

01;04

О структуре заряженного приэлектродного слоя в плазме с вырожденными электронами

© А.Е. Дубинов, Л.А. Сенилов

Саровский государственный физико-технический институт,
607186 Саров, Нижегородская область, Россия
e-mail: dubinov-ae@yandex.ru

(Поступило в Редакцию 4 июня 2009 г. В окончательной редакции 2 ноября 2009 г.)

Разработана нелинейная самосогласованная теория стационарного заряженного приэлектродного слоя в плазме, в которой одна из компонент — электронная — квантово вырождена. Теория основана на газодинамическом двухжидкостном описании плазмы, причем вырожденная компонента удовлетворяет уравнению состояния холодного ферми-газа (в приближении Томаса–Ферми), а классическая компонента — уравнению состояния идеального классического газа (в изотермическом приближении). Выведен обобщенный критерий Бома существования стационарного слоя, а также критерий формирования в слое структуры типа „двойной слой“. Теория проиллюстрирована численными примерами различных структур в слое: типа „монослой“ и типа „двойной слой“.

Введение

Известно, что вблизи электрода, помещенного в газоразрядную плазму, может образовываться стационарный слой пространственного заряда. Задача определения структуры слоя, т. е. стационарных профилей концентраций компонент плазмы, а также профиля электрического поля, является важной для многих приложений.

Одним из первых эту задачу решал Д. Бом [1], который из рассмотрения самосогласованных уравнений динамики ионов и электронов пришел к формулировке критерия существования стационарного слоя.¹ Этот критерий носит сейчас его имя [3].

Модель плазмы, в рамках которой был получен критерий Бома, достаточно проста: плазма является бесстолкновительной, электронная компонента безынерционна и подчиняется распределению Больцмана, а ионная компонента является абсолютно холодной. При этом критерий Бома формулируется следующим образом: скорость входящих в слой ионов должна превышать скорость ионного звука [3].

Позже были рассмотрены приэлектродные слои для более развитых моделей плазмы, учитывающих те или иные ее особенности. Обзор полученных теоретических результатов по структуре этих слоев в плазме дан в [4].

Одно из недавних направлений в развитии теории приэлектродных слоев заключается в одновременном учете инерции электронной компоненты и учете конечной ионной температуры [5]. В рамках этой модели было показано, что при определенных условиях приэлектродный слой может принимать форму двойного заряженного слоя. В работах [6–8] был получен обобщенный критерий Бома существования стационарного слоя и

критерий формирования в нем двойного электрического слоя.

Целью настоящей работы является получение аналогичных критериев для плазмы, в которой электронная компонента представляет собой вырожденный ферми-газ. В [9] было показано, что такая плазма может существовать в лабораторных и космических условиях, причем, несмотря на вырождение одной из ее компонент, плазма может считаться идеальной.

В [9] для описания динамики вырожденной компоненты плазмы было применено приближение Томаса–Ферми и были исследованы особенности ионно-звуковых волн. Чуть позднее это приближение было использовано и для описания других волновых явлений в плазме с вырожденными компонентами [10–14]. Аналогичный подход на основе приближения Томаса–Ферми будет применен и в настоящей работе.

1. Описание модели плазмы, обозначения и нормировки

Рассмотрим квазинейтральную бесстолкновительную плазму, состоящую из холодного вырожденного ферми-газа свободных электронов (индекс „–“) и классического ионного газа (индекс „+“).

Введем одномерную систему координат. Пусть невозмущенная плазма занимает область $x \leq 0$, т. е. граница между невозмущенной плазмой и заряженным слоем соответствует точке с координатой $x = 0$. При этом поверхность электрода и заряженный слой находятся при $x \geq 0$.

Выберем следующие условия, которым удовлетворяют электростатический потенциал, конвективные скорости и концентрации электронов и ионов на границе

¹ Теория заряженного слоя на границе „плазма–стенка“ была развита еще в работе И. Ленгмюра [2], но в современной форме критерий стационарного существования слоя, в котором сравниваются скорость ионов и скорость ионного звука, дана все же в работе Д. Бома [1].

плазма-слой:

$$\begin{aligned} \varphi(0) = 0, \quad \frac{d\varphi(0)}{dx} = -E(0), \quad v_{\pm}(0) = V_{0\pm}, \\ n_{\pm}(0) = n_{0\pm}, \quad n_{0-} = Zn_{0+} = n_0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь E — электрическое поле, Z — зарядовое число ионов.

