

03

Устойчивость потенциального вращения идеальной жидкости

© Д.А. Шалыбков

Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН, Санкт-Петербург, Россия
E-mail: shalybkov@yandex.ru

Поступило в Редакцию 2 сентября 2024 г.

В окончательной редакции 12 октября 2024 г.

Принято к публикации 12 октября 2024 г.

В линейном приближении показано, что для идеальной несжимаемой жидкости с однородной плотностью и потенциальной скоростью вращения при наличии граничных условий непротекания не существует асимметричных нормальных мод (как устойчивых, так и неустойчивых). Существуют только устойчивые сингулярные моды.

Ключевые слова: линейная устойчивость, несжимаемая жидкость.

DOI: 10.61011/PJTF.2025.03.59824.20102

Задача об устойчивости идеальной несжимаемой вращающейся жидкости представляет собой классическую проблему гидродинамики [1–4]. Хорошо известно, что в линейном приближении твердотельное вращение устойчиво по отношению к любым возмущениям (см., например, [5]).

Условие устойчивости для вращающейся идеальной несжимаемой жидкости с однородной плотностью по отношению к осесимметричным возмущениям было получено Рэлеем [6]. Для цилиндрической системы координат (r, φ, z) условие Рэля имеет вид

$$\frac{1}{r^3} \frac{d}{dr} (r^2 \Omega) \geq 0, \quad (1)$$

где Ω — угловая скорость вращения. Позднее было показано [7], что условие (1) является необходимым и достаточным условием устойчивости. Движение несжимаемой идеальной жидкости с однородной плотностью ρ описывается уравнениями Эйлера и непрерывности

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U} \nabla) \mathbf{U} = -\frac{1}{\rho} \nabla P, \quad \text{div} \mathbf{U} = 0, \quad (2)$$

где \mathbf{U} — скорость, P — давление. Для вращающейся жидкости удобно использовать цилиндрическую систему координат (r, φ, z) , в которой скорость вращающейся жидкости имеет вид

$$\mathbf{U} = (0, r\Omega(r), 0), \quad (3)$$

где $\Omega(r)$ — угловая скорость вращения, которая для идеальной жидкости является произвольной (достаточно гладкой) функцией радиуса, удовлетворяющей уравнению (2) и граничным условиям. В стационарном случае уравнение (2) для скорости вида (3) принимает вид

$$\Omega^2 r = \frac{1}{\rho} \nabla P. \quad (4)$$

В линейном приближении для исследования устойчивости используется метод малых возмущений, в котором

решение представляется в виде

$$\begin{aligned} U + u &= (u_r(r, \varphi, z, t), r\Omega(r) \\ &+ u_\varphi(r, \varphi, z, t), u_z(r, \varphi, z, t)), \\ P + p &= P(r) + p(r, \varphi, z, t), \end{aligned} \quad (5)$$

где величины u_r , u_φ , u_z и p малы по сравнению с невозмущенными величинами. Подставляя выражения (5) в систему (2) и сохраняя только линейные по возмущенным величинам члены, получим линейную систему уравнений для возмущенных величин с коэффициентами, зависящими только от радиальной координаты r . В этом случае решение можно представить в виде суммы нормальных мод вида

$$F = F(r) \exp(i(m\varphi + kz + \omega t)), \quad (6)$$

где $F(r)$ представляет собой произвольную искомую функцию. С учетом геометрии задачи аксиальное число k может принимать произвольные вещественные значения, азимутальное число m может быть произвольным целым числом, а инкремент ω — произвольным комплексным числом. Разложение на нормальные моды (6) преобразует трехмерную задачу в одномерную. Если собственные частоты ω имеют только положительные мнимые части, то течение линейно устойчиво. Если существует хотя бы одна собственная частота с отрицательной мнимой частью, то течение неустойчиво. После простых преобразований линейную систему можно привести к одному уравнению второго порядка для радиальной скорости u_r

$$\begin{aligned} \omega_d^2 \frac{d}{dr^2} \left[\frac{r^2}{k^2 r^2 + m^2} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r u_r) \right] - \omega_d^2 u_r \\ - \omega_d m r \frac{d}{dr} \left[\frac{r^2}{k^2 r^2 + m^2} \frac{d}{dr} (r^2 \Omega) \right] u_r \\ + \frac{k^2 r^2}{k^2 r^2 + m^2} \frac{1}{r^3} \frac{d}{dr} (r^2 \Omega)^2 u_r = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

где $\omega_d = \omega + m\Omega$ — доплеровский инкремент. Отметим, что уравнение (7) совпадает с уравнением (18) из работы [5] при отсутствии аксиальной скорости ($W = 0$ в обозначениях работы [5]). Для нас важно, что уравнение (7) получено без деления на ω_d , который может обращаться в нуль в точке r_0 , такой, что

$$\omega = -m\Omega(r_0). \quad (8)$$

Для полной постановки задачи необходимо задать граничные условия. В настоящей работе будем рассматривать область, не ограниченную по аксиальной координате z , простирающуюся в пределах от внутреннего радиуса $r_{in} > 0$ (как будет видно далее потенциальное вращение не может достигать оси вращения, см. (10)) до внешнего радиуса $r_{out} < \infty$ и занимающую весь угловой сектор $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. В работе использованы граничные условия непротекания

