11

Связанные хаотический генератор и многочастотная квазипериодическая система

© А.П. Кузнецов, Л.В. Тюрюкина

Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН,
Саратов, Россия
E-mail: turukinalv@yandex.ru

Поступило в Редакцию 20 июня 2024 г.
В окончательной редакции 23 декабря 2024 г.
Принято к публикации 23 декабря 2024 г.

Рассмотрено взаимодействие системы с хаосом (генератор Кислова–Дмитриева) и многочастотными квазипериодическими колебаниями (ансамбль генераторов ван дер Поля). Выявлены бифуркации удвоения инвариантного тора высокой размерности и возникновение хаоса при его разрушении. Обнаружен каскад своеобразных бифуркаций хаотического аттрактора, отвечающих появлению разного числа дополнительных нулевых показателей Ляпунова. Показана устойчивость возможного в системе сценария Ландау–Хопфа при взаимодействии с хаотической подсистемой.

Ключевые слова: генератор хаоса, квазипериодичность, показатели Ляпунова, бифуркация.

DOI: 10.61011/PJTF.2025.08.60163.20030

Исследование связанных генераторов является одной из центральных задач как радиофизики и электроники, так и нелинейной теории колебаний в целом [1,2]. Развитие компьютерной техники и теории динамических систем и ее приложений в отношении многомерных систем [3–8] делает актуальной задачу о колебаниях не только в классическом случае двух генераторов, но и в бо́льшем их числе [9–13]. Отдельные генераторы при этом могут демонстрировать периодические, квазипериодические или хаотические режимы. Малоисследованным является вопрос о взаимодействии нескольких генераторов с разными типами колебаний. Одним из вариантов может служить связь хаотической и многочастотной квазипериодической подсистем. В настоящей работе в качестве первой подсистемы выберем генератор Кислова–Дмитриева [14] в хаотическом режиме. Он представляет собой замкнутую в кольцо цепочку из нелинейного усилителя, *RLC*-фильтра и инерционного элемента. Чтобы обеспечить во второй подсистеме возможность квазипериодических колебаний с разным числом несоизмеримых частот, выберем систему пяти связанных генераторов ван дер Поля [15]. Подобная система рассмотрена также в [16,17]. Отметим, что уравнение ван дер Поля описывает не только классический генератор, но и большое число систем различной природы [18]. В системе [15] при уменьшении параметра связи за порог возбуждения последовательно переходят новые моды, так что рождаются все более высокочастотные квазипериодические колебания. Эта картина соответствует известному сценарию Ландау–Хопфа [19]. Наличие пяти осцилляторов позволяет реализовать несколько шагов такого сценария. Отметим, что единичный осциллятор, связанный с генератором Кислова–Дмитриева, рассмотрен в [20]. Продемонстрирована, в частности, возможность стабилизирующего действия генератора ван дер Поля на хаотический генератор. Подобные системы могут представлять интерес и с точки зрения приложений, например в задачах коммуникации и управления хаосом.

В соответствии с [14,15,20] можно записать уравнения рассматриваемой системы

$$\ddot{x} + \frac{1}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x + k(\dot{x} - \dot{x}_5) = z,$$

$$T\dot{z} + z = Mx\exp(-x^2),$$

$$\ddot{x}_n - (\lambda_n - x_n^2)\dot{x}_n + \left(1 + \frac{\Delta}{4}(n-1)\right)x_n$$

