

01.5

Ламинарный хаос в экспериментальной системе с квазипериодической модуляцией времени запаздывания

© В.И. Пономаренко¹, Е.Е. Лапшева², А.В. Курбако¹, М.Д. Прохоров¹¹ Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, Саратов, Россия² Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского, Саратов, Россия
E-mail: pomarenkovi@gmail.com

Поступило в Редакцию 10 мая 2023 г.

В окончательной редакции 6 марта 2024 г.

Принято к публикации 9 марта 2024 г.

Впервые экспериментально показана возможность существования ламинарного хаоса в радиотехническом генераторе с запаздывающей обратной связью с квазипериодической модуляцией времени задержки. Проведено сравнение режимов ламинарного хаоса при модуляции времени задержки генератора одночастотным и двухчастотным сигналом.

Ключевые слова: системы с запаздыванием, квазипериодическое изменение задержки, ламинарный хаос, радиофизический эксперимент.

DOI: 10.61011/PJTF.2024.11.57908.19624

Физические процессы, для описания которых необходимо учитывать конечную скорость распространения сигналов, обычно моделируются уравнениями с запаздывающим аргументом. Модельные уравнения систем с запаздыванием исследуются во многих областях науки и в инженерных приложениях [1–3]. Наличие запаздывания в системе в общем случае усложняет ее динамику. В результате даже дифференциальные уравнения первого порядка с запаздыванием могут демонстрировать хаотические колебания очень высокой размерности [4].

Следует отметить, что наиболее подробно исследованы системы с запаздыванием, имеющие постоянное значение времени задержки. Если же время задержки в системе меняется, то ее динамика, как правило, становится еще более сложной [5–7]. Как в системах с постоянной задержкой, так и в системах с переменной задержкой обычно наблюдаются режимы, характеризующиеся сильными и быстрыми хаотическими флуктуациями динамической переменной. Такие режимы колебаний называются турбулентным хаосом и имеют высокую размерность. Однако при некоторых параметрах модуляции времени задержки внешним сигналом система с запаздыванием может демонстрировать более простое поведение, при котором размерность хаотического аттрактора системы существенно уменьшается. Такой тип хаотического поведения, наблюдающийся в системах с периодически изменяющимся временем задержки, был обнаружен сравнительно недавно и назван ламинарным хаосом [8]. Для него характерны длительные ламинарные фазы с почти постоянным значением динамической переменной, которые периодически прерываются короткими нерегулярными всплесками. При этом значение переменной меняется хаотически при переходе из одной ламинарной фазы в другую, а длительность ламинарных

