большого радиуса мощность равна  $P = 2lp = \eta_0 F(\omega, T) k_0^2 l / (12\pi)$ . Поскольку

$$S_r(\mathbf{r}) = \frac{\eta_0 F(\omega, T) k_0^2 l}{(4\pi R)^2} \sin^2(\theta),$$

излученная через сферу большого радиуса полная мощность будет

$$P = \frac{\eta_0 F(\omega, T) k_0^2 l}{12\pi},$$

а погонная излученная мощность  $p = \eta_0 F(\omega, T) \times k_0^2 / (24\pi)$ . Погонная мощность потерь плоской волны теплового поля, падающей под углом  $\theta$  в интервале углов  $d\theta d\varphi$  и поляризованной в плоскости падения,

есть  $dQ = \eta_0^2 \zeta' \langle E_0^2 \rangle \sin^2(\theta) L / 2$ . Здесь мы ввели амплитуду теплового поля, отнесенную к единице телесного угла, и проинтегрировали по длине. Интегрирование по углам  $\theta$  и  $\varphi$  дает  $Q = 4\pi \eta_0^{-1} \zeta' \langle E_0^2 \rangle l / 3$ . Поляризация нормалью к плоскости падения означает, что вектор электрического поля лежит в плоскости  $(x, y)$ , т.е. волна движется вдоль нити. Такие волны с ней не взаимодействуют, но мы их учли при интегрировании. Поскольку  $\langle E_0^2 \rangle = u_P \pi / (3\varepsilon_0) = \eta_0 \Theta' k_0^2 / (3\pi)$ , то  $Q = 4\zeta' \Theta' k_0^2 l / 9$  с погонными потерями  $q = 2\zeta' \Theta' k_0^2 / 9$ . Приравнявая мощности, получаем  $F(\omega, T) = (16\pi/3) \eta_0^{-1} \zeta'(\omega) \Theta(\omega, T)$ . Далее получим аналогичную формулу для бесконечно длинной нити.

Отсутствие диссипации означает отсутствие дисперсионных сил и отсутствие собственного излучения нити. Такая (например, идеально проводящая) нить изотропно рассеивает падающее на нее со всех сторон тепловое поле. Для идеально проводящего или непоглощающего тела не имеет смысла понятие температуры: оно не обменивается теплом с окружающей средой. Это идеализация, реально таких тел нет, но в идеале два таких тела могут дисперсионно взаимодействовать за счет анизотропного отражения теплового поля или за счет изменения граничных условий для вакуумных флуктуаций [54–61]. Тонкие нити взаимодействуют только за счет диссипации, поскольку не имеют поверхности, за счет которой могут изменяться граничные условия. Идея определения дисперсионного взаимодействия тел состоит в исключении из рассмотрения теплового поля и в замене его в уравнениях Максвелла эквивалентными флуктуационными источниками, определенными через корреляции [58]. Будем определять корреляции тока в координатном представлении функции  $F(\omega, T)$ . Тогда, в силу локальной связи тока и ЭДС, получим  $\langle E_z(z), E_z(z') \rangle = \tilde{F}(\omega, T) \delta(z - z')$ . Поскольку  $\xi'(\omega) = \zeta' |\xi|^2$ , в функцию  $\tilde{F} = \eta_0^2 |\xi|^2 F$  для поля входит величина  $\eta_0 \xi'(\omega)$ . Для преобразованных по Фурье компонент имеем соотношение  $\langle I(\gamma), I(\gamma') \rangle = F(\omega, T, \gamma, \gamma')$ , где  $F(\omega, T, \gamma, \gamma') = 2l F(\omega, T) \sin((\gamma - \gamma')l) / ((\gamma - \gamma')l)$ . Очевидно, в пределе бесконечных нитей получаем  $F(\omega, T, \gamma, \gamma') = 2\pi F(\omega, T) \delta(\gamma - \gamma')$ . Это соотношение позволяет применять спектральный подход для длинных нитей с учетом конечной длины без обращения оператора.

Рассмотрим бесконечную нить. Спектральные погонные потери теплового поля на единицу длины на ней  $q(\omega) = \eta_0 \xi' \langle |I(s)|^2 \rangle / 2 = \eta_0^{-1} \zeta' \langle |E_z(s)|^2 \rangle / 2$  или  $q(\omega) = \zeta' u_P / (3\eta_0 \varepsilon_0) = \zeta(\omega) \Theta'(\omega, T) k_0^2 / (3\pi^2)$ . Здесь  $\Theta'$  (со штрихом) означает исключение нулевых колебаний, при этом мы взяли в качестве плотности энергии взаимодействия треть плотности энергии теплового поля, поскольку только одна из трех компонент поля взаимодействует с нитью. Как видно,  $q(\omega)$  имеет размерность J/m. После интегрирования по частоте получается размерность W/m. Положим  $\langle I(\gamma), I(\gamma') \rangle = 2\pi F(\omega, T) \delta(\gamma - \gamma')$  и вычислим поток

вектора Пойнтинга в дальней зоне. Нам потребуются представления полей. Поле тонкой проводящей нити приведено в монографии [48] и дается формулами (2.85), (2.86), которые имеют вид:

$$H_\varphi(\omega, \gamma, \mathbf{r}) = \frac{I_0 \kappa}{4i} \exp(-i\gamma z) H_1^{(2)}(\kappa \rho), \quad (41)$$

$$E_\rho = \gamma H_\varphi(\omega \varepsilon_0), \quad E_z = (\rho \omega \varepsilon_0)^{-1} \partial_\rho(\rho H_\varphi),$$

$$H_\rho = H_z = 0, \quad E_\varphi = 0, \quad \kappa = -\sqrt{\gamma^2 - k_0^2}.$$

Здесь  $\gamma = k_z$  — заданная величина, бесконечно длинная и бесконечно тонкая нить расположена в начале координат вдоль оси  $z$ . По ней течет линейный ток  $I_z(\omega, \gamma, z) = I_0(\omega, \gamma) \exp(i(\omega t - \gamma z))$ . Вектор-потенциал нити удовлетворяет уравнению  $(\nabla^2 + k_0^2)A_z(\omega, \mathbf{r}) = -I_0 \delta(x) \delta(y)$ , т.е. является, по сути, с точностью до  $I_0 \exp(-i\gamma z)$ , двумерной ФГ  $A_z(\omega, \mathbf{r}) = (4i)^{-1} I_0 \exp(-i\gamma z) H_0^2(\kappa \rho)$  (см. [48], формула (2.146)). Для учета внутренней структуры нити введем ее радиус  $a$  и плотность тока с одной компонентой  $J_z(r) = I_0(z)$  внутри  $\rho \leq a$ . Индекс  $z$  и частоту будем опускать. Рассмотренная зависимость  $I_z$  представляет собой монохроматическую волну тока с заданной длиной волны. Для того чтобы получить произвольное распределение тока, следует взять суперпозицию

$$I_z(\omega, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} I_0(\omega, \gamma) \exp(-i\gamma z) d\gamma.$$

Взяв обратное преобразование (являющееся прямым спектральным преобразованием)

$$I_z(\omega, k_z) = \int_{-l}^l I_0(\omega, z) \exp(ik_z z) dz.$$

получаем пространственно-частотный спектр  $I_z(\omega, k_z) = I_0(\omega, \gamma)$ . Если опустить множитель  $(2\pi)^{-3} \exp(-i\gamma z)$ , компоненты полей будут записаны для пространственно-частотных спектральных амплитуд. Для восстановления временных зависимостей также следует интегрировать по частоте с множителем  $(2\pi)^{-1} \exp(i\omega t)$ . Во втором интеграле для общего случая мы взяли конечную длину  $2l$ , но сейчас полагаем  $l \rightarrow \infty$ . Вектор-потенциал такой нити имеет вид

$$\mathbf{A} = \mathbf{z}_0 A_z(\omega, \mathbf{r}) = \frac{1}{8\pi i} \int_{-l}^l \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\gamma(z - z')) \times H_0^{(2)}(\kappa \rho) I(z') d\gamma dz'.$$

Вычисляем компоненту вектора Пойнтинга в дальней зоне, т.е. используя асимптотические формулы для функций Ганкеля:

$$S_\rho(\omega, \mathbf{r}) = -\text{Re}(E_z H_\varphi^*)/2 = \eta_0 F(\omega, T) k_0^2 / (24\pi^2 \rho).$$