$$+ \frac{\mu}{4}\sum_{i=1}^{5}(\dot{x}_n - \dot{x}_i) = 0,$$

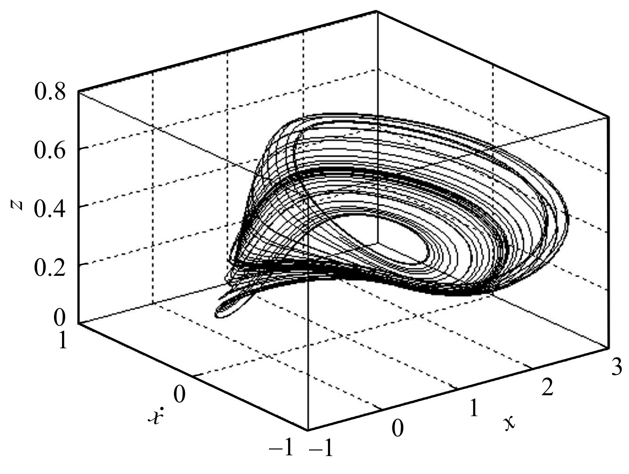

Рис. 1. Фазовый портрет индивидуального генератора Кислова–Дмитриева в хаотическом режиме. $T = 10$, $Q = 20$, $M = 2.75$, $\omega_0 = 0.5$.

Связь типов режимов и спектра показателей Ляпунова

Обозначение	Тип режима	Спектр старших показателей Ляпунова
P	Периодический (предельный цикл)	$\Lambda_1 = 0,\ \Lambda_{2,3,4,5,6,7} < 0$
$2T$	Двухчастотный квазипериодический (двумерный тор)	$\Lambda_{1,2} = 0,\ \Lambda_{3,4,5,6,7} < 0$
$3T$	Трехчастотный квазипериодический (трехмерный тор)	$\Lambda_{1,2,3} = 0,\ \Lambda_{4,5,6,7} < 0$
$4T$	Четырехчастотный квазипериодический (четырехмерный тор)	$\Lambda_{1,2,3,4} = 0,\ \Lambda_{5,6,7} < 0$
$5T$	Пятичастотный квазипериодический (пятимерный тор)	$\Lambda_{1,2,3,4,5} = 0,\ \Lambda_{6,7} < 0$
$6T$	Шестичастотный квазипериодический (шестимерный тор)	$\Lambda_{1,2,3,4,5,6} = 0,\ \Lambda_7 < 0$
C	Хаос	$\Lambda_1 > 0,\ \Lambda_{2,3,4,5,6,7} \leqslant 0$

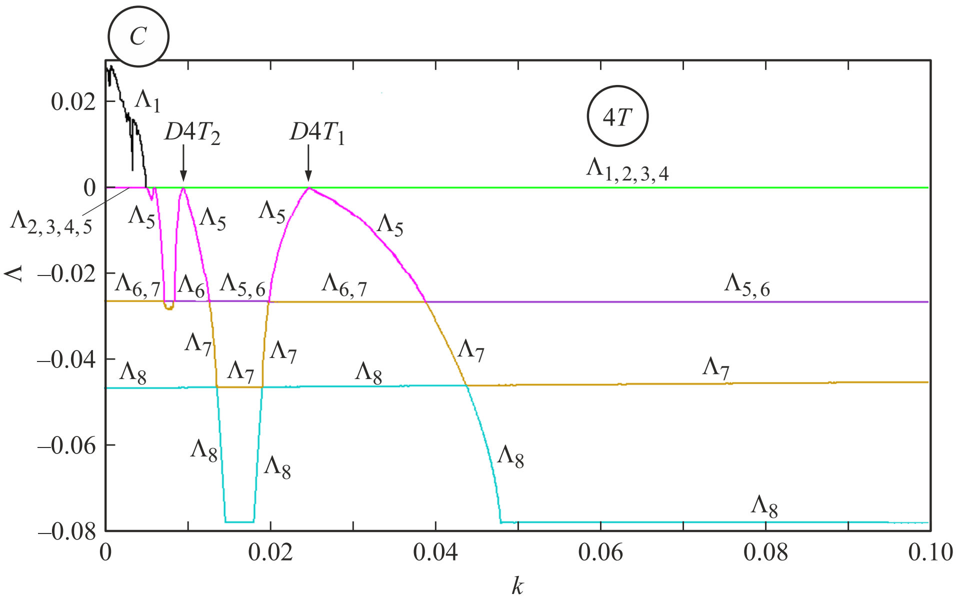

Рис. 2. Зависимость старших показателей Ляпунова системы (1) от параметра связи квазипериодической и хаотической подсистем k. $\mu = 0.25$, $\Delta = 3$. Параметры генератора Кислова–Дмитриева $M = 2.75$, $T = 10$, $Q = 20$, $\omega_0 = 0.5$.