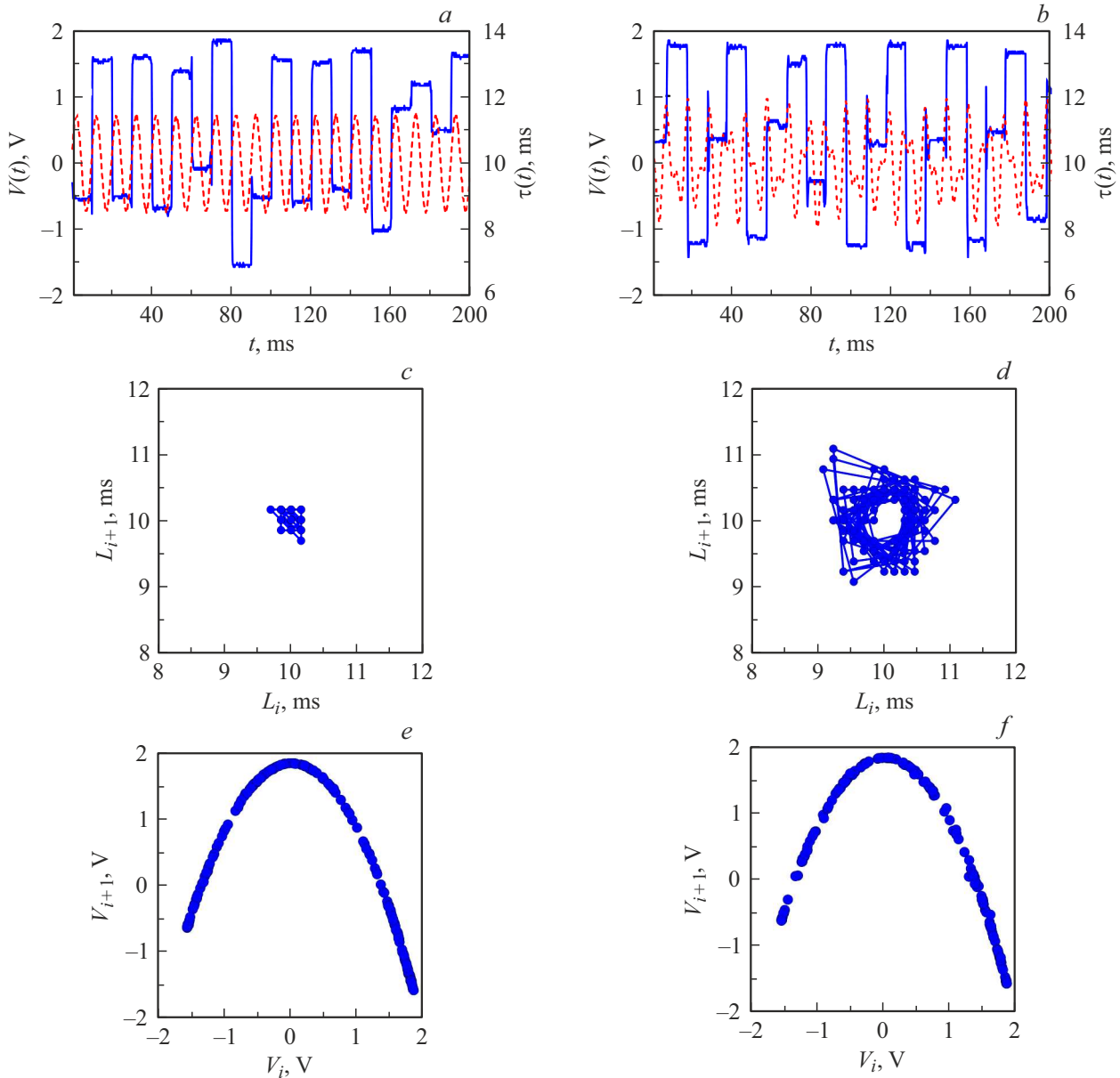
фаз меняется периодически и определяется отображением окружности.

Явление ламинарного хаоса было исследовано численно и экспериментально в различных системах с периодически изменяющимся временем задержки [9–12]. При взаимодействии таких систем была показана возможность их синхронизации в режиме ламинарного хаоса [13,14]. В недавней работе [15] было впервые теоретически показано, что ламинарный хаос может наблюдаться также в системах с запаздыванием с квазипериодической модуляцией времени задержки. В режиме ламинарного хаоса в таких системах динамическая переменная меняется хаотически при переходе из одной ламинарной фазы в другую, а длительность ламинарных фаз меняется квазипериодически и может быть описана отображением на торе.

В настоящей работе нами впервые показано в эксперименте существование ламинарного хаоса в системе с квазипериодической модуляцией времени задержки. В качестве объекта исследования выбран радиотехнический генератор с запаздывающей обратной связью, в котором реализована возможность модуляции времени задержки внешним двухчастотным сигналом. Динамика такого кольцевого генератора, состоящего из линии задержки с переменным временем запаздывания, нелинейного элемента и низкочастотного RC-фильтра первого порядка, описывается следующим уравнением:

$$RC\dot{V}(t) = -V(t) + f\left(V(t - \tau(t))\right), \quad (1)$$

где $V(t)$ и $V(t - \tau(t))$ — напряжения на входе и выходе линии задержки соответственно, $\tau(t)$ — переменное время задержки, R и C — сопротивление и емкость элементов фильтра, f — передаточная характеристика



a, b — временные реализации сигналов $V(t)$ (сплошная линия) и $\tau(t)$ (пунктирная линия); *c, d* — зависимости длительности последующей ламинарной фазы от длительности предыдущей; *e, f* — зависимости уровня последующей ламинарной фазы от уровня предыдущей. Фрагменты *a, c, e* соответствуют случаю периодической модуляции времени задержки, фрагменты *b, d, f* — случаю квазипериодической модуляции времени задержки.