$$u_r(r_{in}) = u_r(r_{out}) = 0. \quad (9)$$

Уравнение (7) совместно с граничными условиями (9) составляет задачу на собственные значения для частоты ω . Ясно, что условие (8) может быть выполнено, только если мнимая часть ω равна нулю. Кроме того, при выводе (7) предполагается, что числа k и m не равны одновременно нулю. Легко проверить, что если $k = m = 0$, то не выполняется граничное условие (9). Покажем, что для потенциального вращения жидкости при невыполнении условия (8) нетривиальных решений уравнения (7) не существует. Вращение является потенциальным, если $\text{rot} \mathbf{U} = 0$. Для скорости вида (3) это условие означает, что

$$\Omega = Cr^{-2}, \quad (10)$$

где C — константа, определяемая граничными условиями. Отметим, что, согласно (10), потенциальное вращение не может простирается до оси вращения. Кроме того, согласно (1), потенциальное вращение является устойчивым по отношению к осесимметричным возмущениям и, например, для цилиндрического течения Куэтта отделяет устойчивые течения от неустойчивых (см., например, [1]).

Предположим, что условие (8) не выполняется при $r_{in} \leq r \leq r_{out}$, и покажем, что в этом случае нетривиальных решений уравнения (7) не существует. Действительно, предположим обратное, что существуют нетривиальные решения уравнения (7), такие, что условие (8) не выполняется. В этом случае можно разделить уравнение (7) на ω_d^2 . Умножая полученное уравнение на ru_r^* , где u_r^* — функция, комплексно-сопряженная с u_r , и интегрируя по частям с учетом граничных условий (9),

получим

$$\int_{r_{in}}^{r_{out}} \frac{r}{k^2 r^2 + m^2} \left| \frac{d}{dr}(ru_r) \right|^2 dr + \int_{r_{in}}^{r_{out}} \left(1 + \frac{mr}{\omega_d} \frac{d}{dr} \left[\frac{r^2}{k^2 r^2 + m^2} \frac{d}{dr}(r^2 \Omega) \right] - \frac{k^2}{k^2 r^2 + m^2} \frac{1}{r} \frac{d}{dr}(r^2 \Omega)^2 \right) r |u_r|^2 dr = 0. \quad (11)$$

Соответственно для потенциального течения (10) третье и четвертое слагаемые обнуляются, и выражение (11) принимает вид

$$\int_{r_{in}}^{r_{out}} \frac{r}{k^2 r^2 + m^2} \left| \frac{d}{dr}(ru_r) \right|^2 dr + \int_{r_{in}}^{r_{out}} r |u_r|^2 dr = 0. \quad (12)$$

Для нетривиального решения u_r оба слагаемых в выражении (12) положительны, и, как результат, это выражение не может быть удовлетворено. Соответственно исходное предположение о существовании нетривиального решения уравнения (7) с граничными условиями (9) при невыполнении условия (8) неверно, что и требовалось доказать.

Таким образом, в настоящей работе показано, что проблема линейной устойчивости вращения идеальной жидкости вида (3) по отношению к асимметричным возмущениям неразрешима для нормальных мод, если вращение является потенциальным (т. е. имеет вид (10)).

Отметим, что уравнение (7) может быть разрешимо для сингулярных мод, для которых в какой-либо точке течения выполнено условие (8).

Однако, как было отмечено выше, выполнение условия (8) означает, что собственная частота является вещественным числом, и, следовательно, означает устойчивость соответствующей моды. С учетом устойчивости потенциального течения (согласно критерию (1)) к осесимметричным возмущениям потенциальное вращение идеальной жидкости устойчиво по отношению к любым возмущениям аналогично твердотельному вращению.

Подчеркнем, что условие однородности жидкости является существенным. Например, при наличии устойчивой вертикальной стратификации плотности потенциальное вращение становится неустойчивым по отношению к асимметричным возмущениям (см., например, [8–10]).

Благодарности

Автор выражает благодарность редактору и рецензенту за замечания, которые позволили существенно улучшить стиль статьи.

Конфликт интересов

Автор заявляет, что у него нет конфликта интересов.

Список литературы

- [1] S. Chandrasekhar, *Hydrodynamic and hydromagnetic stability*(Clarendon Press, Oxford, 1961).
- [2] X. Гринспен, *Теория вращающихся жидкостей* (Гидрометеоиздат, Л., 1975). [H.P. Greenspan, *The theory of rotating fluids* (Cambridge University Press, Cambridge, 1968).].
- [3] P.G. Drazin, W. H. Reid, *Hydrodynamic stability* (Cambridge University Press, Cambridge, 1981).
- [4] Ф. Дразин, *Введение в теорию гидродинамической устойчивости* (Физматлит, М., 2005). [P.G. Drazin, *Introduction to hydrodynamic stability* (Cambridge University Press, Cambridge, 2002).].
- [5] L.N. Howard, A.S. Gupta, *J. Fluid Mech.*, **14**, 463 (1962). DOI: 10.1017/S0022112062001366
- [6] Lord Rayleigh, *Proc. R. Soc. Lond. A*, **93**, 148 (1917). DOI: 10.1098/rspa.1917.0010
- [7] J.L. Synge, *Trans. R. Soc. Can.*, **27**, 1 (1933).
- [8] D. Shalybkov, G. Rüdiger, *Astron. Astrophys.*, **438**, 411 (2005). DOI: 10.1051/0004-6361:20042492
- [9] J. Park, P. Billant, *J. Fluid Mech.*, **725**, 262 (2013). DOI: 10.1017/jfm.2013.186
- [10] W. Oxley, R.R. Kerswell, *J. Fluid Mech.*, **991**, A16 (2024). DOI: 10.1017/jfm.2024.549