

01;03

## Гидродинамическое взаимодействие испаряющейся капли с плоской поверхностью

© С.И. Гращенков

Псковский государственный педагогический университет им. С.М. Кирова,  
180760 Псков, Россия  
e-mail: grasi@mail.ru

(Поступила в редакцию 9 июня 2009 г. В окончательной редакции 19 ноября 2009 г.)

Проведено теоретическое исследование гидродинамического взаимодействия свободно испаряющейся или растущей в пересыщенном паре капли, взвешенной в газовой среде, с плоской бесконечной поверхностью жидкости или твердого тела с учетом эффектов, линейных по числу Кнудсена. Приведены результаты численных расчетов скорости установившегося движения капли воды, испаряющейся или растущей в воздухе. Приведенные результаты показали, что капля может двигаться как к стенке, так и от нее. При этом направление движения зависит от радиуса капли, расстояния между стенкой и каплей и теплопроводности вещества стенки.

### Введение

Гидродинамическое взаимодействие сферической частицы с плоской поверхностью играет важную роль во многих процессах. При этом достаточно часто встречается ситуация, когда вследствие малости размеров частиц число Рейнольдса можно считать равным нулю. Поэтому изучению гидродинамического взаимодействия сферической частицы при малых числах Рейнольдса посвящено большое количество работ (см., например, обзор [1]). При этом рассматривались как твердые частицы вблизи твердой поверхности [2], так и капли вблизи поверхности, которая являлась границей раздела вязких сред [3]. Однако учет влияния возможного испарения вещества с поверхности частицы не проводился. В связи с этим в настоящей работе проводится теоретический анализ движения умеренно крупной капли жидкости, вызванного испарением вещества с ее поверхности, вблизи бесконечной плоской поверхности другой малолетучей жидкости или твердого тела. К умеренно крупным относят частицы, для которых число Кнудсена (отношение средней длины свободного пробега молекул в газе к радиусу капли) находится в интервале  $0.01 \leq Kn \leq 0.3$ . Плоская поверхность, ограничивающая жидкость или твердое тело, считается непроницаемой для вещества, испаряющегося с поверхности капли. Предполагается, что фазовые переходы на плоской поверхности отсутствуют.

### Аналитический расчет распределения температуры и концентрации

#### 1. Формулировка математической модели

Рассмотрим испаряющуюся каплю, взвешенную вблизи бесконечно протяженной плоской поверхности жидкости или твердого тела. Примем, что давление насыщенных паров вещества, ограниченного плоской поверхностью, пренебрежимо мало по сравнению с давлением

паров вещества испаряющейся капли (такая ситуация складывается, например, для капли воды вблизи поверхности масла). Будем считать, что процесс испарения вещества с поверхности капли квазистационарен (т.е. время температурной и диффузионной релаксации мало по сравнению с характерным временем испарения капли) и происходит при малых относительных перепадах температуры и концентрации. Будем также считать, что концентрация  $C_1$  молекул испаряющегося вещества подчиняется условию  $C_1 \ll 1$  ( $C_1 = n_1/n_\infty$ ,  $n_\infty = n_1 + n_2$ , где  $n_1, n_2$  — соответственно концентрации молекул паров испаряющегося вещества и молекул второго компонента газовой смеси, не поглощаемого поверхностью жидкости). В ситуации с испарением капли воды в воздухе под вторым компонентом будем понимать совокупность всех компонент воздуха, кроме водяного пара, что необходимо для упрощения математической модели. При  $C_1 \ll 1$  основное влияние на процесс переноса молекул оказывает молекулярная диффузия. В связи с этим принято считать, что испарение капли в случае  $C_1 \ll 1$  протекает в диффузионном режиме [4]. В описанной ситуации распределение температуры и концентрации можно описывать уравнениями Лапласа.

Коэффициенты теплопроводности и диффузии (с точностью до малых членов, пропорциональных относи-

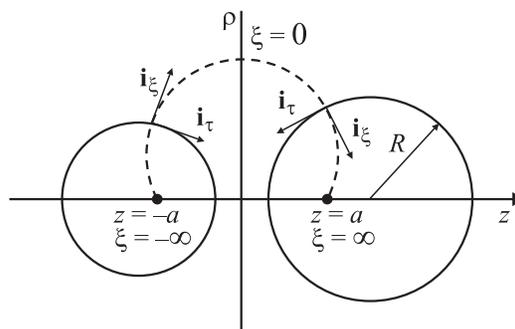


Рис. 1. Бисферическая система координат.

тельным перепадам температуры и  $C_1$ ) будем считать постоянными величинами.

Решение задачи будем искать в бисферической системе координат (рис. 1). Координаты  $(\xi, \eta, \varphi)$  бисферической системы координат связаны с координатами  $(\rho, z, \varphi)$  соответствующей цилиндрической системы координат следующим образом [5]:

$$\rho = \frac{a \sin \eta}{\operatorname{ch} \xi - \cos \eta},$$

$$z = \frac{a \operatorname{sh} \xi}{\operatorname{ch} \xi - \cos \eta},$$

$$\varphi = \varphi,$$

где  $a$  — масштабный множитель.

Оператор Лапласа в бисферической системе координат имеет следующий вид [5]:

$$\Delta = \frac{1}{L_\xi L_\eta L_\varphi} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{L_\eta L_\varphi}{L_\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{L_\xi L_\varphi}{L_\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{L_\xi L_\eta}{L_\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \right],$$

где  $L_\xi, L_\eta, L_\varphi$  — коэффициенты Ламе, равные

$$L_\xi = L_\eta = \frac{a}{\operatorname{ch} \xi - \cos \eta}, \quad L_\varphi = \frac{a \sin \eta}{\operatorname{ch} \xi - \cos \eta}.$$