$$\ddot{x}_5 - (\lambda_5 - x_5^2)\dot{x}_5 + (1+\Delta)x_5 + \frac{\mu}{4}\sum_{i=1}^{5}(\dot{x}_5 - \dot{x}_i) + k(\dot{x}_5 - \dot{x}) = 0. \qquad (1)$$

Здесь x, z — переменные генератора Кислова–Дмитриева, x_n — переменные генераторов ван дер Поля, n меняется от 1 до 4. Параметр Δ управляет взаимной частотной расстройкой генераторов ван дер Поля, причем частота первого принята за единицу. Параметр k отвечает за связь генератора Кислова–Дмитриева с квазипериодической подсистемой. Связь осуществляется через пятый генератор ван дер Поля и является диссипативной.

Выберем набор параметров генератора Кислова–Дмитриева $T = 10$, $Q = 20$, $M = 2.75$, $\omega_0 = 0.5$, который отвечает хаотическому режиму колебания, что иллюстрирует фазовый портрет на

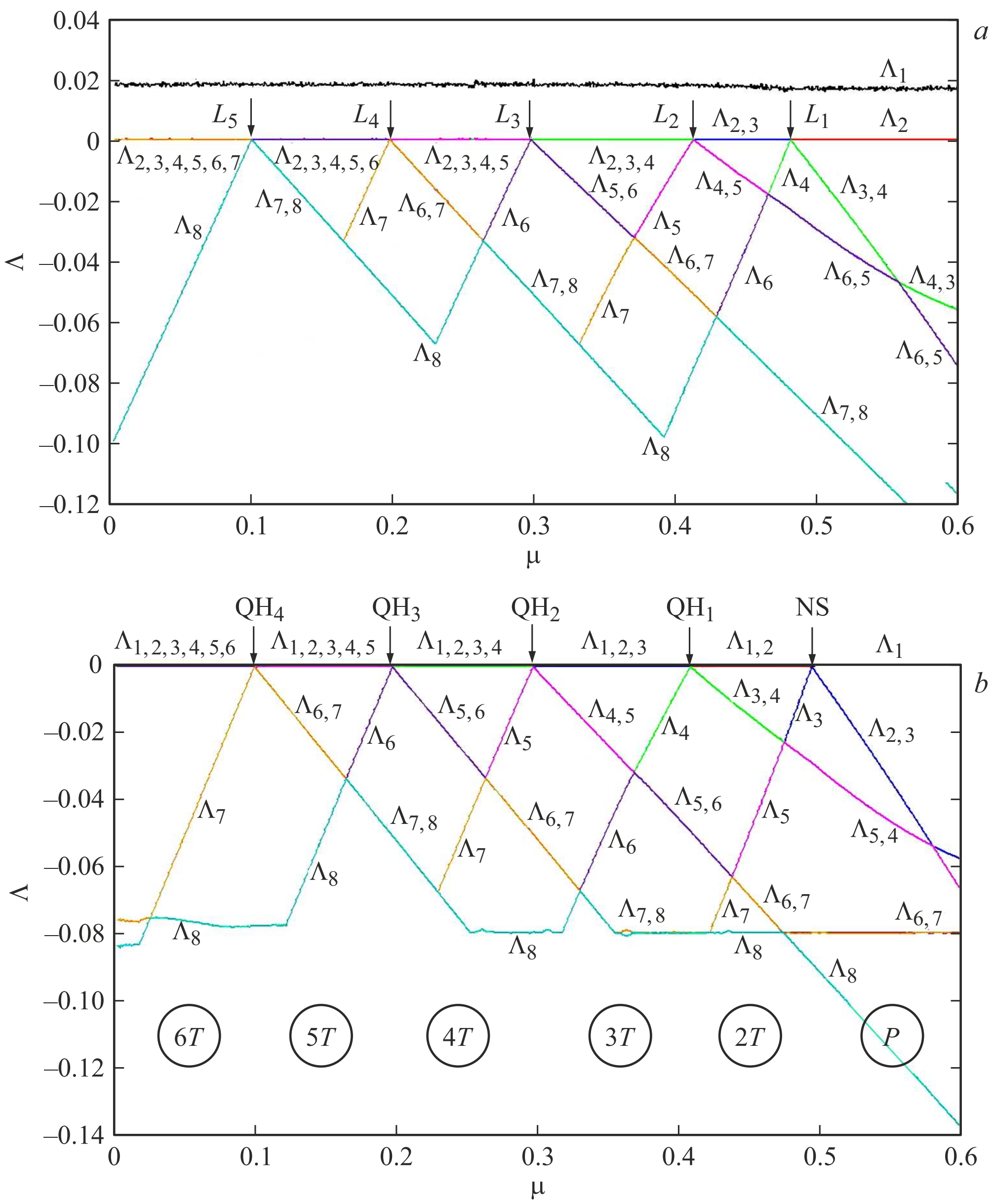

Рис. 3. Зависимость старших показателей Ляпунова системы (1) от параметра связи генераторов ван дер Поля μ. $k = 0.0025$ (a) и 0.016 (b).

рис. 1. Значение частоты $\omega_0 = 0.5$ обеспечивает частотную отстройку от всех генераторов ван дер Поля. По аналогии с [15] выберем значения параметров возбуждения генераторов ван дер Поля $\lambda_1 = 0.1$, $\lambda_2 = 0.2$, $\lambda_3 = 0.3$, $\lambda_4 = 0.4$, $\lambda_5 = 0.5$, а также $\Delta = 3$. В этом случае в квазипериодической подсистеме при уменьшении „внутреннего" параметра связи μ происходит поэтапный переход от периодического режима к пятичастотному квазипериодическому в соответствии со сценарием Ландау–Хопфа [15]. Отметим, что картина не зависит от некоторой вариации выбранных значений параметров.

Будем идентифицировать тип режима системы (1) по спектру показателей Ляпунова в соответствии с таблицей. На рис. 2 показаны графики восьми старших показателей в зависимости от параметра связи подсистем k. Выбранное значение параметра $\mu = 0.25$ отвечает трехчастотному режиму в ансамбле осцилляторов ван дер Поля [15]. В правой части рис. 2 можно видеть