Здесь в четырехкратном интеграле мы использовали корреляцию, проинтегрировали с дельта-функцией  $\delta(z - z')$ , проинтегрировали по координате  $z$ , в результате чего возникла дельта-функция  $2\pi \delta(\gamma - \gamma')$ , а затем проинтегрировали с ней по  $\gamma'$ . Окончательно остался однократный интеграл по  $\gamma$ . В нем учтен вклад только области  $\gamma^2 \leq k_0^2$ , поскольку для эванесцентных волн величина  $\kappa^* H_0^{(2)}(\kappa \rho) H_1^{(2)*}(\kappa \rho) = |\kappa| 4K_0(|\kappa| \rho) K_1(|\kappa| \rho) \pi^2$  в дальней зоне имеет порядок  $\exp(-|\kappa| \rho) / \pi$ , т.е. экспоненциально мала (эванесцентные моды не излучаются). Умножив результат на  $2\pi \rho$ , найдем погонную мощность излучения нити:  $\eta_0 F(\omega, T) k_0^2 / 12\pi$ . Приравняв ее потерям, получим  $F'(\omega, T) = 8\pi \eta_0^{-1} \zeta'(\omega) \Theta'(\omega, T) / 3$ . Для учета дисперсионных сил штрих следует опустить. Мы получили результат в два раза меньший, чем в первом случае, при этом погонные потери взяты одинаковыми, а погонная мощность излучения для длинной нити оказалась в два раза больше. Длинная нить создает равномерное излучение в виде цилиндрической волны, тогда как излучение нити конечного размера в дальней зоне есть излучение диполя с максимумом в экваториальной плоскости, чем и объясняется различие.

Итак, для длинной нити будем использовать результат  $F(\omega, T) = 8\pi \eta_0^{-1} \zeta'(\omega) \Theta(\omega, T) / 3$ . При учете длины используем преобразование Фурье и функцию  $F(\omega, T, \gamma, \gamma') = 2l F(\omega, T) \text{sinc}((\gamma - \gamma')l)$ , где  $\text{sinc}(x) = \sin(x)/x$ . В этом случае появляется дополнительный спектральный интеграл по  $\gamma'$ . Далее все результаты будем представлять через функцию  $F$ , т.е. при использовании других корреляций следует ее просто заменить. Отметим, что нулевые колебания не входят в излученную мощность, и при ее вычислении следует заменять  $\Theta(\omega, T) \rightarrow \hbar \omega f_{BE}(\omega, T)$ . Считая компоненту поля  $E_z(z)$  дельта-коррелированной и образуя для конечной антенны корреляцию  $\langle I(s), I(s') \rangle$ , видим, что она пропорциональна интегралу

$$\int_{-l}^l \hat{K}^{-1}(s, s'') \hat{K}^{-1}(s', s'') ds'',$$

т.е. для конечной антенны токи не коррелированы. По-другому это можно записать так:

$$\langle I(s), I(s') \rangle = \tilde{F}(\omega, T) L \sum_{n, n'} \sin(k_n(s + l)) \times \sin(k_{n'}(s' + l)) \sum_m K_{mm}^{-1} K_{n'm}^{-1*}.$$

Здесь тильдой обозначена функция корреляции поля. Однако в пределе больших длин одинарная сумма становится пропорциональной  $\delta_{mm'}$ , двойная сумма исчезает, и возникает дельта-функция.

Рассмотрим еще вторую точно такую же нить в точке  $\rho = d, \varphi = 0$ . Известно, что при синфазном токе нити притягиваются, а при противофазном — отталкиваются (закон Ампера). Но закон Ампера формулируется для

постоянного тока. Для последнего  $\omega = 0$ ,  $\gamma = 0$ . Запаздывание в формулах типа (41) выражается в наличии функций Ганкеля второго рода. Эти формулы также можно применить для расчета взаимодействия за счет силы Лоренца, включая и ее электрическую часть. Как известно, магнитная сила Лоренца есть фундаментальное следствие закона сохранения импульса, следующего из уравнений Максвелла [62]. Мы их запишем в форме

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{H} - ik_0\eta_0^{-1}\mathbf{E} &= \mathbf{J}_1^0 + \mathbf{J}_2^0 + \mathbf{J}_1^d + \mathbf{J}_2^d, \\ \nabla \times \mathbf{E} + ik_0\eta_0\mathbf{H} &= 0.\end{aligned}\quad (42)$$

В эти общие уравнения мы ввели в качестве источников плотности флуктуационных  $\mathbf{J}_n^0$  и дифракционных (поляризационных)  $\mathbf{J}_n^d$  токов в вакууме. Для тонких нитей берем одну  $z$ -компоненту. Плотности токов поляризации  $\mathbf{J}_n^d(\omega, \mathbf{r}) = i\omega\epsilon_0(\epsilon(\omega, \mathbf{r}) - 1)\mathbf{z}_0E_z(\omega, \mathbf{r})$  описывают тела, определяемые их ДП. Плотности токов взяты в виде  $\mathbf{J}_n^{0,d}(\mathbf{r}) = \mathbf{z}_0I_n^{0,d}(z)\delta(\rho - \rho')\delta(\varphi)/\rho_n$ ,  $\rho_1 = 0$ ,  $\rho_2 = d$ . Раскрытие неопределенности для нити в начале координат при  $\rho_1 = 0$  дано в [48] (формула (2.81)).  $I_n^{0,d}$  — линейные токи, текущие по осям нитей. Дифракционные плотности токов наводятся за счет полей флуктуационных плотностей и погонных проводимостей нитей.

Закон сохранения импульса для монохроматических уравнений (42), как известно, получается следующим образом. Умножим первое уравнение справа векторно на  $\mu_0\mathbf{H}^*$ , а второе — векторно на  $\epsilon_0\mathbf{E}^*$  и сложим. Затем сделаем то же с сопряженными уравнениями и несопряженными полями. Результат разделим на четыре. Обозначим  $\mathbf{F}_{mLn}^p = \mu_0(\mathbf{J}_n^p \times \mathbf{H}^* + \mathbf{J}_n^{p*} \times \mathbf{H})/4$ ,  $\mathbf{F}_{mLn}^0 = \mu_0(\mathbf{J}_n^0 \times \mathbf{H}^* + \mathbf{J}_n^{0*} \times \mathbf{H})/4$ . Это усредненные за период объемные плотности силы Лоренца, действующие на тела, и плотности силы отдачи от флуктуаций, также действующие на тела. Результат можно записать так [62]:

$$\begin{aligned}-\nabla \cdot \hat{T}(\omega, \mathbf{r}) &= \mathbf{F}_{mL1}^p(\omega, \mathbf{r}) + \mathbf{F}_{mL2}^p(\omega, \mathbf{r}) + \mathbf{F}_{mL1}^0(\omega, \mathbf{r}) \\ &+ \mathbf{F}_{mL2}^0(\omega, \mathbf{r}).\end{aligned}\quad (43)$$

Здесь  $\hat{T}(\omega, \mathbf{r})$  — трехмерная часть спектрального тензора энергии-импульса (ТЭИ) в вакууме, обратная тензору натяжений Максвелла (ТНМ). Закон сохранения говорит о том, что плотность потока импульса в вакууме определяется плотностью сил Лоренца, действующих на тела, поскольку как флуктуационные токи, так и поляризации определяются движениями зарядов тела. Поток импульса через окружающую тела бесконечно удаленную поверхность противоположен изменению полного импульса тел. Если поток нулевой, суммарный импульс тел не меняется, что характерно для нитей, занимающих бесконечно малую часть удаленной поверхности. Окружив тела такой поверхностью, исключим объем первого тела, и проинтегрируем (43) по оставшемуся объему. Если поток импульса через бесконечно удаленную поверхность равен нулю, то результат гласит: полный передаваемый первому телу

импульс равен по величине и противоположен импульсу отдачи второго тела. В этом случае уравнение (43) говорит об эквивалентности введения дисперсионных сил с использованием ТНМ и магнитной силы Лоренца. Обычно при выводе дисперсионных сил рассматривают ТНМ, созданный обоими телами [58], и определяют силу через ТНМ. Однако для тонких нитей наиболее просто дисперсионные силы ввести на основе электрической и магнитной частей силы Лоренца, что и сделано далее.