Для описания динамики электронов и ионов будем использовать уравнения состояния для давлений P_{\pm} холодного ферми-газа и классического идеального газа соответственно:

$$\begin{cases} P_- = \frac{2}{5} \varepsilon_- n_0 \left(\frac{n_-}{n_0} \right)^{5/3}, \\ P_+ = n_+ k T_+, \end{cases} \quad (2)$$

где ε_- — энергия Ферми электронов, T_+ — температура ионов, k — постоянная Больцмана.

2. Получение зависимости электронной концентрации от потенциала

Запишем уравнения движения и непрерывности для электронной компоненты плазмы:

$$\begin{cases} m_- n_- \left(\frac{\partial v_-}{\partial t} + v_- \frac{\partial v_-}{\partial x} \right) = -en_- \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial P_-}{\partial x}; \\ \frac{\partial n_-}{\partial t} + \frac{\partial(n_- v_-)}{\partial x} = 0, \end{cases} \quad (3)$$

где e — заряд электрона, m_- — его масса.

Рассматривая стационарный случай $\partial v_- / \partial t \equiv 0$, разрешим систему относительно концентрации электронов n_- в виде зависимости ее от потенциала φ . Эта зависимость представляется набором из четырех корней:

$$n_-(\varphi) = n_0 \left(\pm \frac{\sqrt{C_1}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{C_2 - \frac{f_2^3}{4\sqrt{C_1}} - \frac{f_2}{4}} \right)^{3/2}. \quad (4)$$

Для сокращения объема записи введены следующие обозначения:

$$\begin{cases} C_1 = \frac{4\sqrt[3]{2}}{f_1} + \frac{f_1 m_- v_{0-}^2}{6\sqrt[3]{2}\varepsilon_-} + \frac{f_2^2}{4}; \\ C_2 = -\frac{4\sqrt[3]{2}}{f_1} - \frac{f_1 m_- v_{0-}^2}{6\sqrt[3]{2}\varepsilon_-} + \frac{f_2^2}{2}; \\ f_1 = \sqrt[3]{27 \left(-\frac{2e\varphi}{m_- v_{0-}^2} + \frac{2\varepsilon_-}{m_- v_{0-}^2} + 1 \right)^2 + \sqrt{729 \left(-\frac{2e\varphi}{m_- v_{0-}^2} + \frac{2\varepsilon_-}{m_- v_{0-}^2} + 1 \right)^4 - 6912 \left(\frac{2\varepsilon_-}{m_- v_{0-}^2} \right)^3}}; \\ f_2 = - \left(-\frac{e\varphi}{\varepsilon_-} + \frac{m_- v_{0-}^2}{2\varepsilon_-} + 1 \right). \end{cases} \quad (5)$$

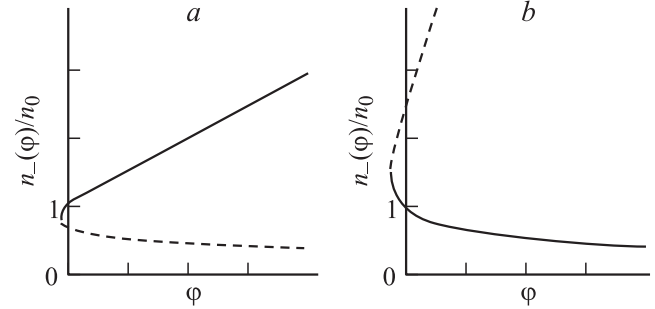


Рис. 1. Графики концентрации электронов как функции потенциала.

Проведем селекцию единственного физически верного корня из четырех. Очевидно, что корни с отрицательным первым слагаемым в (5) всегда чисто мнимые, они являются физически ложными, и поэтому их следует отбросить. Выделить верный корень из двух оставшихся нам поможет условие квазинейтральности невозмущенной плазмы ($n_-(\varphi = 0)/n_0 = 1$).

Анализ показал следующее правило выбора корней:

$$n_-(\varphi) = \begin{cases} n_0 \left(\frac{\sqrt{C_1}}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{C_2 - \frac{f_2^3}{4\sqrt{C_1}} - \frac{f_2}{4}} \right)^{3/2}, & \varepsilon_- > 3 \left(\frac{m_- v_{0-}^2}{2} \right); \\ n_0 \left(\frac{\sqrt{C_1}}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{C_2 - \frac{f_2^3}{4\sqrt{C_1}} - \frac{f_2}{4}} \right)^{3/2}, & \varepsilon_- < 3 \left(\frac{m_- v_{0-}^2}{2} \right). \end{cases} \quad (6)$$

Графики этих корней представлены на рис. 1; отбрасываемые корни показаны пунктиром.