В бисферической системе координат поверхность капли совпадает с координатной поверхностью  $\xi = \xi_1$  ( $\xi_1 > 0$ ), а поверхность стенки — с координатной поверхностью  $\xi = 0$ . При этом радиус  $R$  капли связан с масштабным множителем соотношением

$$R = a \operatorname{cosech} \xi_1.$$

Расстояние  $h$  между центром капли и поверхностью стенки можно найти из соотношения

$$h = a \operatorname{coth} \xi_1.$$

В рассматриваемом случае распределения температур капли, окружающего ее газа и вещества, ограниченного плоской поверхностью, а также концентрации молекул паров испаряющегося вещества описываются системой уравнений (1) с граничными условиями (2)–(10) [6]:

$$\Delta T_e = 0, \quad \Delta T_{i1} = 0, \quad \Delta T_{i0} = 0, \quad \Delta C_1 = 0, \quad (1)$$

$$\xi = \xi_1 : \quad T_e - T_{i1} = - \frac{K_T}{L_\xi} \frac{\partial T_e}{\partial \xi} \Big|, \quad (2)$$

$$k_{i1} \frac{\partial T_{i1}}{\partial \xi} = k_e \frac{\partial T_e}{\partial \xi} + K_L \frac{\partial C_1}{\partial \xi}, \quad (3)$$

$$C_1 = K_s \left[ C_{1s}(T_i^0) + \frac{dC_{1s}(T)}{dT} \Big|_{T=T_i^0} (T_i - T_i^0) \right] - \frac{K_n}{L_\xi} \frac{\partial C_1}{\partial \xi}, \quad (4)$$

$$\xi = 0 : \quad T_e - T_{i0} = \frac{K_T}{L_\xi} \frac{\partial T_e}{\partial \xi} \Big|, \quad (5)$$

$$k_{i0} \frac{\partial T_{i0}}{\partial \xi} = k_e \frac{\partial T_e}{\partial \xi}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial C_1}{\partial \xi} = 0, \quad (7)$$

$$\rho, z \rightarrow \infty : \quad T_e \rightarrow T_\infty, \quad (8)$$

$$\rho, z \rightarrow \infty : \quad C_1 \rightarrow C_{1\infty}, \quad (9)$$

$$T_{i1} \neq \infty, \quad T_{i0} \neq \infty, \quad (10)$$

$$K_s = 1 + \frac{2m_1 n_\infty \sigma_1}{\rho_d R p}.$$

Здесь  $T_e$  — распределение температуры в газе;  $T_{i1}$  — распределение температуры внутри капли;  $T_{i0}$  — распределение температуры в веществе, ограниченном плоской поверхностью;  $K_T$  — коэффициент скачка температуры на поверхности капли и плоской поверхности;  $k_{i1}$  — коэффициент теплопроводности жидкости капли;  $k_{i0}$  — коэффициент теплопроводности вещества, ограниченного плоской поверхностью;  $k_e$  — коэффициент теплопроводности газовой смеси;  $K_L = Lm_1 n_\infty D_{12}$ ;  $L$  — теплота фазового перехода испаряющегося вещества капли;  $m_1$  — масса молекул испаряющегося вещества;  $D_{12}$  — коэффициент взаимной диффузии газовой смеси;  $C_{1s}$  — концентрация насыщенных паров испаряющегося вещества плоской поверхности чистой жидкости;  $T_i^0$  — средняя температура на поверхности капли;  $K_s$  — коэффициент, учитывающий зависимость концентрации насыщенных паров испаряющегося с поверхности капли вещества от кривизны ее поверхности;  $\sigma_1$  — коэффициент поверхностного натяжения жидкости капли;  $\rho_d$  — плотность этой жидкости;  $p$  — давление газовой смеси;  $K_n$  — коэффициент скачка концентрации на поверхности капли.

Уравнения (2), (5) связывают температуру газа и веществ, ограниченных поверхностями капли и бесконечной плоской поверхностью. В неразрезанных газах граничным условием на этих поверхностях является равенство температур газа и веществ, которые они ограничивают. Однако это условие является приближенным и применимо лишь в том случае, когда длину свободного пробега молекул газа можно считать как угодно малой. Учет конечности длины свободного пробега приводит к наличию на этих поверхностях некоторой разности температур. В первом приближении эту разность температур можно учесть, вводя так называемый скачок температуры, величина которого пропорциональна нормальной составляющей градиента температуры газа на поверхности. Наличие этого скачка температуры и учитывают уравнения (2), (5).

Условие (3) выражает непрерывность потока тепла через поверхность капли с учетом тепла, идущего на фазовый переход. Условие (6) выражает непрерывность потока тепла через бесконечную плоскую поверхность.

Условие (4) учитывает зависимость концентрации насыщенных паров испаряющегося вещества на поверхности капли от температуры и кривизны поверхности, а также скачок концентрации в слое Кнудсена. Фактически условие (4) представляет собой линейное приближение для величины  $C_1|_{\xi=\xi_1}$  по возмущению температуры  $(T_i - T_i^0)$  с учетом скачка концентрации. Условие (7) выражает непроницаемость плоской стенки для вещества, испаряющегося с поверхности капли.

## 2. Описание процедуры решения

Общие решения уравнений (1) находятся методом разделения переменных и с учетом граничных условий (8)–(10) имеют следующий вид:

$$T_e = \sqrt{2(\text{ch } \xi - \mu)} \sum_{n=0}^{\infty} \left( A_n \exp[(n+1/2)\xi] + B_n \exp[-(n+1/2)\xi] \right) P_n(\mu) + T_{\infty}, \quad (11)$$

$$T_{i1} = \sqrt{2(\text{ch } \xi - \mu)} \times \sum_{n=0}^{\infty} \left( C_n^i \exp[-(n+1/2)\xi] \right) P_n(\mu) + T_{e\infty}, \quad (12)$$

$$T_{i0} = \sqrt{2(\text{ch } \xi - \mu)} \times \sum_{n=0}^{\infty} \left( D_n^i \exp[(n+1/2)\xi] \right) P_n(\mu) + T_{e\infty}, \quad (13)$$

$$C_1 = \sqrt{2(\text{ch } \xi - \mu)} \sum_{n=0}^{\infty} \left( M_n \exp[(n+1/2)\xi] + N_n \exp[-(n+1/2)\xi] \right) P_n(\mu) + C_{1\infty}. \quad (14)$$

Здесь  $P_n(\mu)$  — полиномы Лежандра,  $\mu = \cos \eta$ ,  $A_n, B_n, C_n^i, D_n^i, M_n, N_n$  — неопределенные коэффициенты, которые находятся при помощи граничных условий (2)–(7).