Левая нить имеет линейный заряд, на который действует компонента  $E_{2x}$  второй нити, создавая погонную силу в виде

$$\text{Re}(\tau_1^0 E_{2x}^* + \tau_1^d E_{2x}^*)/2 = -\text{Re}(\tau_1^0 E_{2\varphi}^* + \tau_1^d E_{2\varphi}^*)/2,$$

а также линейный ток, на который действует компонента  $H_{2y}$  второй нити, создавая погонную силу —  $\mu_0(I_1^0 H_{2y}^* + I_1^d H_{2y}^*)/2 = \mu_0(I_1^0 H_{2\varphi}^* + I_1^d H_{2\varphi}^*)/2$ . Согласно приведенным формулам, поле второй нити рассчитывается в ее локальной системе координат, смещенной на  $d$ . Поэтому в области первой нити надо взять в качестве аргументов  $u$  функций Ганкеля  $kd$ . Кроме того, компонента  $E_{2x} = E_{2p} \cos(\varphi') = -E_{2p}$  в этой системе координат направлена от второй нити к первой, т.е. в отрицательную сторону оси  $x$ . Поэтому для определения притягивающей силы (направленной в положительном направлении  $x$ ) в формуле взят знак минус. Магнитное поле второй нити направлено в области первой в отрицательную сторону оси  $y$ , поэтому при образовании векторного произведения взят плюс:  $H_{2y} = -H_{2\varphi}$ . Формула для спектральной силы вдоль оси  $x$  для первой (левой) нити гласит:

$$f_{1x}(\omega, d, l) = \int_{-l}^l (f_{1x}^m(\omega, d, z) - f_{1x}^e(\omega, d, z))dz, \quad (44)$$

$$f_{1x}^m(\omega, d, z) = \mu_0 \text{Re}\langle I_1^0(z) + I_1^d(z), H_{2\varphi}^0(z) + H_{2\varphi}^d(z) \rangle/2,$$

$$f_{1x}^e(\omega, d, z) = \text{Re}\langle \tau_1^0(z) + \tau_1^d(z), E_{2p}^0(z) + E_{2p}^d(z) \rangle/2.$$

В ней использованы координатные функции, взятые на первой нити. Как будет показано, для бесконечных нитей зависимости от координаты  $z$  нет, и формула (44) тогда дала бы бесконечность. В этом случае интегрировать не нужно, и подынтегральное выражение в (44), обозначенное как  $f_{1x}(\omega, d)$ , определяет погонную силу. Из восьми корреляций две корреляции в этой формуле вычислять не надо, поскольку  $\langle I_1^0(z), H_{2y}^0(z) \rangle = 0$ ,  $\langle \tau_1^0(z), E_{2x}^0(z) \rangle$ . Остальные следует определить. Полная погонная сила есть

$$f_1(d) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_{1x}(\omega, d)d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} f_{1x}(\omega, d)d\omega. \quad (45)$$

Электрическая часть плотности силы Лоренца определяет диполь-дипольное взаимодействие и не изменяет общий импульс тел. Учет запаздывания осуществляется

посредством взаимодействия зарядов с электрическим полем, при этом возможен скрытый импульс, заключенный в поле.

Для определения корреляций запишем условие  $E_z(\mathbf{r}) = \eta_0 \xi_1^{-1} I_1^d(z)$  в области первой нити и такое же условие  $E_z(\mathbf{r}) = \eta_0 \xi_2^{-1} I_2^d(z)$  в области второй нити. В них следует взять компоненту полного поля, для которой  $E_z(\mathbf{r}) = E_z(z)$ . Здесь мы считаем радиусы нитей разными, т.е.  $\xi_n = i(\varepsilon - 1)k_0 a_n$ , и далее обозначаем  $\varepsilon - 1 = \chi$ . Берем фурье-преобразования и переходим к пространственно-спектральным величинам  $I_n^{0,d} = I_n^{0,d}(\omega, \gamma)$ :

$$I_1^d = -\frac{i\chi\pi}{4} a_1^2 (k_0^2 - \gamma^2) \left\{ (I_1^0 + I_1^d) H_0^{(2)}(\kappa\rho_1) + (I_2^0 + I_2^d) H_0^{(2)}(\kappa d) \right\}, \quad (46)$$

$$I_2^d = -\frac{i\chi\pi}{4} a_2^2 (k_0^2 - \gamma^2) \left\{ (I_2^0 + I_2^d) H_0^{(2)}(\kappa\rho_2) + (I_1^0 + I_1^d) H_0^{(2)}(\kappa d) \right\}. \quad (47)$$

В этих соотношениях надо положить  $\rho_1 = 0$  и  $\rho_2 = 0$ . Но функция Ганкеля  $H_0^{(2)}$  имеет в нуле логарифмическую особенность. В (46) и (47) она связана с самодействием, поскольку первые расходящиеся члены не зависят от расстояния и определяют действие нитей на себя. Мы удаляем эти члены и определяем регуляризированные компоненты в виде:

$$\tilde{I}_1^d(\gamma) = d_{01}(\gamma) \left( I_2^0(\gamma) + I_2^d(\gamma) \right), \quad (48)$$

$$\tilde{I}_2^d(\gamma) = d_{02}(\gamma) \left( I_1^0(\gamma) + I_1^d(\gamma) \right), \quad (49)$$

где  $d_{0n}(\gamma) = -i\chi\pi a_n^2 \kappa^2 H_0^{(2)}(\kappa d)/4$ . В наших обозначениях

$$\tilde{I}_1^d(\gamma) = \frac{d_{01}d_{02}I_1^0(\gamma) + d_{01}I_2^0(\gamma)}{1 - d_{01}d_{02}} = \alpha(\gamma)I_1^0(\gamma) + \beta_1(\gamma)I_2^0(\gamma),$$

$$\tilde{I}_2^d(\gamma) = \frac{d_{01}d_{02}I_2^0(\gamma) + d_{02}I_1^0(\gamma)}{1 - d_{01}d_{02}} = \alpha(\gamma)I_2^0(\gamma) + \beta_2(\gamma)I_1^0(\gamma),$$

$$\alpha(\gamma) = d_{01}(\gamma)d_{02}(\gamma)/(1 - d_{01}(\gamma)d_{02}(\gamma)),$$

$$\beta_1(\gamma) = d_{01}(\gamma)/(1 - d_{01}(\gamma)d_{02}(\gamma)),$$

$$\beta_2(\gamma) = d_{02}(\gamma)/(1 - d_{01}(\gamma)d_{02}(\gamma)),$$

$$\langle I_1^{(0)}(\gamma), \tilde{I}_2^{(d)}(\gamma') \rangle = a_1^2 \beta_2^{(*)}(\gamma) F(\omega, T, \gamma, \gamma'),$$

$$\langle \tilde{I}_1^{(d)}(\gamma), I_2^{(0)}(\gamma') \rangle = a_2^2 \beta_1(\gamma) F(\omega, T, \gamma, \gamma'),$$

$$\langle \tilde{I}_1^{(d)}(\gamma), \tilde{I}_2^{(d)}(\gamma') \rangle = (a_1^2 \alpha(\gamma) \beta_2^{(*)}(\gamma)$$

$$+ a_2^2 \alpha^*(\gamma) \beta_1(\gamma)) F(\omega, T, \gamma, \gamma'). \quad (50)$$

Заметим, что для исключения расходимости можно было бы усреднить по сечению. Однако указанные члены все равно следует исключить. Окончательный результат

будет зависеть от модели нити. Для одинаковых металлических проволочек следует использовать корреляции (50), при этом  $d_{01} = d_{02} = d_0 = i\chi\pi(\kappa a)^2 H_0^{(2)}(\kappa d)/4$ . Для модели линейного тока  $\tilde{J}_n^{0,d}(\gamma) = \tilde{I}_n^{0,d}(\gamma)/(\pi a_n^2)$ . Для одинаковых УНТ с радиусом  $a$  вводим поверхностную проводимость [59]. В результате получим  $d_0 = 2i\xi\pi a(k_0^2 - \gamma^2)H_0^{(2)}(\kappa d)/k_0$ . Для УНТ разных радиусов в окончательные формулы для силы вместо квадрата  $a^2$  войдет произведение  $a_1 a_2$ .