область четырехчастотного режима (4-тора) $4T$, для которого $\Lambda_{1,2,3,4} = 0$. Таким образом, взаимодействие с хаотической подсистемой привело к увеличению числа несоизмеримых частот (размерности тора), а хаос оказался подавленным. При уменьшении величины связи k четырехчастотный тор испытывает бифуркации удвоения в точках $D4T_1$ и $D4T_2$. Их признаком является обращение в нуль показателя Λ_5, который остается отрицательным в окрестности точек бифуркации [21]. Затем тор разрушается, и рождается хаос C, для которого $\Lambda_1 > 0$. В данном случае хаос имеет нетривиальную особенность — наличие четырех нулевых показателей, так что $\Lambda_{2,3,4,5} = 0$. Таким образом, к „обязательному" в системе с непрерывным временем нулевому показателю $\Lambda_2 = 0$ добавляются три дополнительных. Ранее было известно несколько примеров хаоса, но только с одним [22–25] и двумя [26] такими показателями. Отметим, что строгие доказательства пока отсутствуют, поэтому корректнее, как и в [24], говорить о „неотличимом от нуля в численных расчетах" показателе Ляпунова. Для этого при построении рис. 2 подобрана необходимая точность вычислений показателей.

Проиллюстрируем теперь картину режимов в зависимости от „внутреннего" параметра связи квазипериодической подсистемы μ для двух возрастающих значений k (рис. 3). В случае малого k на рис. 3, *a* при большой связи μ наблюдается классический хаос, когда $\Lambda_1 > 0$, $\Lambda_2 = 0$, а остальные показатели отрицательные. В точке L_1 происходит смена типа хаотического режима: теперь возникает дополнительный нулевой показатель Ляпунова, так что $\Lambda_1 > 0$, $\Lambda_{2,3} = 0$, а остальные показатели отрицательные. Далее в точках L_2, L_3, L_4 и L_5 последовательно возникает хаос с двумя, тремя, четырьмя и пятью дополнительными нулевыми показателями Ляпунова. Это некоторые своеобразные бифуркации, которые мы обозначили L (от Lyapunov exponents).