Подставив выражения (11)–(14) в граничные условия (2)–(7), после упрощающих преобразований получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \xi = \xi_1 : \quad & \sum_{n=k-2}^{k+2} \left[ A_n \left( \beta \delta_n^k + \frac{K_T \alpha \beta \delta_n^k}{2a} - \frac{k_e}{k_{i1}} \alpha \delta_n^k \right) \right. \\ & \times \exp[(n+1/2)\xi] + B_n \left( \beta \delta_n^k + \frac{K_T \beta \delta_n^k}{2a} - \frac{k_e}{k_{i1}} \beta \delta_n^k \right) \\ & \times \exp[-(n+1/2)\xi] - M_n \frac{K_L}{k_{i1}} \alpha \delta_n^k \exp[(n+1/2)\xi] \\ & \left. - N_n \frac{K_L}{k_{i1}} \beta \delta_n^k \exp[-(n+1/2)\xi] \right] = 0, \quad (15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{n=k-1}^{k+1} \left[ A_n \left( \delta_n^k + \frac{K_T \alpha \delta_n^k}{2a} \right) \frac{dC_{1sd}(T)}{dT} \Big|_{T=T_i^0} \right. \\ & \times \exp[(n+1/2)\xi] + B_n \left( \delta_n^k + \frac{K_T \beta \delta_n^k}{2a} \right) \frac{dC_{1sd}(T)}{dT} \Big|_{T=T_i^0} \\ & \times \exp[-(n+1/2)\xi] - M_n \left( \delta_n^k + \frac{K_n \alpha \delta_n^k}{2a} \right) \exp[(n+1/2)\xi] \\ & \left. - N_n \left( \delta_n^k + \frac{K_n \beta \delta_n^k}{2a} \right) \exp[-(n+1/2)\xi] \right] \\ & = \left[ (C_{1\infty} - C_{1sd}(T_i^0)) + \frac{dC_{1sd}(T)}{dT} \Big|_{T=T_i^0} (T_i^0 - T_{\infty}) \right] \\ & \times \exp[-(n+1/2)\xi], \quad (16) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \xi = 0 : \quad & \sum_{n=k-2}^{k+2} \left[ A_n \left( \alpha \delta_n^k - \frac{K_T \alpha \alpha \delta_n^k}{2a} - \frac{k_{i1}}{k_{i0}} \alpha \delta_n^k \right) \right. \\ & \left. + B_n \left( \alpha \delta_n^k - \frac{K_T \beta \alpha \delta_n^k}{2a} - \frac{k_{i1}}{k_{i0}} \beta \delta_n^k \right) \right] = 0, \quad (17) \end{aligned}$$

$$M_n - N_n = 0, \quad (18)$$

$$C_{1sd}(T) = K_s C_{1s}(T),$$

$$k = 0, 1, 2, 3, 4, \dots,$$

где  $\delta_n^k$  — символ Кронекера.

Для более компактной записи приведенных уравнений введены операторы  $\alpha$  и  $\beta$ , которые любую функцию  $X_n$  от  $\xi, \eta, n$  преобразуют согласно следующим формулам:

$$\alpha X_n = [\text{sh } \xi + (2n+1) \text{ch } \xi] - (n+1)X_{n+1} - nX_{n-1},$$

$$\beta X_n = [\text{sh } \xi - (2n+1) \text{ch } \xi] + (n+1)X_{n+1} + nX_{n-1}.$$

Уравнения (15)–(18) представляют собой бесконечную систему для коэффициентов  $A_n, B_n, M_n, N_n$ , в которой  $T_i^0$  выступает в качестве параметра. Любые  $4N$  уравнений этой системы содержат более чем  $4N$  неизвестных. Приближенные значения первых  $4N$  неизвестных можно получить, положив  $A_n = B_n = M_n = N_n = 0$  при  $n > N$ . Необходимая точность вычисления коэффициентов достигается выбором соответствующего значения  $N$ . При таком подходе уравнения (15)–(18) составляют трансцендентную систему уравнений, которая решается методом последовательных приближений. В качестве нулевого выбираются значения  $A_n, B_n, M_n, N_n$ , получаемые из (15)–(18) при  $T_i^0$ , равной соответствующему значению температуры  $T_i^{\infty}$  на поверхности одиночной капли, которая находится из трансцендентного уравнения

$$T_{\infty} - T_i^{\infty} = \frac{K_L}{k_e} \frac{1 + \frac{K_T}{R}}{1 + \frac{K_n}{R}} (K_s C_{1s}(T_i^{\infty}) - C_{1\infty}).$$

Значение  $C_{1s}(T)$  в ходе расчетов можно вычислять по формуле [7]

$$C_{1s}(T) = A \exp\left(-\frac{B}{T}\right),$$

в которой

$$B = \frac{\mu_i L}{R_i}, \quad A = \frac{C_{1s}(T_\infty)}{\exp\left(-\frac{B}{T_\infty}\right)}.$$

Здесь  $\mu_i$  — молярная масса испаряющегося вещества,  $R_i$  — универсальная газовая постоянная. Значение  $B$  для заданного интервала температур  $[T_0, T_1]$  можно также найти из выражения

$$B = \ln \frac{C_{1s}(T_1)}{C_{1s}(T_0)} \left( \frac{1}{T_0} - \frac{1}{T_1} \right).$$

Выражение для потока  $I$  молекул вещества, испаряющегося с поверхности капель, получается из (14) интегрированием выражения для плотности потока вдоль поверхности капли

$$I = 8\pi a n_\infty D_{12} \sum_{n=0}^{\infty} M_n. \quad (19)$$

Зная значения коэффициентов  $A_n, B_n$ , значения коэффициентов  $C_n^i, D_n^i$  можно получить при помощи соотношений

$$C_k^i = \exp \left[ \left( k + \frac{1}{2} \right) \xi \right] \sum_{n=k-1}^{k+1} \left\{ A_n \exp \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) \xi \right] \times \left[ \delta_n^k + \frac{K_T}{2a} \alpha \delta_n^k \right] + B_n \exp \left[ - \left( n + \frac{1}{2} \right) \xi \right] \times \left[ \delta_n^k + \frac{K_T}{2a} \beta \delta_n^k \right] \right\} \Big|_{\xi=\xi_1}, \quad (20)$$

$$D_k^i = \sum_{n=k-1}^{k+1} \left( A_n \left[ \delta_n^k - \frac{K_T}{a} ((2n+1)\delta_n^k - (n+1)\delta_{n+1}^k - n\delta_{n-1}^k) \right] + B_n \left[ \delta_n^k - \frac{K_T}{a} (-(2n+1)\delta_n^k + (n+1)\delta_{n+1}^k + n\delta_{n-1}^k) \right] \right). \quad (21)$$

## Аналитический расчет силы, действующей на испаряющуюся или растущую каплю

### 1. Формулировка математической модели

Найдем действующую на каплю силу, обусловленную ее испарением или конденсацией. При решении данной задачи будем исходить из предположения о том, что движение аэрозольной частицы происходит при числах Рейнольдса, много меньших единицы, и  $\sigma_1 \gg \mu_e u$ , где  $\mu_e$  — коэффициент динамической вязкости внешней среды,  $u$  — скорость капли. Последнее условие необходимо, чтобы капля при своем движении сохраняла сферическую форму.