Рассмотрим результат для двух металлических нитей. Корреляции следует преобразовать к спектральным величинам, например,

$$\langle I_1^d(z), H_{2\varphi}^0(z) \rangle = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \langle I_1^d(\gamma), H_{2\varphi}^0(\gamma') \rangle \times \exp(i(\gamma' - \gamma)z) d\gamma d\gamma'.$$

Они определяют погонную силу. Если нити конечной длины следует проинтегрировать по их длине, используя соотношения (50), тогда вклад  $\langle I_1^d(z), H_{2\varphi}^0(z) \rangle$  в полную силу есть

$$\frac{\mu_0 a_2^2}{32\pi^2} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} i\beta_1(\gamma) F(\omega, T, \gamma, \gamma', l) (\kappa' H_1^{(2)}(\kappa' d))^* d\gamma d\gamma'.$$

В этой формуле  $\kappa' = -i\sqrt{\gamma'^2 - k_0^2}$ . Если же нити бесконечные, то интегрирование с дельта-функцией в  $F(\omega, T, \gamma, \gamma', l) = 2\pi F(\omega, T)\delta(\gamma' - \gamma)$  приводит к независимости результата от  $z$ . В этом случае интегрировать по  $z$  не надо, и вклад в погонную силу есть

$$\frac{\mu_0 a_2^2 F(\omega, T)}{16\pi^2} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} i\beta_1(\gamma) (\kappa H_1^{(2)}(\kappa d))^* d\gamma.$$

Обозначим возникающие из-за корреляций (50) функции

$$\Phi_{01}(\kappa, d) = \frac{\chi(\omega)\kappa^2 H_0^{(2)}(\kappa d) (\kappa H_1^{(2)}(\kappa d))^*}{16 + \pi^2 \chi^2(\omega) (\kappa^2 a_1 a_2 H_0^{(2)}(\kappa d))^2}, \quad (51)$$

$$\Phi_{11}(\kappa, d) = \frac{2\pi^2 |\chi\kappa^2 a_1 a_2 H_0^{(2)}(\kappa d)|^2}{\left| 16 + \pi^2 (\chi\kappa^2 a_1 a_2 H_0^{(2)}(\kappa d))^2 \right|^2} \times \operatorname{Re}(i\chi\kappa^2 H_0^{(2)}(\kappa d)) \operatorname{Re}(i\kappa H_1^{(2)}(\kappa)). \quad (52)$$

С использованием введенных обозначений рассмотренный вклад равен

$$\frac{\mu_0 a_1^2 a_2^2 F(\omega, T)}{2\pi} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{01}(\kappa, d) d\gamma. \quad (53)$$

Здесь мы воспользовались четностью по  $\gamma$  и преобразовали интеграл к положительной области. Следует

взять реальную часть (53). Это можно сделать и после окончательных вычислений. Нетрудно видеть, что корреляция  $\langle I_1^0, H_{2\varphi}^d \rangle$  комплексно сопряжена с (53), поэтому вклад обеих корреляций приводит к удвоению результата (53). Корреляцию  $\langle I_1^d, H_{2\varphi}^d \rangle$  в дальней зоне можно не вычислять, поскольку она более сильно убывает по сравнению с (53). Это обусловлено тем, что для получения наведенных токов и полей флуктуационные поля должны рассеяться, т.е. получить, согласно последнему соотношению (50), более сильно убывающий член с функцией (52). При малых радиусах он мал. Если же его также учесть, то получим для спектральной плотности магнитной силы

$$f_{1x}^m(\omega, d) = \frac{\mu_0 a_1^2 a_2^2 F(\omega, T)}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^\infty [\Phi_{01}(\kappa, d) \Phi_{11}(\kappa, d)] d\gamma. \tag{54}$$

Рассмотрим электрическую силу. Имеем корреляцию

$$\langle \tau_1^d(z), E_{2p}^0(z) \rangle = \frac{1}{(2\pi)^2 \omega} \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \langle I_1^d(\gamma), E_{2p}^0 \rangle \times \exp(i(\gamma' - \gamma)z) \gamma d\gamma d\gamma'.$$

Видим, что интеграл отличается от (54) множителем  $\gamma^2/(\epsilon_0 c^2 k_0^2) = \mu_0 \gamma^2/k_0^2$ . Поэтому результат для общей силы отличается от магнитного вклада множителем  $(1 - \gamma^2/k_0^2)$  под интегралом по  $\gamma$ , т.е. полная спектральная плотность силы есть

$$f_{1x}(\omega, d) = \frac{\mu_0 a_1^2 a_2^2 F(\omega, T)}{\pi k_0^2} \operatorname{Re} \int_0^\infty [\Phi_{01}(\kappa, d) + \Phi_{11}(\kappa, d)] \kappa^2 d\gamma. \tag{55}$$

Для полной погонной силы следует интегрировать (55) по частоте. Ввиду сложности вычислений перейдем к суммированию по Мацубаре, введя мнимые частоты  $\omega_m = i\varpi_m = 2\pi i m k_B T/\hbar$  и  $\tilde{k}_m = \varpi_m/c$ :

$$f_{1x}(d) = \frac{k_B T a_1^2 a_2^2}{6c} \sum_{m=0}^\infty \left(1 - \frac{1}{2} \delta_{m0}\right) \frac{E_m \chi_m}{\tilde{k}_m} \times \int_0^\infty [\tilde{\Phi}_{01}(q_m, d) + \tilde{\Phi}_{11}(q_m, d)] q_m^5 d\gamma. \tag{56}$$

Здесь  $\chi_m = \chi(i\varpi_m)$ ,  $E_m = i\varpi_m \varepsilon''(i\varpi_m)$ ,  $q_m = \sqrt{\tilde{k}_m^2 + \gamma^2}$  — действительные на мнимой оси значения, а входящие в (56) функции тоже действительные. Приближенные вычисления интегралов в (56) приводят к быстро сходящемуся ряду по частотам Мацубары:

$$f_{1x}(d) \approx \frac{k_B T \pi^{1/2} a_1^2 a_2^2 \omega_c^4}{24c d^{3/2}} \sum_{m=1}^\infty \frac{\tilde{k}_m^{5/2} \exp(-2\tilde{k}_m d)}{(\varpi_m - \omega_c)^2 (\varpi_m + \omega_c)^2} \times \left(1 + \frac{11}{4(\tilde{k}_m d)} + \dots\right).$$

Этот ряд получен, когда для всех частот  $\tilde{k}_m d > 1$ . Однако такое суммирование требует обоснования, поскольку  $\chi$  и  $\varepsilon''$  имеют полюса. Обозначая интеграл (55) как  $-\operatorname{Im}(\omega \varepsilon(\omega) \operatorname{Re} \Psi(\omega))$  и переходя к мнимой частоте, получаем действительную функцию  $\Psi(i\varpi)$  и полюс у функции  $\omega \varepsilon(\omega)$  типа  $(\varpi + \omega_c)^{-1}$  в нижней полуплоскости в случае металлической нити. При интегрировании по верхней мнимой оси его учитывать не нужно, т.е. не нужно добавлять поправку в точке  $\omega_c$ . В случае диэлектрической нити, описываемой формулой Лоренца (1) без члена ДрUDE и со многими резонансными частотами, имеющими весьма узкие спектральные линии, приближенное интегрирование по частоте можно выполнить, учитывая, что вблизи спектральных линий величина  $\varepsilon''(\omega)$  близка к дельта-функциям, а вне их равна нулю. Действительно, при  $\alpha_m = \omega_m/(2\omega_{mr}) \ll 1$  из (1) имеем

$$\varepsilon''(\omega) \approx \sum_{m=1}^M \frac{\omega_{mP}^2}{2\omega_{mr}} \frac{\alpha_m}{(\omega - \omega_{mr})^2 + \omega^2 \alpha_m^2} \approx \sum_{m=1}^M \frac{\omega_{mP}^2}{2\pi \omega_{mr}} \delta(\omega - \omega'_{mr}).$$

Мы учли, что при конечной ширине линий максимумы  $\varepsilon''(\omega)$  достигаются на частотах  $\omega'_{mr} = \omega_{mr}/(1 + \alpha_m^2) \approx \omega_{mr} - \omega_{mc}^2/\omega_{mr}$ . Возникает сумма по частотам  $\omega'_{mr}$ , при этом восприимчивость следует взять в виде двойной суммы

$$\chi(\omega'_{mr}) = \sum_{n=1}^M \frac{\omega_{nP}^2}{2\omega_{nr}} \frac{(\omega_{nr} - \omega'_{mr})}{(\omega_{nr} - \omega'_{mr})^2 + \omega_{nc}^2/(2\omega_{mr})}.$$

Если при этом расстояние  $d$  достаточно большое, так что для всех частот  $\omega'_{mr} d/c > 1$ , то возникающие интегралы можно оценить аналитически.