3. Получение зависимости ионной концентрации от потенциала

Запишем уравнения движения и непрерывности для классического ионного газа:

$$\begin{cases} m_+ \left(\frac{\partial v_+}{\partial t} + v_+ \frac{\partial v_+}{\partial x} \right) = Ze \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{1}{n_+} \frac{\partial P_+}{\partial x}; \\ \frac{\partial n_+}{\partial t} + \frac{\partial(n_+ v_+)}{\partial x} = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Решив систему относительно концентрации ионного газа как функции потенциала, аналогично предыдущему случаю получим набор из четырех корней, выраженных через основную и отрицательную действительные ветви W -функции Ламберта [15]:

$$n_+ = \frac{n_0}{Z} \frac{\pm 1}{\sqrt{-\frac{kT_+}{m_+ v_{0+}^2} W_{0,-1} \left[-\frac{m_+ v_{0+}^2}{kT_+} \exp\left(\frac{-m_+ v_{0+}^2 + 2Ze\varphi}{kT_+}\right) \right]}}. \quad (8)$$

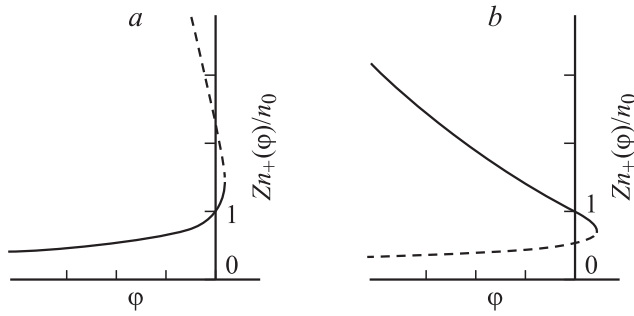


Рис. 2. Графики концентрации ионов как функции потенциала.

Очевидно, что два отрицательных корня являются физически ложными и их следует отбросить. Для дальнейшей селекции корней также воспользуемся условием квазинейтральности невозмущенной плазмы: $Zn_+(\varphi = 0)/n_0 = 1$.

Анализ показал, что при $kT_+ > m_+v_{0+}^2$ следует выбирать из (8) положительный корень, выраженный через основную ветвь W -функции Ламберта — W_0 , а в случае, когда $kT_+ < m_+v_{0+}^2$, необходимо брать корень, выраженный через отрицательную ветвь W -функции Ламберта — W_{-1} . Графики функции $n_+(\varphi)$ для этих двух случаев приведены на рис. 2.

4. Обобщение критерия Боме существования стационарного слоя

Для вывода обобщенного критерия Боме существования стационарного заряженного слоя в нашей модели плазмы с вырожденными электронами воспользуемся следующим условием, накладываемым на величину пространственного заряда,

$$\begin{cases} \left. \frac{d\rho}{d\varphi} \right|_{\varphi=0} \leq 0; \\ \rho(\varphi) = -Zen_+ + en_-. \end{cases} \quad (9)$$

Его обоснование дано в работах [7,8], оно исключает осциллирующие решения задачи для профилей потенциала и концентраций компонент в слое. Интересно отметить, что математически аналогичное условие возникает в нелинейной задаче о ионно-звуковых волнах в плазме: когда выполняется условие типа (9) — существуют ионно-звуковые солитоны, а когда знак неравенства иной — существуют периодические волны, причем это разграничение, как оказывается, проходит через значение линейной скорости ионного звука.

Дифференцируя концентрации частиц по φ с учетом (3) и (7), получаем

$$\begin{cases} \frac{dn_+}{d\varphi} = -\frac{Zen_+}{m_+v_+^2 - kT_+}; \\ \frac{dn_-}{d\varphi} = \frac{en_-}{m_-v_-^2 - \frac{2}{3}\varepsilon_- \left(\frac{n_-}{n_0}\right)^{2/3}} \end{cases} \quad (10)$$

и после подстановки (10) в (9):

$$\rho'(0) = \frac{Z^2 e^2 n_{+0}}{m_+ v_{0+}^2 - kT_+} + \frac{e^2 n_{-0}}{m_- v_{0-}^2 - \frac{2}{3} \varepsilon_-} \leq 0. \quad (11)$$

А с учетом того, что $n_{-0} = Zn_{+0} = n_0$, и приведя к общему знаменателю, получаем:

$$\frac{\left(1 - \frac{kT_+}{m_+ v_{0+}^2}\right) + \left(\frac{Zm_- v_{0-}^2}{m_+ v_{0+}^2} - \frac{2Z\varepsilon_-}{3m_+ v_{0+}^2}\right)}{\left(1 - \frac{kT_+}{m_+ v_{0+}^2}\right) \left(\frac{Zm_- v_{0-}^2}{m_+ v_{0+}^2} - \frac{2Z\varepsilon_-}{3m_+ v_{0+}^2}\right)} \leq 0. \quad (12)$$

i. Рассмотрим случай, когда знаменатель дроби в неравенстве (12) положителен. Возможны следующие варианты:

$$\begin{cases} kT_+ < m_+ v_{0+}^2; \\ \frac{2}{3} \varepsilon_- < m_- v_{0-}^2. \end{cases} \quad (\text{iA})$$

$$\begin{cases} kT_+ > m_+ v_{0+}^2; \\ \frac{2}{3} \varepsilon_- > m_- v_{0-}^2. \end{cases} \quad (\text{iB})$$