Для нахождения силы, действующей на каплю, воспользуемся стоксовой функцией тока  $\psi$ , являющейся решением уравнения медленного вязкого течения жидкости. Как показано в [5], функцию тока в бисферической системе координат можно найти как решение уравнения

$$E^2(E^2\psi) = 0,$$

где

$$E^2 = \frac{\text{ch } \xi - \mu}{a^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ (\text{ch } \xi - \mu) \frac{\partial}{\partial \xi} \right] + (1 - \mu^2) \frac{\partial}{\partial \mu} \left[ (\text{ch } \xi - \mu) \frac{\partial}{\partial \mu} \right] \right\}. \quad (22)$$

Когда функция тока  $\psi$  известна, радиальную  $v_\xi$  и тангенциальную  $v_\eta$  компоненты поля скоростей можно найти по следующим формулам:

$$v_\xi = \frac{1}{L_\eta \rho} \frac{\partial \psi}{\partial \eta}, \quad v_\eta = -\frac{1}{L_\xi \rho} \frac{\partial \psi}{\partial \xi}. \quad (23)$$

Впервые решение уравнения (22) было получено Стимсоном и Джеффри [8] и для среды, окружающей каплю, может быть записано в следующем виде:

$$\psi^e = (\text{ch } \xi - \mu)^{-3/2} \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ X_{4n+1}^e \exp[(n-3/2)\xi] + X_{4n+2}^e \exp[-(n-3/2)\xi] + X_{4n+3}^e \exp[(n+1/2)\xi] + X_{4n+4}^e \exp[-(n+1/2)\xi] \right\} C_n^{-1/2}(\mu). \quad (24)$$

Здесь  $C_n^{-1/2}(\mu)$  — полином Гегенбауэра порядка  $n$  и степени  $-1/2$ ,

$$C_n^{-1/2}(\mu) = \frac{P_{n-2}(\mu) - P_n(\mu)}{2n-1}.$$

Константы  $X_n^e$  определяются из граничных условий.

Точки  $\xi = \pm\infty$  бисферической системы координат находятся внутри капли и жидкости, ограниченной плоской поверхностью. Для того чтобы функции тока, описывающие течение жидкостей в капле и под плоской поверхностью, оставались конечными, из соответствующих решений надо исключить слагаемые, которые стремятся к бесконечности при  $\xi \rightarrow \pm\infty$ .

Поэтому общее решение для функции тока внутри капли имеет вид

$$\psi_1^i = (\text{ch } \xi - \mu)^{-3/2} \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ X_{4n+2}^i \exp[-(n-3/2)\xi] + X_{4n+4}^i \exp[-(n+1/2)\xi] \right\} C_n^{-1/2}(\mu), \quad (25)$$

а для жидкости, ограниченной плоской поверхностью,

$$\psi_2^i = (\text{ch } \xi - \mu)^{-3/2} \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ X_{4n+1}^i \exp[(n-3/2)\xi] + X_{4n+3}^i \exp[(n+1/2)\xi] \right\} C_n^{-1/2}(\mu). \quad (26)$$

При известных значениях  $X_n^e$  сила, действующая на каплю, может быть определена исходя из соотношения [8]

$$F = 4\sqrt{2} \frac{\mu_e \pi}{a} \sum_{n=2}^{\infty} (X_{4n+1}^e + X_{4n+3}^e), \quad (27)$$

которое было получено около ста лет назад и с тех пор используется для расчета силы, действующей на сферическую частицу, в бисферической системе координат.

Как уже было сказано, коэффициенты  $X_n^e$  определяются из граничных условий на поверхности капли и плоской поверхности жидкости. В рассматриваемом случае эти условия имеют следующий вид [6]:

$$\xi = \xi_1 : \quad v_{\xi}^e = -g_c \nabla_{\xi} C_1, \quad (28)$$

$$v_{1\xi}^i = 0, \quad (29)$$

$$v_{\eta}^e - v_{1\eta}^i + C_m \Pi_{\xi\eta}(\mathbf{v}^e) = g_T \nabla_{\eta} T_e + g_d \nabla_{\eta} C_1, \quad (30)$$

$$\mu_{i1} \Pi_{\xi\eta}(\mathbf{v}_1^i) = \mu_e \Pi_{\xi\eta}(\mathbf{v}^e) - g_{\sigma 1} \nabla_{\eta} T_{i1}, \quad (31)$$

$$\xi = 0 : \quad v_{\xi}^e = 0, \quad (32)$$

$$v_{0\xi}^i = 0, \quad (33)$$

$$v_{\eta}^e - v_{0\eta}^i - C_m \Pi_{\xi\eta}(\mathbf{v}^e) = g_T \nabla_{\eta} T_e + g_d \nabla_{\eta} C_1, \quad (34)$$

$$\mu_{i0} \Pi_{\xi\eta}(\mathbf{v}_0^i) = \mu_e \Pi_{\xi\eta}(\mathbf{v}^e) + g_{\sigma 0} \nabla_{\eta} T_{i0}. \quad (35)$$

Здесь  $\mathbf{v}^e$  — распределение скорости в газе;  $\mathbf{v}_1^i$  — распределение скорости внутри капли;  $\mathbf{v}_0^i$  — распределение скорости внутри жидкости, ограниченной плоской поверхностью;  $g_c = \frac{D_{12} m_1 n_{\infty}^2}{\rho_e n_2}$ ;  $\rho_e$  — плотность газа;  $g_T = \frac{K_{Tsl}}{T_{e\infty}}$ ;  $K_{Tsl}$  — коэффициент теплового скольжения газа;  $g_d = K_{sl} D_{12}$ ;  $K_{sl}$  — коэффициент диффузионного скольжения;  $\mu_{i1}$  — вязкость жидкости капли;  $\mu_{i0}$  — вязкость жидкости, ограниченной бесконечной плоской поверхностью;  $g_{\sigma 1} = \frac{\partial \sigma_1}{\partial T} \Big|_{T=T_{e\infty}}$ ;  $g_{\sigma 0} = \frac{\partial \sigma_0}{\partial T} \Big|_{T=T_{e\infty}}$ ;  $\sigma_0$  — коэффициент поверхностного натяжения жидкости, ограниченной бесконечной плоской поверхностью. Скалярные операторы  $\nabla_{\xi}$ ,  $\nabla_{\eta}$ , представляющие собой проекции оператора  $\nabla$  на орты бисферической системы координат, и скалярный оператор  $\Pi_{\xi\eta}(\mathbf{v})$ , представляющий собой касательную составляющую тензора напряжений, определяются следующим образом [2,5]:

$$\nabla_{\xi} = \frac{1}{L_{\xi}} \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \nabla_{\eta} = \frac{1}{L_{\eta}} \frac{\partial}{\partial \eta},$$

$$\begin{aligned} \Pi_{\xi\eta}(\mathbf{v}) &= \frac{1}{L_{\xi}} \left[ \frac{\partial v_{\eta}}{\partial \xi} - \frac{v_{\eta}}{L_{\eta}} \frac{\partial}{\partial \xi} (L_{\eta}) \right] \\ &+ \frac{1}{L_{\eta}} \left[ \frac{\partial v_{\xi}}{\partial \eta} - \frac{v_{\xi}}{L_{\xi}} \frac{\partial}{\partial \eta} (L_{\xi}) \right]. \end{aligned}$$