нелинейного элемента. Мы рассмотрели случай периодического изменения времени задержки

$$\tau(t) = \tau_0 + \tau_1 \sin(2\pi\nu_1 t) \quad (2)$$

и случай его квазипериодического изменения с двумя несоизмеримыми частотами

$$\tau(t) = \tau_0 + \tau_1 \sin(2\pi\nu_1 t) + \tau_2 \sin(2\pi\nu_2 t), \quad (3)$$

где τ_0 — среднее значение времени запаздывания генератора, τ_1 и τ_2 — амплитуды модуляции, а ν_1 и ν_2 — несоизмеримые частоты модуляции.

В нашем эксперименте низкочастотный фильтр генератора являлся аналоговым элементом, а нелинейный элемент и линия задержки генератора были реализованы в цифровом виде. Блок-схема экспериментальной установки в целом соответствует схеме, которая приведена в работе [10] и была использована нами для гармонической модуляции (2) времени задержки. Модификация установки состоит в том, что для подачи внешнего сигнала, управляющего модуляцией времени запаздывания, нами дополнительно реализован суммирующий усилитель, позволяющий получить двухчастотное внешнее воздействие.

Управляющие параметры генератора имели следующие значения: $RC = 0.5 \text{ ms}$, $f(V) = \lambda - V^2$, где параметр нелинейности $\lambda = 1.85$, $\tau_0 = 10 \text{ ms}$. Частоты внешнего воздействия, модулирующего время задержки, имели несоизмеримые значения $\nu_1 = 99 \text{ Hz}$ и $\nu_2 \approx \nu_1 \sqrt{\pi} = 175.47 \text{ Hz}$. Амплитуды модуляции τ_1 и τ_2 мы меняли от 0.5 до 2 ms. Сигнал $V(t)$ и внешний сигнал модуляции времени задержки оцифровывались при помощи осциллографа с частотой 6.5 kHz. При этом время задержки τ_0 соответствовало 65 отсчетам дискретного времени.

Результаты экспериментального исследования динамики радиотехнического генератора с модуляцией времени запаздывания представлены на рисунке. Для сравнения в левом столбце на рисунке приведены графики, полученные при периодически изменяющемся времени задержки (2), а в правом столбце — графики, полученные при квазипериодической модуляции времени задержки (3).

На рисунке, *a* приведены временная реализация сигнала $V(t)$ в режиме ламинарного хаоса и временная реализация сигнала (2) при $\tau_1 = 1.5 \text{ ms}$. Переменная $V(t)$ демонстрирует типичную для ламинарного хаоса динамику, наблюдаемую в случае, когда период внешнего воздействия $T = 1/\nu_1$ близок к величине τ_0 . При этом длительности ламинарных фаз примерно одинаковы, а их уровни, определяемые величиной $V(t)$, изменяются хаотически при переходе из одной ламинарной фазы в другую. Отметим, что при численном моделировании ламинарные фазы представляют собой практически горизонтальные полки [8], а на экспериментальных графиках (см. рисунок, *a*) имеются небольшие осцилляции $V(t)$ внутри участков ламинарного поведения, что связано с шумами эксперимента. На рисунке, *b* представлены временная реализация системы (1) при квазигармоническом изменении $\tau(t)$ и временная реализация сигнала (3) при $\tau_1 = 1.3 \text{ ms}$ и $\tau_2 = 0.7 \text{ ms}$. В этом случае ламинарные фазы имеют разную длительность, а их уровни, как и на рисунке, *a*, меняются хаотически.

Длительности L_i ламинарных фаз удобно анализировать, построив зависимость вида $L_{i+1}(L_i)$, т.е. зависимость длительности последующей ламинарной фазы от длительности предыдущей. На фрагменте *c* точки на плоскости (L_i, L_{i+1}) расположены в центре рисунка, образуя небольшое облако. Это указывает на то, что в системе с периодическим изменением времени задержки длительности ламинарных фаз почти одинаковы. На фрагменте *d* точки на плоскости (L_i, L_{i+1}) формируют вокруг центра рисунка похожую на кольцо фигуру, что указывает на квазипериодическое изменение длительности ламинарных фаз в системе с двухчастотной модуляцией времени задержки. При использованной нами в эксперименте частоте выборки точек, равной 6.5 kHz, точки на плоскостях (L_i, L_{i+1}) не могут быть расположены ближе друг к другу, чем на удалении в 0.154 ms. Для наглядности мы соединили последовательные точки на фрагментах *c* и *d* рисунка линиями.