Система (iA) в (13) не удовлетворяет неравенству (11), следовательно, этот вариант следует отбросить из рассмотрения.

ii. Если рассматривать случай, когда знаменатель дроби в неравенстве (12) отрицателен, то тогда справедливо:

$$Zm_- v_{0-}^2 + m_+ v_{0+}^2 \geq kT_+ + \frac{2}{3} Z\varepsilon_-. \quad (14)$$

Условие (14) представляет собой обобщенный критерий Боме, который можно записать в очень компактной форме:

$$\langle v_0^2 \rangle \geq v_s^2. \quad (15)$$

Задействованные в (15) величины имеют ясную физическую интерпретацию: слева — квадрат средней скорости $\langle v_0^2 \rangle$ частиц на границе плазма–слой, причем усреднение произведено по массам частиц, справа — квадрат скорости линейного ионного звука v_s^2 (еще раз вспомним об аналогии с теорией ионно-звуковых волн в плазме). Эти скорости определяются следующими выражениями:

$$\langle v_0^2 \rangle = \frac{Zm_- v_{0-}^2 + m_+ v_{0+}^2}{Zm_- + m_+}, \quad (16)$$

$$v_s^2 = \frac{kT_+ + \frac{2}{3} Z\varepsilon_-}{Zm_- + m_+}. \quad (17)$$

Вывод скорости ионного звука дан в Приложении.

Приведем возможные соотношения между параметрами плазмы, следующие из неравенства (14):

$$\begin{cases} kT_+ < m_+ v_{0+}^2; \\ \frac{2}{3} \varepsilon_- > m_- v_{0-}^2. \end{cases} \quad (\text{iiC})$$

$$\begin{cases} kT_+ > m_+ v_{0+}^2; \\ \frac{2}{3} \varepsilon_- < m_- v_{0-}^2. \end{cases} \quad (\text{iiD})$$

(18)

Таким образом, стационарное существование заряженного слоя возможно при соблюдении одного из трех наборов условий, заданных системами (iB), (iiC) или (iiD) соответственно.

5. Критерий существования стационарного двойного заряженного слоя

При выводе обобщенного критерия Бома, определяющего условия существования стационарного заряженного слоя, в п. 5 принималось в качестве исходного неравенство (9). Если данное условие выполняется не только на границе плазма-слой ($x = 0$), но и везде внутри слоя ($x > 0$), то имеет место монослой. Но возможна ситуация, когда внутри слоя существует такая точка x^* , для которой значение потенциала есть $\varphi = \varphi^*(x^*)$, и выполнены условия $\rho(\varphi^*) = 0$ и $\rho'(\varphi^*) \geq 0$ (здесь штрих обозначает дифференцирование по φ). Это означает, что данный слой имеет двойную структуру и состоит из положительного и отрицательного подслоев. Введем обозначения $n_{\pm}^* = n_{\pm}(\varphi^*)$ и исследуем этот случай подробнее.

Распишем условия существования двойного слоя

$$\begin{cases} \rho(\varphi^*) = en_-^* - Zen_+^* = 0; \\ \rho'(\varphi^*) = -Ze \frac{dn_+^*}{d\varphi} + e \frac{dn_-^*}{d\varphi} \geq 0. \end{cases} \quad (19)$$

Объединение условий (19) в одно с учетом (10) дает неравенство:

$$\frac{n_-^*}{1 - \frac{kT_+}{m_+ v_+^2}} + \frac{n_+^*}{\frac{Zm_- v_-^2}{m_+ v_+^2} - \frac{2Z\varepsilon_-}{3m_+ v_+^2} \left(\frac{n_-^*}{n_0}\right)^{2/3}} \geq 0, \quad (20)$$

а после приведения дробей к общему знаменателю получим неравенство, математически аналогичное (12):

$$\frac{(m_+ v_+^2 - kT_+) + \left[Zm_- v_-^2 - \frac{2}{3} Z\varepsilon_- \left(\frac{n_-^*}{n_0}\right)^{2/3} \right]}{(m_+ v_+^2 - kT_+) \left[Zm_- v_-^2 - \frac{2}{3} Z\varepsilon_- \left(\frac{n_-^*}{n_0}\right)^{2/3} \right]} \geq 0, \quad (21)$$