Условия (28), (29) описывают непрерывность нормальной составляющей потока испаряющегося вещества на поверхности капли, а условия (32), (33) учитывают непроницаемость плоской поверхности, ограничивающей жидкость, для газовой смеси. Условия (30),

(34) учитывают наличие изотермического, теплового и диффузионного скольжения газа на этих поверхностях. Условия (31), (35) описывают непрерывность на них касательных составляющих тензора напряжений.

Если бесконечная плоская поверхность ограничивает не жидкость, а твердое тело, эта ситуация с формальной точки зрения может быть рассмотрена как частный случай, когда вязкость жидкости, ограниченной бесконечной плоской поверхностью, бесконечна и, следовательно, отношения  $\frac{\mu_e}{\mu_{i1}}$  и  $\frac{g_{\sigma 0}}{\mu_{i0}}$  равны нулю.

Выражение (27) применимо только в том случае, когда полный поток вещества, истекающий с поверхности капли, равен нулю. Однако, как следует из (28), в данном случае это условие не выполняется. Для того чтобы это условие было применимо, исключим из распределения  $\mathbf{v}^e$  скоростей слагаемое  $-g_c \nabla C_1$ . Это слагаемое описывает потенциальное течение газа, которое не оказывает воздействия на погруженные в него тела [9]. Поэтому его исключение не влияет на значения силы, действующей на каплю. Вместе с тем эта процедура позволяет для расчета силы использовать соотношение (27), так как полный поток вещества, истекающий с поверхности капли, становится равным нулю. При этом граничные условия приобретают вид

$$\xi = \xi_1 : \quad v_{\xi}^e = 0,$$

$$v_{1\xi}^i = 0,$$

$$v_{\eta}^e - v_{1\eta}^i + C_m \Pi_{\xi\eta}(\mathbf{v}^e - g_c \nabla C_1) = g_T \nabla_{\eta} T_e + (g_d + g_c) \nabla_{\eta} C_1,$$

$$\mu_{i1} \Pi_{\xi\eta}(\mathbf{v}_1^i) = \mu_e \Pi_{\xi\eta}(\mathbf{v}^e) - \mu_e \Pi_{\xi\eta}(g_c \nabla C_1) - g_{\sigma 1} \nabla_{\eta} T_{i1},$$

$$\xi = 0 : \quad v_{\xi}^e = 0, \quad (36)$$

$$v_{0\xi}^i = 0, \quad (37)$$

$$v_{\eta}^e - v_{0\eta}^i - C_m \Pi_{\xi\eta}(\mathbf{v}^e) = g_T \nabla_{\eta} T_e + g_d \nabla_{\eta} C_1, \quad (38)$$

$$\mu_{i0} \Pi_{\xi\eta}(\mathbf{v}_0^i) = \mu_e \Pi_{\xi\eta}(\mathbf{v}^e) + g_{\sigma 0} \nabla_{\eta} T_{i0}. \quad (39)$$

## 2. Описание процедуры решения

Исходя из этих уравнений и используя выражения (23)–(26), после упрощающих преобразований приходим к следующей системе уравнений:

$$\xi = \xi_1 : \quad \sum_{m=1}^4 X_{4n+m}^e W_{nm}^1 = 0, \quad (40)$$

$$\sum_{k=n-2}^{n+2} \sum_{m=1}^4 X_{4n+m}^e \left[ \left( (2k-1) W_{km}^2 + \frac{\mu_e}{\mu_{i1}} W_{km}^3 \right) h^v \delta_k^n \right]$$

$$+ (2k-1) \frac{C_m}{a} W_{km}^3 \sum_{l=n-1}^{n+1} [(h^v \delta_k^l)(h^v \delta_l^n)]$$

$$= \frac{a}{\sqrt{2}} \left[ -\frac{\mu_e}{\mu_{i1}} g_c 4\Phi_n + \frac{g_{\sigma 1}}{\mu_{i1}} a \Phi_n^1 \right]$$

$$+ \sum_{k=n-1}^{n+1} (2k-1) \left( -4 \frac{C_m}{a} g_c \Phi_k + g_T \Phi_k^e + (g_d + g_c) \Phi_k^{\delta} \right) h^v \delta_k^n, \quad (41)$$

$$\xi = 0 : \quad \sum_{m=1}^4 X_{4n+m}^e W_{nm}^1 = 0, \quad (42)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{k=n-2}^{n+2} \sum_{m=1}^4 X_{4n+m}^e \left[ - \left( (2k-1)W_{km}^2 + \frac{\mu_e}{\mu_{i0}} W_{km}^3 \right) h^v \delta_k^n \right. \\ & \left. + (2k-1) \frac{C_m}{a} W_{km}^3 \sum_{l=n-1}^{n+1} [(h^v \delta_k^l)(h^v \delta_l^n)] \right] \\ & = - \frac{a}{\sqrt{2}} \left[ \frac{g\sigma_0}{\mu_0} a \Phi_n^{i0} + \sum_{k=n-1}^{n+1} (2k-1)(g_T \Phi_k^e + g_d \Phi_k^\delta) h^v \delta_k^n \right], \end{aligned} \quad (43)$$