### 3. Аналитические оценки дисперсионной силы

Интеграл в (44) следует вычислять численно, но в дальней зоне при нулевой температуре его можно оценить аналитически. Его следует оценивать, разбив на два по областям  $0 < \gamma < k_0$  и  $k_0 < \gamma < \infty$ :  $I(\omega, d) = I_1(\omega, d) + I_2(\omega, d)$ . В первой области величина  $\kappa = \sqrt{k_0^2 - \gamma^2}$  действительная, и при больших  $d$  в знаменателях функций  $\Phi_{01}$  и  $\Phi_{11}$  присутствуют быстро осциллирующие члены. Если ими пренебречь, то получим

$$\Phi_{01}(\kappa, d) = \chi(\omega) \kappa^3 H_0^{(2)}(\kappa d) H_1^{(2)*}(\kappa d) / 16,$$

$$\Phi_{11}(\kappa, d) = \pi^2 (a_1 a_2)^2 \kappa^7 |\chi H_0^{(2)}(\kappa d)|^2 \operatorname{Re}(i\chi H_0^{(2)}(\kappa d)) \times \operatorname{Re}(iH_1^{(2)}(\kappa d)) / 128.$$

Поскольку  $H_n^{(2)}(\kappa d) = J_n(\kappa d) - iN_n(\kappa d)$ , легко найти реальные части этих функций и их асимптотические значения. Во второй области величина  $\kappa = -\sqrt{\gamma^2 - k_0^2} = -iq$  мнимая, для функций Ганкеля мнимого аргумента имеем  $H_0^{(2)}(-iq) = (2i/\pi)K_0(q)$ ,  $H_1^{(2)}(-iq) = -(2/\pi)K_1(q)$ , и в этом случае  $\Phi_{01}(\kappa, d) = \chi(\omega)q^3 K_0(q)/\pi^2$ ,  $\text{Re } \Phi_{01}(\kappa, d) = \chi'(\omega)q^3 K_0(q)K_1(q)/\pi^2$ ,  $\Phi_{11}(\kappa, d) = 0$ . Для малых радиусов мы положим  $\Phi_{11}(\kappa, d) \approx 0$ . Далее будет использовать разложения при малых и при больших аргументах цилиндрических функций. Для этого частотную область также следует разделить на две, т.е. взять интеграл (45) в виде

$$f_1(d) = \frac{c}{\pi d} \int_0^1 f_{1x}(\omega, d)dw + \frac{c}{\pi d} \int_1^\infty f_{1x}(\omega, d)dw. \quad (57)$$

Здесь введена безразмерная частота  $w = k_0 d$ . Соответственно в функции надо подставлять  $\omega = cw/d$ . Составляющие  $I(\omega, d)$  интегралы имеют реальные части

$$\text{Re}(I_1(k_0 d)) = \frac{1}{d^6} \int_0^{k_0 d} \frac{\chi'(\omega)H_r(u) + \varepsilon''(\omega)H_i(u)}{\sqrt{k_0^2 d^2 - u^2}} u^6 du, \quad (58)$$

$$\text{Re}(I_2(\omega, d)) = -\frac{4\chi'(\omega)}{\pi^2 d^6} \int_{k_0 d}^\infty \frac{K_0(u)K_1(u)}{\sqrt{u^2 - k_0^2 d^2}} u^6 du, \quad (59)$$

где

$$H_r(u) = J_0(u)J_1(u) + N_0(u)N_1(u),$$

$$H_i(u) = J_0(u)N_1(u) - J_1(u)N_0(u).$$

При аргументах  $u$ , близких к нулю, вклад в интеграл (58) мал. Основной вклад в оба интеграла вносят области  $u \approx k_0 d$ . При  $k_0 d < 1$  аргумент  $u$  меньше единицы, и основной вклад в (58) дает разложение  $\chi' H_r(u) \approx N_0(u)N_1(u) \approx -\chi'(2/\pi)^2 \ln(\gamma_0 u/2)$ . Здесь  $\gamma_0 = 1.781$  — постоянная Эйлера. Для вычисления интеграла (58) используем формулу 2.6.5.1 из [63]

$$\int_0^a \frac{\ln^m(u)}{\sqrt{a^2 - u^2}} u^n du = \frac{1}{2a} \partial_a^m \left[ a^{n+1} B\left(\frac{1}{2}, \frac{a}{2}\right) \right]$$

при  $a = k_0 d$ ,  $m = 1, 2$  и  $n = 5, 6$ . Получаем вклад от интеграла в виде

$$\text{Re } I_1(\omega, d) = -\frac{4\chi'(k_0 d)^3}{\pi^2 d^6} \times \left( 5 + \frac{8}{15} (k_0 d)^2 \ln\left(\frac{\gamma_0}{2}\right) + O((k_0 d)^2) \right). \quad (60)$$

Здесь мы воспользовались тем, что при  $k_0 d \ll 1$  приближенно выполнено  $B(1/2, a/2) \approx 2/a$ ,  $\partial_a B(1/2, a/2) \approx -2/a^2$ . При малых  $k_0 d$  интеграл (59)

следует оценивать в областях  $k_0 d < u < 1$  и  $1 < u < \infty$ . Интеграл в первой области есть

$$\int_{k_0 d}^1 \frac{K_0(u)K_1(u)}{\sqrt{u^2 - k_0^2 d^2}} u^6 du \approx -\int_{k_0 d}^1 \frac{\ln(\gamma_0 u/2)}{\sqrt{u^2 - k_0^2 d^2}} u^5 du.$$

Интеграл вычисляем путем разложения корня в ряд. Интеграл по второй области

$$\int_1^\infty \frac{K_0(u)K_1(u)}{\sqrt{u^2 - k_0^2 d^2}} u^6 du$$

вычисляем также методом разложения в ряд, что дает  $\pi[169/144 + 5k_0^2 d^2/16 + O(k_0^2 d^2)]$ . Обозначая  $I_R(\omega, d) = \text{Re } I(\omega, d)$ , окончательно имеем

$$I_R(\omega, d) = \frac{\chi'(\omega)}{d^6} \left[ 3.69 + \left( \frac{5\pi}{16} - \frac{1}{18} \ln\left(\frac{\gamma_0}{2}\right) \right) (k_0 d)^2 - \frac{20(k_0 d)^3}{\pi^2} - \frac{32(k_0 d)^5}{15\pi^2} \ln\left(\frac{\gamma_0}{2}\right) + \dots \right]. \quad (61)$$

При  $k_0 d > 1$  интеграл (58) также разбиваем на две области. В первой используем разложение при малых значениях аргументов, что дает вклад

$$\frac{4\chi'(\omega)}{\pi^2 d^6 k_0 d} \ln\left(\frac{\gamma_0}{2}\right) \left( \frac{1}{36} + \frac{1}{128(k_0 d)^2} - \frac{3}{800(k_0 d)^4} + \dots \right).$$

Оставшиеся интегралы вычисляем с использованием асимптотических формул для больших аргументов. Результат для интеграла (58) по двум областям имеет вид

$$\frac{2\varepsilon''(\omega)}{\pi d^6} \left( \frac{8(k_0 d)^5}{15} - \frac{1}{k_0 d} \left( \frac{1}{6} + \frac{1}{16k_0^2 d^2} \right) \right) \approx \frac{16\varepsilon''(\omega)(k_0 d)^5}{15\pi d^6}.$$

Для интеграла (59) при больших аргументах имеем разложение

$$\text{Re}(I_2(\omega, d)) = -\frac{2\chi'(\omega)}{\pi d^6} \int_{k_0 d}^\infty \exp(-2u) \frac{u^5 - u^4/4 + \dots}{\sqrt{u^2 - k_0^2 d^2}} du.$$

Используем табличный интеграл [63]

$$\int_a^\infty \frac{u^{n+1} \exp(-pu)}{\sqrt{u^2 - a^2}} du = (-1)^n a \partial^n K_1(ap),$$

что приводит к результату

$$\text{Re}(I_2(\omega, d)) = -\frac{2\chi'(\omega)}{\pi d^6} \left[ a \partial_\rho^4 K_1(ap) - a \partial_\rho^3 K_1(ap)/4 + \dots \right].$$