анализ которого проведем тем же методом, что и анализ (12).

i. Рассмотрим случай, когда знаменатель дроби в левой части неравенства (21) положителен. В этом случае имеют место следующие условия:

$$\begin{cases} kT_+ < m_+ v_+^2; \\ \frac{2}{3} \varepsilon_- \left(\frac{n_-^*}{n_0}\right)^{2/3} < m_- v_-^2. \end{cases} \quad (\text{ia})$$

$$\begin{cases} kT_+ > m_+ v_+^2; \\ \frac{2}{3} \varepsilon_- \left(\frac{n_-^*}{n_0}\right)^{2/3} > m_- v_-^2. \end{cases} \quad (\text{ib})$$

(22)

Система (ia) может быть удовлетворена только в областях (iA) и (iC); в области (iA) заряженный слой не существует, поэтому этот случай следует исключить из дальнейшего рассмотрения. Система (ib) удовлетворяется в областях (iB) и (iiD), но при этом нарушается неравенство (20), поэтому и этот случай следует отбросить. Таким образом, при выполнении условия (ia) образование двойного слоя возможно только в области (iC), в случае (ib) заряженный слой не существует либо имеет вид монослоя.

ii. Рассмотрим второй случай, когда знаменатель дроби из неравенства (21) отрицателен.

Кроме решения (ib), которое отброшено выше, возможны следующие два случая:

$$\begin{cases} kT_+ < m_+ v_+^2; \\ \frac{2}{3} \varepsilon_- \left(\frac{n_-^*}{n_0}\right)^{2/3} > m_- v_-^2. \end{cases} \quad (\text{iiC})$$

$$\begin{cases} kT_+ > m_+ v_+^2; \\ \frac{2}{3} \varepsilon_- \left(\frac{n_-^*}{n_0}\right)^{2/3} < m_- v_-^2. \end{cases} \quad (\text{iiD})$$

(23)

Нетрудно видеть, что величина (n_-^*/n_0) может принимать значения как больше единицы, так и меньше ее; поэтому система (iiC) может выполняться в областях (iA) и (iiC). Первый случай можно исключить сразу, поскольку заряженный слой там не существует.

Аналогично, в зависимости от значения величины (n_-^*/n_0) , система (iiD) может выполняться в областях (iB) и (iiD). Тем не менее, анализ показывает, что образование двойного заряженного слоя возможно только в областях (iiC) и (iiD), и не выполнимо в области (iB). Причина следующая: точка $n_-^* = Zn_+^*$ существует только при условии, что концентрации $n_{\pm}(\varphi)$ ионов и электронов (как функции потенциала) возрастают или убывают одновременно, т.е. их производные $dn_{\pm}/d\varphi$ имеют один знак. Везде в области (iB) это условие нарушается. Таким образом, образование структуры типа двойного заряженного слоя возможно только в областях (iiC) и (iiD).

6. Графическое представление условий существования монослоя и двойного слоя

Области существования заряженного слоя, заданные с помощью систем (iB), (iiC) и (iiD), а также подобласти существования монослоя и двойного слоя гораздо нагляднее представить в виде графика (рис. 3). Качественно он идентичен графикам для классической плазмы, полученным в [6–8], однако точные значения границ здесь, конечно, другие.

7. Численные примеры структуры профилей

Изучим структуру стационарного слоя с помощью численных примеров. Запишем уравнение Пуассона:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{dx^2} = -\frac{1}{\varepsilon_0} [en_-(\varphi) - Zen_+(\varphi)]. \quad (24)$$

Оно представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение 2-го порядка, разрешить которое аналитически не удастся. Поэтому его интегрирование можно осуществить численно, например, методом Рунге–Кутты.

Для каждой из трех областей (iB), (iiC) и (iiD) существования слоя была выбрана произвольная точка и построены характерные профили. Параметры точек представлены в таблице, а профили электростатического потенциала и концентраций как для положительно заряженного электрода, так и для отрицательно заряженного электрода, показаны на рис. 4.