Увеличим теперь параметр связи k квазипериодической и хаотической подсистем (рис. 3, *b*). В этом случае хаос оказывается подавленным. В правой части рисунка теперь наблюдается бифуркация Неймарка–Сакера (NS) рождения двухчастотного тора с $\Lambda_{1,2} = 0$ из предельного цикла P, для которого $\Lambda_1 = 0$. С уменьшением μ происходит последовательный каскад квазипериодических бифуркаций Хопфа $QH_{1,2,3,4}$ мягкого рождения 3-тора, 4-тора и т. д. Критерием бифуркации такого типа является равенство двух отрицательных показателей до ее порога [21]. Например, при подходе к точке QH_1 совпадают показатели $\Lambda_3 = \Lambda_4$, а к точке QH_2 — $\Lambda_4 = \Lambda_5$ и т. д. Данную картину можно ассоциировать со сценарием Ландау–Хопфа. Отсюда можно сделать вывод, что сценарий Ландау–Хопфа, наблюдавшийся в ансамбле генераторов ван дер Поля, устойчив и не разрушается при взаимодействии с хаосом, если их связь сравнительно велика. Более того, добавляется еще одна бифуркация Хопфа рождения устойчивого 6-тора. В этом состоит существенное отличие от сценария Рюэля–Такенса [27].

Таким образом, для рассмотренной системы взаимодействие подсистем с хаотической динамикой и сценарием Ландау–Хопфа приводит к существенным особенностям: появлению тора более высокой размерности, его удвоению, каскаду точек поэтапного увеличения числа нулевых показателей Ляпунова в хаотическом режиме. Показана также устойчивость сценария Ландау–Хопфа по отношению к взаимодействию с хаотической подсистемой при сравнительно большой их связи.

Финансирование работы

Работа выполнена в рамках госзадания ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН.

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

[1] A. Pikovsky, M. Rosenblum, J. Kurths, *Synchronization: a universal concept in nonlinear science* (Cambridge University Press, 2001).
[2] A.G. Balanov, N.B. Janson, D.E. Postnov, O. Sosnovtseva, *Synchronization: from simple to complex* (Springer, 2009).
[3] Yu.A. Kuznetsov, *Elements of applied bifurcation theory* (Springer, 2023).
[4] Yu.A. Kuznetsov, H.G.E. Meijer, *Numerical bifurcation analysis of maps: from theory to software* (Cambridge University Press., 2019). DOI: 10.1017/9781108585804
[5] X. Chen, S. Qian, F. Yu, Z. Zhang, H. Shen, Y. Huang, S. Cai, Z. Deng, Y. Li, S. Du, Complexity, **2020**, 1 (2020). DOI: 10.1155/2020/8274685
[6] L. Přibylová, J. Ševčík, V. Eclerová, P. Klimeš, M. Brázdil, H.G.E. Meijer, Network Neurosci., **8** (1), 293 (2024). DOI: 10.1162/netn_a_00351
[7] M. Bucolo, A. Buscarino, L. Fortuna, S. Gagliano, Front. Phys., **10**, 862376 (2022). DOI: 10.3389/fphy.2022.862376
[8] M. Kopp, J. Telecommun. Electron. Comput. Eng., **16** (1), 13 (2024). DOI: 10.54554/jtec.2024.16.01.003
[9] А.В. Курбако, В.И. Пономаренко, М.Д. Прохоров, Письма в ЖТФ, **48** (19), 43 (2022). DOI: 10.21883/PJTF.2022.19.53596.19328 [A.V. Kurbako, V.I. Ponomarenko, M.D. Prokhorov, Tech. Phys. Lett., **48** (10), 38 (2022). DOI: 10.21883/TPL.2022.10.54796.19328].
[10] А.П. Кузнецов, Ю.В. Седова, Н.В. Станкевич, Письма в ЖТФ, **48** (24), 19 (2022). DOI: 10.21883/PJTF.2022.24.54018.19296 [A.P. Kuznetsov, Yu.V. Sedova, N.V. Stankevich, Tech. Phys. Lett., **48** (12), 56 (2022). DOI: 10.21883/TPL.2022.12.54949.19296].
[11] И.А. Корнеев, А.В. Слепнев, В.В. Семенов, Т.Е. Вадивасова, Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика, **28** (3), 324 (2020). DOI: 10.18500/0869-6632-2020-28-3-324-340
[12] B. Singhal, I.Z. Kiss, J.S. Li, SIAM J. Appl. Dyn. Syst., **22** (3), 2180 (2023). DOI: 10.1137/22M152120
[13] P. Mircheski, J. Zhu, H. Nakao, Chaos, **33** (10), 103111 (2023). DOI: 10.1063/5.0161119
[14] А. Дмитриев, Е. Ефремова, Н. Максимов, А. Панас, *Генерация хаоса* (Техносфера, 2012).
[15] A.P. Kuznetsov, S.P. Kuznetsov, I.R. Sataev, L.V. Turukina, Phys. Lett. A, **377**, (45-48), 3291 (2013). DOI: 10.1016/j.physleta.2013.10.013
[16] Н.В. Станкевич, А.П. Кузнецов, Е.П. Селезнев, ЖТФ, **87** (6), 952 (2017). DOI: 10.21883/JTF.2017.06.44525.206317967 [N.V. Stankevich, A.P. Kuznetsov, E.P. Seleznev, Tech. Phys., **62** (6), 971 (2017). DOI: 10.1134/S106378421706024X].