В нем надо положить  $a = k_0d$ ,  $p = 2$ . При больших аргументах  $K_1(ap) = \sqrt{\pi/(2ap)} \times \exp(-ap)[1 + 3/(8ap) + \dots]$ . Максимальный вклад дает дифференцирование экспоненты. Отбрасывая остальные производные, получаем

$$\text{Re}(I_2(\omega, d)) \approx -\frac{\sqrt{\pi}\chi'(\omega)(k_0d)^{9/2}}{\pi d^6} \exp(-2k_0d).$$

При больших  $k_0d$  окончательно имеем

$$I_R(\omega, d) = d^{-6} \left[ \frac{16\varepsilon''(\omega)(k_0d)^5}{15\pi} - \frac{\chi'(\omega)(k_0d)^{9/2}}{\sqrt{\pi}} \times \exp(-2k_0d) + \frac{\chi'(\omega)}{9\pi^2 d^6 k_0d} \ln\left(\frac{\gamma_0}{2}\right) + \dots \right]. \quad (62)$$

Итак, вычисление пространственно-спектральных интегралов в дальней зоне дает результат в виде рядов по переменной  $w = k_0d$  — нормированной частоте, в которые входит ДП или проводимость. Дальнейшее исследование связано с моделью ДП нитей. Одночленная формула модели Лоренца в нормированной частоте гласит:

$$\varepsilon''(w) = -\frac{\omega_p^2 \omega_c c d^3 w}{(\omega_r^2 d^2 - (wc)^2)^2 + (wc \omega_c d)^2},$$

$$\chi'(w) = -\frac{\omega_p^2 d^2 (\omega_r^2 d^2 - (wc)^2)}{(d^2 \omega_r^2 - (wc)^2)^2 + (wc \omega_c d)^2}.$$

Для модели Друде надо просто положить  $\omega_r^2 = 0$ . В формуле для бесконечных металлических нитей следует использовать формулу Друде–Смита, или же можно добавить к формуле Друде терм Лоренца с малой резонансной частотой  $\omega_0 = c\pi/l$ , характеризующий тот факт, что электрон в конечной нити не является до конца свободным (не может уйти на бесконечность), а ток должен удовлетворять нулевым условиям на границе. Это позволяет избежать полюса на нулевой частоте и расходимости в нуле. Использование функции  $F(\omega, T, \gamma, \gamma')$  или обращение оператора для конечной нити не приводит к такой расходимости. Окончательная формула для силы требует частотного интегрирования. Для  $T = 0$  выполним его приближенно аналитически, используя нормированную частоту. В формуле (61) учтем три члена и запишем ее в виде  $I_R(w, d) = d^{-6}\chi'(w)[\alpha_0 + \alpha_2 w^2 + \alpha_3 w^3]$ . Ее следует подставлять в первый интеграл (57). В формуле (62) учтем два члена и запишем ее в виде  $I_R(\omega, d) = d^{-6}(\beta_1 \chi'(w) w^{9/2} \exp(-2w) + \beta_2 \varepsilon''(w) w^5)$ . Ее подставляем во второй интеграл. Тогда полную погонную силу можно представить в виде

$$f_1(d) \approx \frac{ca_1^2 a_2^2 \hbar}{12\pi d^7} [\tilde{I}_1(d) + \tilde{I}_2(d)], \quad (63)$$

$$\tilde{I}_1(d) = \int_0^1 \varepsilon''(w)\chi'(w)(\alpha_0 + \alpha_2 w^2 + \alpha_3 w^3)dw, \quad (64)$$

$$\tilde{I}_2(d) = \int_1^{w_{\max}} (\beta_1 \varepsilon''(w)\chi'(w)w^{9/2} \exp(-2w) + \beta_2 \varepsilon''(w)(w)w^5)dw. \quad (65)$$

Приведенные интегралы в ряде случаев можно вычислить приближенно. Так, пусть для диэлектрических нитей в одночленной формуле Лоренца выполнено  $\omega_r^2 d^2 \gg c^2$  и  $\omega_r^2 d \gg c\omega_c$ . Тогда  $\varepsilon''(w) = (\omega_p^2 \omega_c / \omega_r^4)(c/d)w$ ,  $\chi'(w) = \omega_p^2 / \omega_r^2$ , и первый интеграл равен

$$\tilde{I}_1(d) = \frac{c\omega_p^4 \omega_c}{\omega_r^4 d} (\alpha_0/2 + \alpha_2/4 + \alpha_3/5).$$

Для более сложных случаев можно разбивать интеграл на подобласти и в каждой использовать разложение компонент ДП в ряд. Для металлических нитей основной вклад дает интеграл (64). При этом результат сильно зависит от того,  $\omega_c d > c$  или  $\omega_c d < c$ , т.е. от потерь. Наиболее просто вычисляются случаи больших потерь  $\omega_c d \gg c$ . Для него  $\varepsilon''(w) = \omega_p^2 d (1 - (wc)^2 / (\omega_c d)^2) / (wc \omega_c)$ ,  $\chi'(w) = -\omega_p^2 / \omega_c^2$ , и интеграл равен

$$\tilde{I}_1(d) = \frac{\omega_p^4 d}{\omega_c^3 c} \left( \alpha_0 \ln\left(\frac{\pi d}{l}\right) - \frac{\alpha_2}{2} - \frac{\alpha_3}{3} - \frac{c^2}{d^2 \omega_c^2} \times \left( \frac{\alpha_0}{2} + \frac{\alpha_2}{3} + \frac{\alpha_3}{4} \right) \right),$$

Мы обрезали интеграл снизу, и его знак определяется большим логарифмическим членом. Используем в первом интеграле вместо модели Друде модель Лоренца с малой нормированной частотой  $w_r = \pi d/l \ll 1$ . Обозначим малый параметр  $d^2 \omega_r^2 / c^2 = (\pi d/l)^2 = \Delta^2$  и введем нормированную частоту столкновений  $w_c = \omega_c d/c$ . Тогда вклад в силу от первого интеграла (64) определяется выражением

$$\frac{a_1^2 a_2^2 \hbar \omega_p^4}{12\pi c^3 d^3} w_c \int_0^1 \frac{(\Delta^2 - w^2)(\alpha_0 + \alpha_2 w^2 + \alpha_3 w^3)}{[(\Delta^2 - w^2)^2 + (w w_c)^2]^2} w dw.$$

Максимальный вклад соответствует коэффициенту  $\alpha_0$ . Переходя к переменной  $u = w^2$ , а затем к переменной  $x = \Delta^2 - u$ , получаем результат

$$w_c \alpha_0 \frac{a_1^2 a_2^2 \hbar \omega_p^4}{12\pi c^3 d^3} \int_{\Delta^2-1}^{\Delta^2} \frac{x}{(x^2 - x w_c^2 + \Delta^2 w_c^2)^2} dx.$$



В случае малых потерь  $w_c^2 < 4$  подынтегральная функция  $\varphi$  имеет вид

$$\varphi(x) = -\frac{2 - w_c^2 x}{(4\Delta^2 w_c^2 - w_c^4)[x^2 + w_c^2 x + \delta^2 w_c^2]} + \frac{2w_c^2}{(4\Delta^2 w_c^2 - w_c^4)^{3/4}} \arctan\left(\frac{2x - w_c^2}{\sqrt{2\Delta^2 w_c^2 - w_c^4}}\right). \quad (66)$$

В случае больших потерь  $w_c^2 > 4$  эта функция имеет вид

$$\varphi(x) = -\frac{2 - w_c^2 x}{(4\Delta^2 w_c^2 - w_c^4)[x^2 + w_c^2 x + \delta^2 w_c^2]} + \frac{w_c^2}{(4\Delta^2 w_c^2 - w_c^4)^{3/4}} \ln\left(\frac{2x - w_c^2 - \sqrt{w_c^4 - 4\Delta^2 w_c^2}}{2x - w_c^2 + \sqrt{w_c^4 - 4\Delta^2 w_c^2}}\right). \quad (67)$$