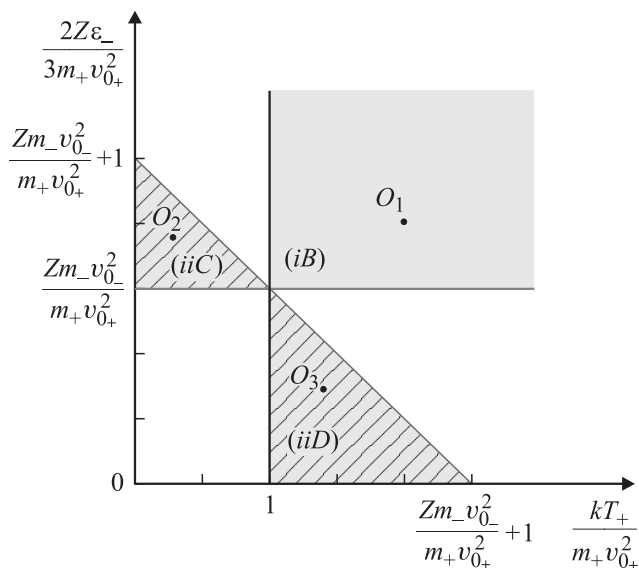


Рис. 3. График возможных областей образования стационарного заряженного слоя. Области существования монослоя закрашены, а для двойного слоя — заштрихованы. Также на рисунке отмечены точки, выбранные при дальнейшем построении графиков.

Значения параметров для точек O_1 , O_2 и O_3

Точки и области	$\frac{Zm_- v_{0-}^2}{m_+ v_{0+}^2} + 1$	$\frac{kT_+}{m_+ v_{0+}^2}$	$\frac{2Ze_-}{3m_+ v_{0+}^2}$	$\varphi(0)$	$E(0)$
O_1 (iB)	1.5	2	2	0	± 0.5
O_2 (iiC)	1.5	0.3	1.8	o	± 0.5
O_3 (iiD)	1.5	1.4	0.7	0	± 0.5

Как видим, в области (iB) кривые концентраций ионов и электронов нигде не пересекаются, что соответствует монослою. Для области (iiC) кривые концентраций пересекаются в случае положительного электрода, а для области (iiD) — в случае отрицательного электрода. Здесь слой имеет структуру двойного слоя. Это полностью соответствует результатам представленного выше анализа.

Выводы

Таким образом, разработана нелинейная самосогласованная одномерная теория стационарного заряженного приэлектродного слоя в бесстолкновительной плазме, в которой одна из компонент — электронная — квантово вырождена. Теория основана на газодинамическом двухжидкостном описании плазмы, причем вырожденная компонента удовлетворяет уравнению состояния холодного ферми-газа (в приближении Томаса–Ферми), а классическая компонента — уравнению состояния идеального классического газа (в изотермическом приближении).

Для данной модели плазмы выведены обобщенный критерий Боба существования стационарного слоя, а также критерий формирования в слое структуры типа „двойной слой“. Рассмотрена аналогия теории стационарного слоя с нелинейной теорией ионно-звуковых волн в плазме того же состава.

Теория проиллюстрирована численными примерами различных структур в слое: структуры типа „монослой“ и структуры типа „двойной слой“.

Приложение. Вывод выражения (22) для линейной скорости

Необходимость вывода данного выражения связана с тем, что оно отсутствует в литературе (в работе [9] аналогичное выражение было получено в пренебрежении инерцией вырожденных электронов, т.е. при $m_- \rightarrow 0$, здесь это упрощающее условие не используется). Для вывода выражения (17) для линейной скорости ионного звука будем исходить из следующей системы уравнений двухжидкостной газодинамики для бесстолкновительной