[17] Н.В. Станкевич, Е.С. Попова, А.П. Кузнецов, Е.П. Селезнев, Письма в ЖТФ, **45** (24), 17 (2019). DOI: 10.21883/PJTF.2019.24.48796 [N.V. Stankevich, E.S. Popova, A.P. Kuznetsov, E.P. Seleznev, Tech. Phys. Lett., **45** (12), 1233 (2019). DOI: 10.1134/S1063785019120265].
[18] А.П. Кузнецов, Е.С. Селиверстова, Д.И. Трубецков, Л.В. Тюрюкина, Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика, **22** (4), 3 (2014). DOI: 10.18500/0869-6632-2014-22-4-3-42
[19] Л.Д. Ландау, ДАН СССР, **44** (8), 339 (1944). [L.D. Landau, Dokl. Akad. Nauk USSR, **44**, 311 (1944).].
[20] Ю.П. Емельянова, А.П. Кузнецов, ЖТФ, **81** (4), 7 (2011). [Yu.P. Emel'yanova, A.P. Kuznetsov, Tech. Phys., **56** (4), 435 (2011). DOI: 10.1134/S106378421104013X].
[21] R. Vitolo, H. Broer, C. Simó, Regul. Chaot. Dyn., **16** (1-2), 154 (2011). DOI: 10.1134/S1560354711010060
[22] H. Broer, C. Simó, R. Vitolo, Nonlinearity, **15** (4), 1205 (2002). DOI: 10.1088/0951-7715/15/4/312
[23] N.V. Stankevich, N.A. Shchegoleva, I.R. Sataev, A.P. Kuznetsov, J. Comput. Nonlinear Dyn., **15** (11), 111001 (2020). DOI: 10.1115/1.4048025
[24] E.A. Grines, A. Kazakov, I.R. Sataev, Chaos, **32** (9), 093105 (2022). DOI: 10.1063/5.0098163
[25] I. Garashchuk, A. Kazakov, D. Sinelshchikov, Chaos Solit. Fract., **182**, 114785 (2024). DOI: 10.1016/j.chaos.2024.114785
[26] A.P. Kuznetsov, Y.V. Sedova, N.V. Stankevich, Chaos Solit. Fract., **169**, 113278 (2023). DOI: 10.1016/j.chaos.2023.113278
[27] D. Ruelle, F. Takens, Commun. Math. Phys., **20**, 167 (1971). DOI: 10.1007/BF01646553