На фрагментах *e* и *f* рисунка построены зависимости вида $V_{i+1}(V_i)$, т.е. зависимости уровня V_{i+1} последующей ламинарной фазы от уровня V_i предыдущей ламинарной фазы. Для обоих случаев (периодической и квазипериодической модуляции времени задержки) полученные кривые хорошо совпадают с истинной передаточной характеристикой f нелинейного элемента генератора. Отметим, что экспериментальные результаты, представленные на фрагментах *d* и *f*, качественно совпадают с численными результатами, полученными в [15].

Итак, нами впервые экспериментально показано, что ламинарный хаос может существовать в системе с квазипериодическим изменением времени задержки. Проведена реконструкция нелинейной функции радиотехнического генератора в режиме ламинарного хаоса при квазипериодической модуляции задержки и показано, что длительность ламинарных фаз в таком генераторе меняется квазипериодически.

Финансирование работы

Работа выполнена в рамках государственного задания Саратовского филиала Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН.

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

- [1] T. Erneux, *Applied delay differential equations* (Springer-Verlag, N.Y., 2009).
- [2] Y. Kuang, *Delay differential equations with applications in population dynamics* (Academic Press, Boston, 1993).
- [3] В.И. Пономаренко, М.Д. Прохоров, А.С. Караваев, Б.П. Безручко, *Системы с запаздыванием (реконструкция моделей и их приложение)* (Изд-во Саратов. ун-та, Саратов, 2016).
- [4] K. Ikeda, K. Matsumoto, *Physica D*, **29**, 223 (1987). DOI: 10.1016/0167-2789(87)90058-3
- [5] D.V. Senthilkumar, M. Lakshmanan, *Chaos*, **17**, 013112 (2007). DOI: 10.1063/1.2437651
- [6] L. Lazarus, M. Davidow, R. Rand, *Int. J. Nonlinear Mech.*, **78**, 66 (2016). DOI: 10.1016/j.jnnonlinmec.2015.10.005
- [7] Е.В. Григорьева, С.А. Кашенко, ДАН, **474** (2), 159 (2017). DOI: 10.7868/S0869565217140043 [E.V. Grigorieva, S.A. Kashchenko, *Dokl. Math.*, **95** (3), 282 (2017). DOI: 10.1134/S1064562417030073].
- [8] D. Müller, A. Otto, G. Radons, *Phys. Rev. Lett.*, **120**, 084102 (2018). DOI: 10.1103/PhysRevLett.120.084102
- [9] J.D. Hart, R. Roy, D. Müller-Bender, A. Otto, G. Radons, *Phys. Rev. Lett.*, **123**, 154101 (2019). DOI: 10.1103/PhysRevLett.123.154101
- [10] Д.Д. Кульминский, В.И. Пономаренко, М.Д. Прохоров, *Письма в ЖТФ*, **46** (9), 16 (2020). DOI: 10.21883/PJTF.2020.09.49366.18218 [D.D. Kul'minskii, V.I. Ponomarenko, M.D. Prokhorov, *Tech. Phys. Lett.*, **46** (5), 423 (2020). DOI: 10.1134/S1063785020050090].

- [11] T. Jüngling, T. Stemler, M. Small, Phys. Rev. E, **101**, 012215 (2020). DOI: 10.1103/PhysRevE.101.012215
- [12] D. Müller-Bender, A. Otto, G. Radons, J.D. Hart, R. Roy, Phys. Rev. E, **101**, 032213 (2020). DOI: 10.1103/PhysRevE.101.032213
- [13] Д.Д. Кульминский, В.И. Пономаренко, М.Д. Прохоров, Письма в ЖТФ, **48** (4), 11 (2022). DOI: 10.21883/PJTF.2022.04.52077.19044 [D.D. Kulminskiy, V.I. Ponomarenko, M.D. Prokhorov, Tech. Phys. Lett., **48** (2), 54 (2022). DOI: 10.21883/TPL.2022.02.53581.19044].
- [14] T. Khatun, D. Biswas, T. Banerjee, Eur. Phys. J. Plus, **137**, 561 (2022). DOI: 10.1140/epjp/s13360-022-02778-5
- [15] D. Müller-Bender, G. Radons, Phys. Rev. E, **107**, 014205 (2023). DOI: 10.1103/PhysRevE.107.014205