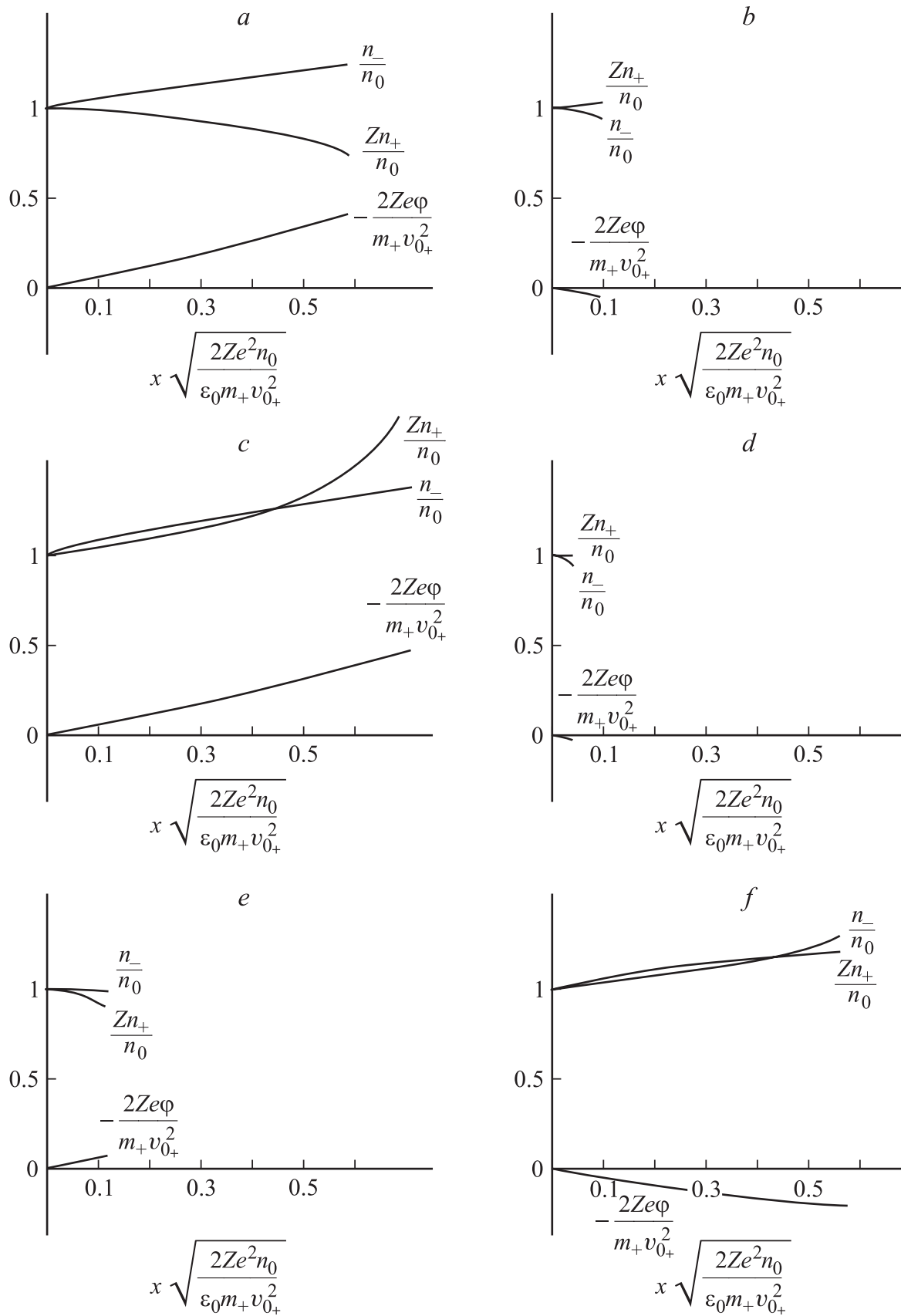


Рис. 4. Графики профилей безразмерных потенциала и концентраций в зависимости от координаты.

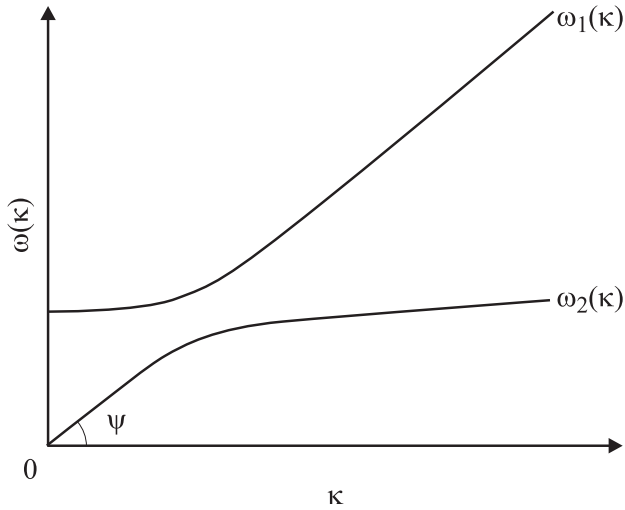


Рис. 5. Дисперсионные кривые электростатических колебаний (к выводу выражения (22) для линейной скорости ионного звука).

плазмы:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 4\pi Z e n_+ - 4\pi e n_-; \\ \frac{\partial v_-}{\partial t} + v_- \frac{\partial v_-}{\partial x} = \frac{-e}{m_-} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{1}{m_- n_-} \frac{\partial P_-}{\partial x}; \\ \frac{\partial v_+}{\partial t} + v_+ \frac{\partial v_+}{\partial x} = \frac{Ze}{m_+} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{1}{m_+ n_+} \frac{\partial P_+}{\partial x}; \\ \frac{\partial n_-}{\partial t} + n_- \frac{\partial v_-}{\partial x} + v_- \frac{\partial n_-}{\partial x} = 0; \\ \frac{\partial n_+}{\partial t} + n_+ \frac{\partial v_+}{\partial x} + v_+ \frac{\partial n_+}{\partial x} = 0, \end{array} \right. \quad (25)$$

в которых слагаемые в форме градиента давления удовлетворяют уравнениям состояния (2).