где

$$\begin{aligned} W_{nm}^1 &= \exp[(n-3/2)\xi] \delta_m^1 + \exp[-(n-3/2)\xi] \delta_m^2 \\ & \quad + \exp[(n+1/2)\xi] \delta_m^3 + \exp[-(n+1/2)\xi] \delta_m^4, \\ W_{nm}^2 &= (n-3/2) \exp[(n-3/2)\xi] \delta_m^1 - (n-3/2) \\ & \quad \times \exp[-(n-3/2)\xi] \delta_m^2 + (n+1/2) \exp[(n+1/2)\xi] \delta_m^3 \\ & \quad - (n+1/2) \exp[-(n+1/2)\xi] \delta_m^4, \\ W_{nm}^3 &= (n-3/2)^2 \exp[(n-3/2)\xi] \delta_m^1 + (n-3/2)^2 \\ & \quad \times \exp[-(n-3/2)\xi] \delta_m^2 + (n+1/2)^2 \exp[(n+1/2)\xi] \delta_m^3 \\ & \quad + (n+1/2)^2 \exp[-(n+1/2)\xi] \delta_m^4, \\ \Phi_n(\xi) &= \sum_{k=n-2}^{n+2} k(k-1) \left[ \frac{3}{4} \operatorname{sh} \xi \left( \frac{\delta_{k-2}}{2k-3} - \frac{\delta_k}{2k+1} \right) \delta_k^n \right. \\ & \quad \left. + \frac{3}{2} \left( \frac{1}{2k-3} \frac{\partial \delta_{k-2}}{\partial \xi} - \frac{1}{2k+1} \frac{\partial \delta_k}{\partial \xi} - \operatorname{sh} \xi \delta_{k-1} \right) h^v \delta_k^n \right. \\ & \quad \left. - \frac{\partial \delta_{k-1}}{\partial \xi} h^v h^v \delta_k^n \right], \\ \Phi_n^e(\xi) &= (2 \operatorname{ch} \xi \gamma_{n-1}^e - \gamma_{n-2}^e - \gamma_n^e) n(n-1), \\ \Phi_n^\delta &= (2 \operatorname{ch} \xi \delta_{n-1} - \delta_{n-2} - \delta_n) n(n-1), \\ \Phi_n^{i1} &= (2 \operatorname{ch} \xi \gamma_{n-1}^{i1} - \gamma_{n-2}^{i1} - \gamma_n^{i1}) n(n-1), \\ \Phi_n^{i0} &= (2D_{n-1}^i - D_{n-2}^i - D_n^i) n(n-1), \\ \gamma_n^e &= A_n \exp \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) \xi \right] + B_n \exp \left[ - \left( n + \frac{1}{2} \right) \xi \right], \\ \delta_n &= M_n \exp \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) \xi \right] + N_n \exp \left[ - \left( n + \frac{1}{2} \right) \xi \right], \\ \gamma_n^{i1} &= C_n^i \exp \left[ - \left( n + \frac{1}{2} \right) \xi \right]. \end{aligned}$$

Операторы  $h^v$  любую функцию  $Y_n$  от  $\xi$  преобразуют следующим образом:

$$h^v Y_n = Y_n \operatorname{ch} \xi - \frac{n+1}{2n-1} Y_{n+1} - \frac{n-2}{2n-1} Y_{n-1}.$$

Уравнения (40)–(43) составляют бесконечную систему для неизвестных  $X_n^e$ . При этом любые первые  $N$  уравнений содержат более чем  $N$  неизвестных. Решение подобных систем проводят выбором некоторого большого  $N$  и пренебрежением слагаемых с  $X_n^e$  для  $n > N$ . Подставив полученные значения в (27), получим значения силы, действующей на каплю. При этом точность вычисления сил можно повысить, увеличив выбранное значение  $N$ .

### Численный анализ движения капли

На основе полученных соотношений были проведены расчеты скорости установившегося движения испаряющейся или растущей капли воды, находящейся в воздухе при 20°C и давлении 10<sup>5</sup> Па. Значение скорости установившегося движения находилось из условия равенства силы вязкого сопротивления, обусловленной движением капли, и силы, обусловленной испарением или ростом капли. При расчете силы вязкого сопротивления учитывалась циркуляция жидкости капли и жидкости, ограниченной бесконечной плоской поверхностью, а также изотермическое скольжение газа на плоской поверхности жидкости и поверхности капли. Значение силы вязкого сопротивления находилось при помощи соотношений, приведенных в [3]. Значения коэффициентов, входящих в итоговые уравнения (таких, как  $\mu_e$ ,  $\mu_{i1}$ ,  $D_{12}$ ,  $K_{Tsl}$ ,  $K_{sl}$  и т. д.), были взяты из работ [10–14] или рассчитывались по приведенным в них формулам.

На рис. 2 приведена зависимость скорости капли воды от относительного расстояния  $\Delta h/R$ , между поверхностью капли и плоской поверхностью касторового масла. Влажность воздуха полагалась равной 99%. В данной статье отрицательное значение скорости соответствует сближению капли со стенкой, а положительное — удалению от нее. Необходимые данные для касторового масла брались из работ [15–17]. Уменьшение модуля скорости для крупных капель на малых расстояниях объясняется уменьшением влияния изотермического скольжения с их ростом, что, в свою очередь, приводит к резкому

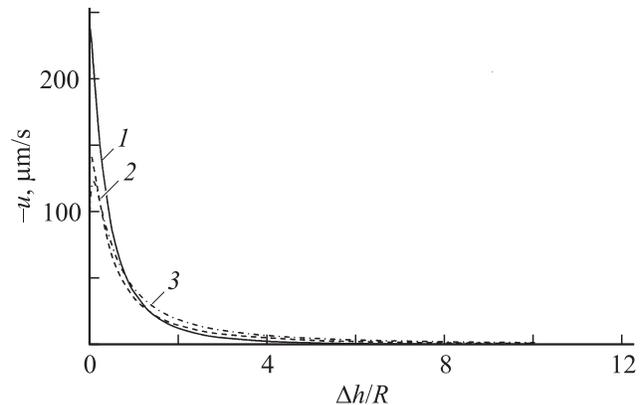


Рис. 2. Скорость капли вблизи плоской поверхности касторового масла. Кривая 1 —  $R = 1$ , 2 — 2, 3 — 10  $\mu\text{m}$ .

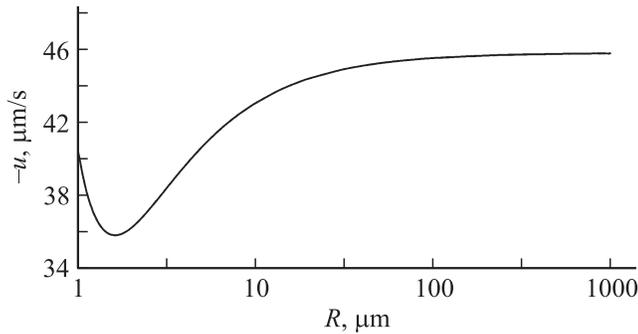


Рис. 3. Зависимость скорости капли от радиуса.