Что касается интеграла (65), то он обрезан сверху. В качестве максимальной частоты можно взять величину  $w_{\max} = \omega_{\max} d/c = \pi d/a$  или даже существенно меньшую. Это связано с тем, что на очень высоких частотах излучение уже не взаимодействует с веществом как со сплошной средой, и понятие ДП теряет смысл. Высоко-частотные кванты участвуют в фотоионизации отдельных атомов. Еще на более низких частотах вступает в силу пространственная дисперсия. Для используемой формулы мы пренебрегли малым членом в знаменателе функции (51). Если его учесть, то можно показать сходимость. Однако проще вычислить интеграл в рассмотренных в (65) пределах, тем более, что получить общую формулу весьма сложно. Вычислим интеграл (65) для металлических нитей в предположении, что  $\omega_c d \ll c$ , т.е. что

$$\varepsilon''(w) = \frac{\omega_p^2 \omega_c d^3}{w^3 c^3} \left(1 - \frac{(\omega_c d)^3}{(wc)^2}\right),$$

$$\chi'(w) = \frac{\omega_p^2 d^2}{w^2 c^2} \left(1 - \frac{(\omega_c d)^3}{(wc)^2}\right).$$

Для упрощения заменим скобки единицей, хотя можно привести результат и с их учетом. Интеграл от экспоненты равен  $-\beta_1 \omega_p^4 \omega_c d^5 c^5 \exp(-2)(1/2 - 1/8 + \dots)$ . Он дает вклад, пропорциональный  $d^{-2}$ . Оставшийся интеграл равен  $\beta_2 c^{-6} \omega_p^4 \omega_c^2 d^6 \ln(w_{\max})$ . Его вклад пропорционален  $d^{-1} \ln(d/a)$ .

Оценим погонную силу для двух металлических нитей с радиусами  $a_1 = a_2 = a = 5 \text{ nm}$  и длиной  $10 \mu\text{m}$  на расстоянии  $d = 100 \text{ nm}$ . Имеем  $\alpha_0 = 3.69$ ,  $\alpha_2 = 0.99$ ,  $\alpha_3 = -2.03$ ,  $\beta_1 = 0.564$ ,  $\beta_2 = 0.34$ ,  $\Delta^2 = 0.001$ . Берем  $\omega_c = 10^{13}$ ,  $\omega_p = 10^{15}$  (Hz), т.е.  $w_c = 3.3 \cdot 10^{-3}$ . В результате получаем  $f_1(d) \approx -6.3 \cdot 10^{-6} \text{ N/m}$ , т.е. сила репульсивная. В ближней зоне следует ожидать притягивающую силу. Знак силы также может меняться при изменении потерь.

Отметим, что нельзя перейти к пределу  $\varepsilon''(\omega) \rightarrow 0$  на всех частотах. Такой переход в силу соотношений Крамера–Кронига означает  $\chi' = \varepsilon' - 1 = 0$ , т.е. отсутствие тела. Часто рассматривают дисперсионное взаимодействие модельных тел без диссипации [46,54–58]. Такое взаимодействие связано с отражением теплового поля от границ и передачей импульса за счет отражения, а также за счет изменения плотности энергии нулевых вакуумных флуктуаций. Для нитей мы фактически исключили границы, а рассеяние нити изотропно, т.е. при  $\omega_c = 0$  нет передачи импульса, даже если предположить, что такие объекты существуют. Единственный способ передать импульс нити — это его поглощение. Очевидно, сила для второй нити  $f_2(d) = -f_1(d)$ . Для взаимодействия двух одинаковых УНТ с конечным радиусом удобно использовать корреляции [59]

$$\langle j_{nz}^0(\omega, \mathbf{r}_\tau), j_{mz}^0(\omega, \mathbf{r}'_\tau) \rangle = 4\pi^{-1} \eta_0^{-1} \xi'(\omega) \Theta(\omega, T) \times \delta_{mm} \delta(\mathbf{r}_\tau - \mathbf{r}'_\tau).$$

В них точки взяты на поверхностях. Можно непосредственно использовать поверхностные плотности тока, но проще воспользоваться приведенными соотношениями, в которых сделать замену  $\chi \rightarrow 2\zeta/(k_0 a)$ . Это означает пропорциональность погонной силы  $a^2$  [59]. Для УНТ результаты будут также определяться спектрально-частотным интегралом с учетом проводимости, которая сильно зависит от типа УНТ [59]. При определении погонной силы на основе ТНМ следует вычислять интеграл от величины  $-a_1 [\langle \hat{T}_{xx} \rangle \cos(\varphi) + \langle \hat{T}_{xy} \rangle \sin(\varphi)]$  по углу. Этот результат совпадает с приведенным, но требует более громоздких вычислений.

## Заключение

Взаимодействие Казимира для цилиндров рассмотрено в ряде работ, например, [60,61], в которых использован метод цилиндрических  $T$  матриц и матриц трансляции для вычисления энергии Казимира. Рассматривались модельные идеально проводящие, плазменные цилиндры, и цилиндры с низкочастотной проводимостью Друде. Указанные матрицы построены на цилиндрических гармониках, а результаты [60,61] для энергии Казимира содержат большие логарифмы  $\ln(d/a)$ . В работе явно использовано условие для бесконечно тонких нитей, заключающееся в том, что внутри них нет зависимостей от поперечных координат. Это приводит к тому, что в отсутствие диссипации взаимодействия нет. Конечный радиус приводит к изменению граничных условий и к появлению взаимодействия без диссипации. Строгий подход возможен на основе вакуумных тензорных ФГ электродинамики, но существенно сложнее. Он также требует численного определения пространственно-частотных спектральных интегралов. Получение обращенной формы оператора (т.е. численное решение задачи возбуждения двух связанных антенн) точечным

диполем также позволяет определить дисперсионную силу, но такой подход по сравнению с использованным требует обращения оператора краевой задачи на каждой частоте с последующим частотным интегрированием.

## Благодарности

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки России в рамках выполнения государственного задания (проект № FSRR-2020-0004).

## Конфликт интересов

Автор заявляет, что у него конфликта интересов.