Придавая системе малые гармонические возмущения $\sim \exp[i(\kappa x - \omega t)]$, в результате решения системы получаем дисперсионное уравнение:

$$\frac{\omega_{p-}^2}{\left(\omega^2 - \frac{2\varepsilon_-}{3m_-} \kappa^2\right)} + \frac{\omega_{p+}^2}{\left(\omega^2 - \frac{kT_+}{m_+} \kappa^2\right)} = 1. \quad (26)$$

Здесь ω_{p-} и ω_{p+} — соответственно электронная и ионная плазменные частоты для невозмущенной концентрации n_0 . Данное уравнение имеет следующие четыре корня:

$$\omega_i(\kappa) = \pm \frac{1}{2} \sqrt{A_1 \pm 2\sqrt{A_2}}. \quad (27)$$

В (27) через A_1 и A_2 обозначены следующие величины:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1 = 2 \left(\frac{2\varepsilon_-}{3m_-} + \frac{kT_+}{m_+} \right) \kappa^2 + 2(\omega_{p-}^2 + \omega_{p+}^2); \\ A_2 = (\omega_{p-}^2 + \omega_{p+}^2)^2 + 2 \left(\frac{2\varepsilon_-}{3m_-} - \frac{kT_+}{m_+} \right) \times \\ \quad \times (\omega_{p-}^2 + \omega_{p+}^2) \kappa^2 + \left(\frac{2\varepsilon_-}{3m_-} - \frac{kT_+}{m_+} \right)^2 \kappa^4. \end{array} \right. \quad (28)$$

Отрицательные корни нефизичны, и они рассматриваться не будут. Графики оставшихся корней $\omega_1(\kappa)$ и $\omega_2(\kappa)$ представлены на рис. 5. Как видно, кривая $\omega_2(\kappa)$ выходит из начала координат и определяет там почти бездисперсионный линейный ионный звук, имеющий скорость $v_s = \text{tg } \Psi$, тогда

$$v_s = \text{tg } \Psi = \lim_{\kappa \rightarrow 0} \frac{d\omega}{d\kappa} = \sqrt{\frac{\frac{kT_+}{m_+} \omega_{p-}^2 + \frac{2\varepsilon_-}{3m_-} \omega_{p+}^2}{\omega_{p-}^2 + \omega_{p+}^2}} = \sqrt{\frac{kT_+ + \frac{2Z\varepsilon_-}{3}}{m_+ + Zm_-}}. \quad (29)$$

Список литературы

- [1] *Bohm D.* The characteristics of electrical discharges in magnetic field. NY: Mc-Graw-Hill, 1949. P. 77.
- [2] *Langmuir I.* // Phys. Rev. 1929. Vol. 33. N 6. P. 954.
- [3] *Чен Ф.* Введение в физику плазмы. М.: Мир, 1987. 398 с.
- [4] *Riemann K.-U.* // J. Phys. D.: Appl. Phys. 1991. Vol. 24. N 4. P. 493.
- [5] *Alterkop B.* // J. Appl. Phys. 2004. Vol. 95. N 4. P. 1650.
- [6] *Альтеркоп Б., Дубинова И.Д., Дубинов А.Е.* // ЖЭТФ. 2006. Т. 102. № 1. С. 173.
- [7] *Альтеркоп Б., Дубинова И.Д., Дубинов А.Е.* // ЖТФ. 2007. Т. 77. Вып. 7. С. 63.
- [8] *Alterkop B., Dubinova I.D., Dubinov A.E., Voxman R.L.* // Contrib. Plasma Phys. 2007. Vol. 47. N 3. P. 190.
- [9] *Дубинов А.Е., Дубинова А.А.* // Физ. плазмы. 2007. Т. 33. № 10. С. 935.
- [10] *Abdelsalam U.M., Moslem W.M., Shukla P.K.* // Phys. Lett. A.2008. Vol. 372. N 22. P. 4057.
- [11] *Ali S., Shukla P.K.* // Phys. Lett. A. 2008. Vol. 372. N 27–28. P. 4827.
- [12] *Abdelsalam U.M., Moslem W.M., Ali S., Shukla P.K.* // Phys. Lett. A.2008. Vol. 372. N 29. P. 4923.
- [13] *Sabry R., Moslem W.M., Ali S., Shukla P.K.* // Phys. Lett. A. 2008. Vol. 372. N 35. P. 5691.
- [14] *Jehan N., Salahuddin M., Mahmood S., Mirza A.M.* // Phys. Plasmas. 2009. Vol.16. N 4. P. 042313.
- [15] *Дубинов А.Е., Дубинова И.Д., Сайков С.К.* W-функция Ламберта и ее применение в математических задач физики. Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2006. 160 с.