возрастанию силы вязкого сопротивления на малых расстояниях между каплей и стенкой [3]. Кроме того, из рисунка видно, что с ростом радиуса капли ее скорость может как увеличиваться, так и уменьшаться.

Чтобы проиллюстрировать сказанное выше, на рис. 3 построена зависимость скорости капли от радиуса при тех же условиях. Расстояние между поверхностью капли и плоской поверхностью масла полагалось равным радиусу капли. Из данного рисунка видно, что с ростом радиуса капли ее скорость стремится к некоторому предельному значению. Для того чтобы объяснить эту зависимость, был проведен анализ составляющих скорости, обусловленных различными эффектами, и выяснено, что при рассматриваемых условиях для крупных капель определяющим становится учет зависимости поверхностного натяжения воды от температуры, причем начиная с некоторого радиуса влияние меняется очень слабо. Для объяснения данного явления можно обратиться к формулам для скорости термофореза и диффузиофореза крупной однокомпонентной испаряющейся капли [6].

Из формул, приведенных в работе [6], следует, что единственной составляющей скорости, зависящей от радиуса капли, является зависимость поверхностного натяжения жидкости капли от температуры. Эта составляющая прямо пропорциональна радиусу капли, поэтому при росте капли она может стать основной. Очевидно, начиная с некоторых расстояний между каплей и поверхностью масла этот эффект может проявляться и в рассматриваемом случае. Скорость капли пропорциональна также градиентам температуры и концентрации в окрестности капли. Для крупных капель при постоянном соотношении расстояния от стенки до капли и ее радиуса распределения температур и концентраций в окрестности крупной капли при разных радиусах становятся подобными. Поэтому градиенты температуры и концентрации в окрестности капли можно считать обратно пропорциональными радиусу. В результате вклад в скорость, обусловленный зависимостью поверхностного натяжения жидкости капли от температуры, становится не зависящим от радиуса.

Для того чтобы оценить изменение расстояния между поверхностями капли воды и поверхностью масла, необходимо знать не только скорость капли, но и скорость уменьшения радиуса капли. Поэтому на рис. 4 показана зависимость величины  $u/(dR/dt)$  от относительного расстояния между поверхностями капли и масла. Видно, что при достаточно больших расстояниях скорость капли значительно превышает скорость уменьшения ее радиуса только для достаточно крупных частиц. Это легко понять, если учесть, что для крупной одиночной капли скорость изменения радиуса обратно пропорциональна ее радиусу (см., например, [18]). При достаточно большом расстоянии между каплей и маслом эта зависимость, вероятно, будет выполняться и в рассматриваемом случае. Вместе с тем, как указано выше, скорость капли с увеличением ее радиуса стремится к некоторому предельному значению. Понятно, что при данных условиях значение  $u/(dR/dt)$  будет увеличиваться.

Рассмотрим теперь движение капли вблизи плоской стенки твердого тела. В этом случае единственной ха-

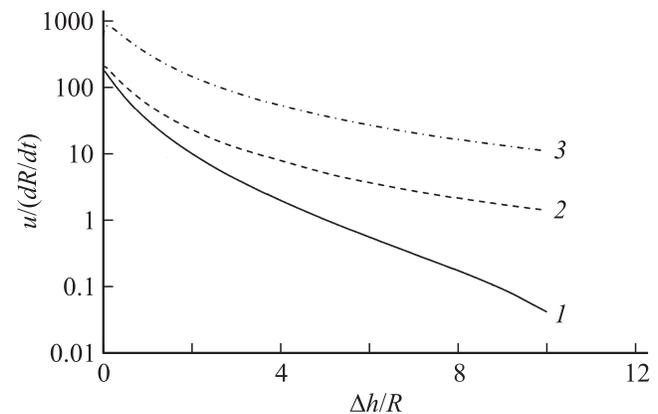


Рис. 4. Зависимость  $u/(dR/dt)$  от расстояния между каплей воды и плоской поверхностью касторового масла: 1 —  $R = 1$ , 2 — 2, 3 —  $10 \mu\text{m}$ .

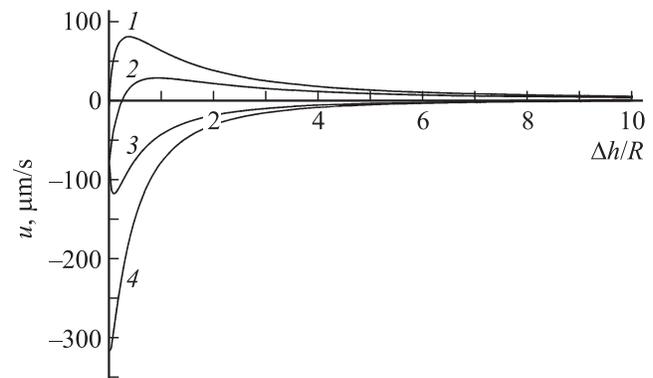
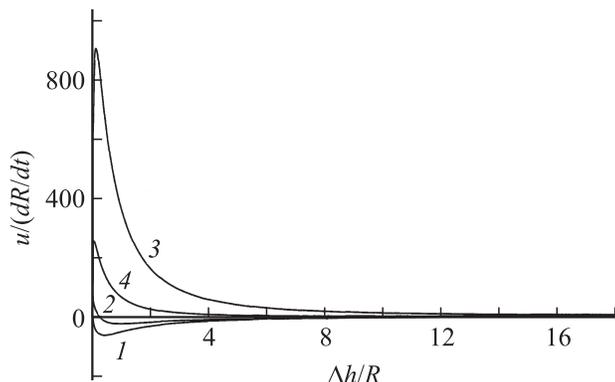
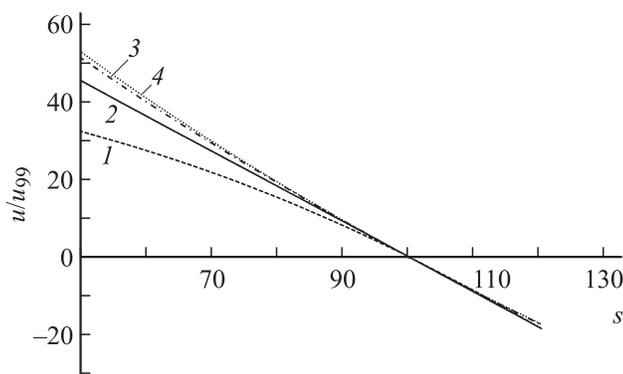


Рис. 5. Скорость капли вблизи плоской поверхности твердого тела. 1 —  $k_{i1}/k_{i0} = 0$ ,  $R = 1$ ; 2 —  $k_{i1}/k_{i0} = 1$ ,  $R = 1$ ; 3 —  $k_{i1}/k_{i0} = 0$ ,  $R = 10$ ; 4 —  $k_{i1}/k_{i0} = 5$ ,  $R = 1 \mu\text{m}$ .