## Список литературы

- [1] H.C. Pocklington. *Camb. Phil. Soc. Proc.*, **9**, 324 (1897).
- [2] H. Hertz. *Nature*, **39**, 450 (1889). DOI: 10.1038/039547a0
- [3] E. Hallen. *Nova Acta Regiae Societatis Scientiarum Upsaliensis. Ser.*, **4**, **11** (4), 1 (1938).
- [4] М.А. Леонтович, М.Л. Левин. *ЖТФ*, **14** (9), 481 (1944).
- [5] П.Л. Капица, В.А. Фок, Л.А. Вайнштейн. *ЖТФ*, **29** (10), 1188 (1959).
- [6] П.Л. Капица, В.А. Фок, Л.А. Вайнштейн. *ЖТФ*, **29** (10), 1177 (1959).
- [7] Л.А. Вайнштейн. *ЖТФ*, **29** (6), 673 (1959).
- [8] Л.А. Вайнштейн. *ЖТФ*, **29** (6), 689 (1959).
- [9] Л.А. Вайнштейн. *ЖТФ*, **31** (1), 29 (1961).
- [10] Л.А. Вайнштейн. *ЖТФ*, **31** (1), 45 (1961).
- [11] Л.А. Вайнштейн. *ЖТФ*, **37** (7), 1182 (1967).
- [12] Л.А. Вайнштейн, В.А. Фок. *ЖТФ*, **37** (7), 1189 (1967).
- [13] С.И. Эминов. *Радиотехника и электроника*, **38** (12), 2160 (1993).
- [14] В.Л. Данильчук, С.И. Эминов. *ЖТФ*, **65** (5), 201 (1995).
- [15] С.Н. Плотников, А.В. Сочилин, С.И. Эминов. *Радиотехника*, **7**, 34 (1996).
- [16] В.А. Неганов, И.В. Матвеев. *ДАН*, **373** (1), 36 (2000). [V.A. Neganov, I.V. Matveev. *Dokl. Phys.*, **45** (7), 317 (2000).]
- [17] В.А. Неганов, И.В. Матвеев, С.В. Медведев. *Письма в ЖТФ*, **26** (12), 86 (2000). [V.A. Neganov, I.V. Matveev, S.V. Medvedev. *Tech. Phys. Lett.*, **26**, 535 (2000). DOI: 10.1134/1.1262903]
- [18] В.А. Неганов, М.Г. Корнев, И.В. Матвеев. *Письма в ЖТФ*, **27** (4), 62 (2001). [V.A. Neganov, M.G. Kornev, I.V. Matveev. *Tech. Phys. Lett.*, **27** (2), 160 (2001). DOI: 10.1134/1.1352781]
- [19] В.А. Неганов, Д.С. Клюев, С.В. Медведев. *Письма в ЖТФ*, **27** (21), (2001). [V.A. Neganov, D.S. Klyuev, S.V. Medvedev. *Tech. Phys. Lett.*, **27**, 902 (2001). DOI: 10.1134/1.1424387]
- [20] С.И. Эминов. *Письма в ЖТФ*, **28** (5), 51 (2002). [S.I. Éminov. *Tech. Phys. Lett.*, **28** (3), 194 (2002). DOI: 10.1134/1.1467273]
- [21] С.И. Эминов. *Антенны*, **5**, 51 (2003).
- [22] С.И. Эминов. *Письма в ЖТФ*, **30** (22), 8 (2004). [S.I. Éminov. *Tech. Phys. Lett.*, **30** (11), 933 (2004). DOI: 10.1134/1.1829347]
- [23] С.И. Эминов. *ДАН*, **403** (3), 339 (2005). [S.I. Éminov. *Dokl. Phys.*, **50** (7), 371 (2005). DOI: 10.1134/1.2005363]
- [24] В.А. Неганов, Д.С. Клюев. *Антенны*, **3**, 7 (2005).
- [25] E. Forati, A.D. Mueller, P.G. Yarandi, G.W. Hanson. *IEEE Trans. AP*, **59**, **11**, 4355 (2011). DOI: 10.1109/TAP.2011.2164211
- [26] М.В. Давидович, С.П. Скобелев. *Радиотехника*, **1**, 106 (2014).
- [27] С.И. Эминов. *Письма в ЖТФ*, **43** (13), 3 (2017). [S.I. Éminov. *Tech. Phys. Lett.*, **43**, 593 (2017). DOI: 10.1134/S1063785017070045]
- [28] G.V. Hanson. *IEEE Trans.*, **AP-53** (11), 3426 (2005). DOI: 10.1109/APS.2005.1552484
- [29] P.J. Burke, S. Li, Z. Yu. *IEEE Trans. on Nanotechnology*, **5** (4), 314 (2006). DOI: 10.1109/TNANO.2006.877430
- [30] N. Fichtner, X. Zhou, P. Russeret. *IEEE 2007 Asia-Pacific Microwave Conf.*, 1 (2007). DOI: 10.1109/APMC.2007.4554722
- [31] Y. Huang, W.-Y. Yin, Q.H. Liu. *IEEE Trans. on Nanotechnology*, **7**, 331 (2008). DOI: 10.1109/TNANO.2007.915017
- [32] Y. Wang, Q. Wu. *Chinese Opt. Lett.*, **6** (10), 770 (2008). DOI: 10.3788/COL20080610.0770
- [33] Q. Wu, Y. Wang, S.-G. Zhang, L.-I. Zhuang. *IEEE 2008 Asia-Pacific Microwave Conf.*, 978 (2008). DOI: 10.1109/APMC.2008.4958448
- [34] J.M. Jornet, I. Akyildiz. *Proceedings of the Forth EuCAP* (Barcelona, 2010), p. 1–5.
- [35] S. Choi, K. Sarabandi. *2010 IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium*, 1 (2010). DOI: 10.1109/APS.2010.5560976
- [36] Sh.G. El-Sherbiny, S. Wageh, S.M. Elhalafawy, A.A. Sharshar. *Advances in Nano Research*, **1** (1), 13 (2013). DOI: 10.12989/ANR.2013.1.1.013
- [37] М. Davidovich, G. Kolesov, A. Kobets. *Инфокоммуникационные и радиоэлектронные технологии*, **4** (1), 17 (2021).
- [38] A. Lakhtakia, G.A. Slepyan, S.A. Maksimenko, A.V. Gusakov, O.M. Yevtushenko. *Carbon*, **36**, 1833 (1998).
- [39] G.Ya. Slepyan, S.A. Maksimenko, A. Lakhtakia, O.M. Yevtushenko, A.V. Gusakov. *Phys. Rev.*, **B 60**, 17136 (1999).
- [40] P. Franck, D. Baillargeat, B.K. Tay. *Intern. J. Microwave Wireless Technol.*, **6** (1), 57 (2014).
- [41] E.A. Bengio, D. Senic, L.W. Taylor, R.J. Headrick, M. King, P. Chen, C.A. Little, J. Ladbury, C.J. Long, C.L. Holloway, A. Babakhani, J.C. Booth, N.D. Orloff, M. Pasquali. *Appl. Phys. Lett.*, **114**, 203102 (2019). DOI: 10.1063/1.5093327
- [42] A. Chandra, D. Chahar, S. Sachdeva. *Intern. J. Engineer. Development and Research*, **4** (2), 1585 (2016).
- [43] M. Hajiyahya, M. Ishtaiwi, J. Sayyed, A. Saddouq. *Open J. Antennas and Propagation*, **9**, 57 (2021). DOI: 10.4236/ojapr.2021.94005
- [44] V. Barkaline, I. Abramov, E. Belogurov, A. Chashynski, V. Labunov, A. Pletezhov, Ya. Shukevich. *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*, **15** (1), 23 (2012).
- [45] V. Ryzhii, M. Ryzhii, T. Otsuji. *J. Appl. Phys.*, **101**, 083114 (2007). DOI: 10.1063/1.2717566
- [46] М.Л. Левин, С.М. Рыгов. *Теория равновесных тепловых флуктуаций в электродинамике* (Наука, М., 1967)
- [47] М.В. Давидович. *Радиотехника и электроника*, **66** (7), 682 (2021). [M.V. Davidovich. *J. Comm. Technol. Electron.*, **66**, 853 (2021). DOI: 10.1134/S1064226921060085]
- [48] Г.Т. Марков, А.Ф. Чаплин. *Возбуждение электромагнитных волн* (Радио и связь, М., 1983)

- [49] В.А. Неганов, Е.И. Нефедов, Г.П. Яровой. *Полосково-щелевые структуры сверх- и крайневисоких частот* (Наука, М., 1996)
- [50] Г.Т. Марков, Д.М. Сазонов. *Антенны* (Энергия, М., 1975)
- [51] R.F. Harrington. *Field Computation by Moment Methods* (Macmillan, NY., 1968)
- [52] Р. Митра (ред.). *Вычислительные методы в электродинамике* (Мир, М., 1977) [Пер. с англ.: *Computer techniques for electromagnetics*. Ed. R. Mittra. (Pergamon Press, Oxford, NY., Toronto, Sydney, Braunschweig, 1973)]
- [53] С.М. Рыгов, Ю.А. Кравцов, В.И. Тагарский. *Введение в статистическую радиофизику. Ч. II. Случайные поля* (Наука, М., 1978)
- [54] H.B.G. Casimir. Proc. Kon. Ned. Akad. Wetenschap, **В 51**, 793 (1948).
- [55] M.B.U. Mohideen, G.L. Klimchitskaya, V.M. Mostepanenko. *Advances in the Casimir Effect* (Oxford University Press, NY., 2009)
- [56] U. Leonhardt. *Forces of the Quantum Vacuum: an Introduction to Casimir Physics*, ed. W.M.R. Simpson (World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore, 2015)
- [57] A.I. Volokitin, B.N.J. Persson. *Electromagnetic Fluctuations at the Nanoscale. Theory and Applications* (Springer, Heidelberg, 2017)
- [58] Е.М. Лифшиц. ЖЭТФ, **29** (1), 94 (1955).
- [59] I.S. Nefedov, M.V. Davidovich, O.E. Glukhova, M.M. Slepchenkov, M. Rubi. Phys. Rev. B, **104**, 085409 (2021). DOI: 10.1103/PhysRevB.104.085409
- [60] E. Noruzifar, T. Emig, U. Mohideen, R. Zandi. Phys. Rev. B, **86**, 115449 (2012). DOI: 10.1103/PhysRevB.86.115449
- [61] S.J. Rahi, T. Emig, R.L. Jaffe, M. Kardar. Phys. Rev., **A78**, 012104 (2008). DOI: 10.1103/PhysRevA.78.012104
- [62] М.В. Давидович. УФН, **180** (6), 623 (2010). [M.V. Davidovich. Phys. Usp., **53**, 595 (2010). DOI: 10.3367/UFNe.0180.201006e.0623]
- [63] А.П. Прудников, Ю.А. Маричев, О.И. Брычков. *Интегралы и ряды. Элементарные функции* (Наука, М., 1984)