**Рис. 6.** Зависимость  $u/(dR/dt)$  от расстояния между каплей воды и плоской поверхностью твердого тела: 1 —  $k_{i1}/k_{i0} = 0$ ,  $R = 1$ ; 2 —  $k_{i1}/k_{i0} = 1$ ,  $R = 1$ ; 3 —  $k_{i1}/k_{i0} = 0$ ,  $R = 10$ ; 4 —  $k_{i1}/k_{i0} = 5$ ,  $R = 1 \mu\text{m}$ .



**Рис. 7.** Зависимость скорости капли от влажности: 1 —  $k_{i1}/k_{i0} = 0$ ,  $\Delta h = 0.1R$ ; 2 —  $k_{i1}/k_{i0} = 0$ ,  $\Delta h = R$ ; 3 —  $k_{i1}/k_{i0} = 5$ ,  $\Delta h = 0.1R$ ; 4 —  $k_{i1}/k_{i0} = 5$ ,  $\Delta h = R$ ;  $u_{99}$  — скорость капли при влажности 99%.

рактической характеристикой твердого тела, которую надо учитывать, является его теплопроводность.

На рис. 5 показаны зависимости скорости капли воды от относительного расстояния  $\Delta h/R$  между поверхностью капли и плоской поверхностью твердого тела при разных значениях теплопроводности этого тела. Влажность воздуха полагалась равной 99%. Из рисунка видно, что при достаточно высоких значениях теплопроводности твердого тела и малых размерах капли ее скорость может менять знак. Анализ составляющих скорости показал, что это обусловлено наличием теплового скольжения газа на поверхностях стенки и капли. При этом скольжение на поверхности частицы вызывает ее движение от стенки, а тепловое скольжение на стенке вызывает движение частицы, направленное к стенке. Преобладание одного из них на малых расстояниях, а другого — на больших и обуславливает изменение знака скорости. Само тепловое скольжение на стенке вызвано неоднородностью температуры ее поверхности вследствие ее охлаждения под влиянием испаряющейся капли. Понятно, что эта неоднородность, а следовательно

и величина теплового скольжения, тем больше, чем меньше теплопроводность твердого тела.

Поэтому при небольшой величине этой теплопроводности изменения знака скорости не происходит. Также изменения знака скорости не происходит и при достаточно больших размерах капель, даже если теплопроводность твердого тела достаточно велика, так как в этом случае вклад в скорость, обусловленный тепловым скольжением, мал по сравнению с зависимостью поверхностного натяжения воды от температуры.

На рис. 6 показана зависимость величины  $u/(dR/dt)$  от относительного расстояния между поверхностями капли и твердого тела при рассмотренных выше условиях. Из рисунка видно, что в общем случае относительная скорость тем выше, чем больше ее радиус и чем сильнее теплопроводность твердого тела отличается от теплопроводности капли.

На рис. 7 показана зависимость скорости капли воды, находящейся вблизи плоской твердой стенки от влажности  $s$  для некоторых случаев. Скорость каждой капли нормирована на скорость этой же капли при влажности 99%. Из рисунка видно, что при малых отклонениях влажности от 100% зависимость скорости от влажности можно считать линейной. Кроме того, чем выше теплопроводность стенки и чем дальше находится капля от нее, тем менее зависимость отличается от линейной.

## Заключение

В представленной работе проведен анализ движения умеренно крупной капли, обусловленного ее испарением или ростом в пересыщенной среде вблизи бесконечной плоской поверхности жидкости или твердого тела. Расчеты, проведенные на основе полученных соотношений для испаряющейся капли воды, показали, что испарение капли микронных размеров может вызвать ее движение со скоростями в сотни микрометров в секунду. При этом возможно как движение капли к поверхности, так и от нее.

## Список литературы

- [1] Ying R. and Peters M.H. // Aerosol Sci. Technol. 1991. Vol. 14. N 4. P. 418.
- [2] Reed L.D. and Morrison F.A. // J. Aerosol. Sci. 1974. Vol. 5. P. 175.
- [3] Grashchenkov S.I. // Aerosol Sci. Technol. 1996. Vol. 25. N 2. P. 101.
- [4] Фукс Н.А. Испарение и рост капель в газообразной среде. М.: Изд-во АН СССР, 1958.
- [5] Хаттель Дж., Бреннер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М.: Мир, 1986. (Happel J. and Brenner H. Low Reynolds Number Hydrodynamics. Leyden: Noordhoff, 1965.)
- [6] Яламов Ю.И., Галоян В.С. Динамика капель в неоднородных вязких средах. Ереван: Луйс, 1985.

- [7] *Сивухин Д.В.* Термодинамика и молекулярная физика. М.: Наука, 1990.
- [8] *Stimson J., Jeffry G.B.* // Proc. Roy. Soc. 1926. Vol. A111. P. 110.
- [9] *Ламб Г.* Гидродинамика. М.: Гостехиздат, 1947.
- [10] *Варгафтик Н.Б.* Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей. М.: Наука, 1972.
- [11] Теплопроводность жидкостей и газов. М.: Изд-во стандартов, 1987.
- [12] *Маясов Е.Г., Юшканов А.А., Яламов Ю.И.* // Письма в ЖТФ. 1988. Т. 4. Вып. 6. С. 498.
- [13] *Алехин Е.И.* Граничные условия в динамике разреженных неоднородных многокомпонентных газов. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. МОПИ, 1990.
- [14] *Яламов Ю.И., Щукин Е.Р., Алехин Е.И.* // Теплофиз. высоких темп. 1990. Т. 28. № 2. С. 256.
- [15] *Kern D.Q.* Process Heat Transfer. NY: McGraw-Hill, 1950.
- [16] *Hallett F.R., Speight P.A., Stinson R.H., Graham W.G.* Introductory biophysics. NY: Halsted Press, 1977.
- [17] *Ross S.* Variation with temperature of surface tension of lubricating oils. Washington: NASA, 1950.
- [18] *Райст П.* Аэрозоли. Введение в теорию. М.: Мир, 1987. (Reist P. Introduction to Aerosol Science. NY: Macmillan Publishing Company, 1984).