01;03

Капиллярный аналог эффекта „мертвой воды“ в стратифицированной жидкости с заряженной границей раздела сред

© А.И. Григорьев, С.О. Ширяева, М.С. Федоров

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
150000 Ярославль, Россия
e-mail: grig@uniyar.ac.ru

(Поступило в редакцию 28 мая 2009 г. В окончательной редакции 1 декабря 2009 г.)

В теоретическом аналитическом исследовании линейной математической модели капиллярно-гравитационного движения в двуслойной жидкости, когда верхний слой имеет конечную толщину, показано, что в области капиллярных волн существует аналог феномена „мертвой воды“, известный ранее только для гравитационных волн, проявляющийся в экспоненциальном увеличении амплитуды капиллярных волн на границе раздела сред при стремлении к нулю коэффициента поверхностного натяжения границы раздела. Показано, что наличие внешнего электрического поля приводит к смещению области реализации феномена в область конечных значений коэффициента поверхностного натяжения.

Введение

Пусть имеется жидкость со свободной поверхностью, физико-химические свойства приповерхностного слоя которой отличаются от таковых в объеме жидкости. Такая ситуация складывается, например, в проливах, соединяющих водоемы с различной соленостью или температурой, при смещении потоков воздуха с различной температурой, при таянии льда на поверхности моря, когда на поверхности тяжелой соленой воды появляется слой более легкой пресной. Последний пример и дал наименование эффекту, вынесенному в заглавие настоящей работы: корабль, попавший в такую пресную воду, пройдя по инерции некоторое расстояние, останавливался, и с какой бы мощностью не работали винты, корабль оставался неподвижным, а энергия винтов шла на раскачку гравитационных волн большой амплитуды на границе раздела пресной и соленой воды, тогда как на свободной поверхности пресной жидкости волны имели малую амплитуду [1]. Корабль освобождался из такого плена, только когда вследствие процессов естественной диффузии и перемешивания соленость воды выравнивалась. Описанный эффект не проявлялся для парусных судов и был обнаружен с началом использования в северных морях винтовых пароходов.

Стратификация по глубине физико-химических свойств жидкостей имеет место не только в морских масштабах, но и в микроскопических. Так, феномен динамического поверхностного натяжения связан с образованием двойного электрического слоя у поверхности полярных жидкостей, приводящего к изменению их физико-химических свойств в приповерхностном (толщиной порядка сотни микрометров) слое по сравнению с объемными значениями [2–4]. Феномен самоорганизации магнитных коллоидов [5–7] реализуется на пространственных линейных масштабах порядка единиц микрометров. Ориентирующее действие твердой подложки на молекулы жидкости и соответствующее изменение свойств жидкости в слоях толщиной порядка десятых долей микрометров связано с действием флуктуационных сил [8–10]. В упомянутых ситуациях на границе областей стратификации возможно возникновение внутренних капиллярных волн и появляется основание для поиска аналога эффекта „мертвой воды“ в диапазоне весьма коротких колн.

1. Постановка задачи

Рассмотрим две идеальные несжимаемые жидкости, верхняя из которых — диэлектрик диэлектрической проницаемостью ε имеет толщину h и плотность ρ_1, а нижняя — идеальный проводник с плотностью ρ_2 заполняет в поле сил тяжести $\mathbf{g}$ (где $\mathbf{g} \parallel -\mathbf{e}_z$, $\mathbf{e}_z$ — орт декартовой системы координат) полубесконечное пространство $z < 0$ (кроме того $\rho_2 > \rho_1$). Примем, что на границе раздела жидкостей (в равновесном состоянии $z = 0$) равномерно распределен электрический заряд, который создает в области пространства $z > 0$ электростатическое поле. Будем исследовать капиллярно-гравитационные волны на свободной поверхности верхнего слоя жидкости и на границе раздела сред.

Математическая формулировка задачи имеет вид [2,3,11]:

$$\frac{\partial \mathbf{V}_i}{\partial t} + (\mathbf{V}_i \cdot \nabla)V_i = -\nabla\left(\frac{P_i}{\rho_i}\right) + \mathbf{g}; \quad \mathrm{div}\mathbf{V}_i = 0 \quad (i = 1, 2);$$

$$z = \xi_2: \qquad \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{V}_1 = \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{V}_2;$$

$$F_i(x, z, t) = 0: \qquad \frac{\partial F_i}{\partial t} + (\mathbf{V}_i \cdot \nabla)F_i = 0;$$

$$z = h + \xi_1: \qquad P_1 - P_{at} + P_{1E} - P_{1\sigma} = 0;$$

$$z = \xi_2: \qquad P_2 - P_1 + P_{2E} - P_{2\sigma} = 0;$$

$$z \to -\infty: \qquad \mathbf{V}_2 \to 0, \tag{1}$$

где $\mathbf{V}_i$ — поле скоростей в верхней и нижней жидкостях; $\mathbf{n}_2$ — вектор нормали к границе раздела сред; функции $F_1(x,z,t) \equiv z - \xi_1(x,t) - h$ и $F_2(x,z,t) \equiv z - \xi_2(x,t)$ определяют уравнения свободной поверхности верхнего слоя жидкости $F_1(x,z,t) = 0$ и границы раздела жидкости $F_2(x,z,t) = 0$; $\xi_1(x,t)$ и $\xi_2(x,t)$ — возмущения свободной поверхности слоя и границы раздела сред соответственно, амплитуды которых $|\xi_1| \sim |\xi_2| \ll h$ принимаются в качестве малого параметра задачи; P_1 и P_2 — гидродинамические давления в слое и нижней жидкости; P_{at} — постоянное давление верхней среды на свободную поверхность слоя (атмосферное давление); $P_{1\sigma}$, $P_{2\sigma}$ и P_{1E}, P_{2E} — капиллярные и электростатические давления на свободную поверхность и на границу раздела сред (индексы 1 и 2 относятся к верхнему слою и нижней бесконечно глубокой жидкости соответственно).

Для замыкания системы уравнений (1) необходимо сформулировать задачу отыскания электрического поля:

$$\Delta\Phi_j = 0; \quad \mathbf{E}_j = -\nabla\Phi_j \quad (j = 0, 1), \tag{2}$$

где $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_0$ — напряженность электрического поля; и Φ_1, Φ_0 — электростатические потенциалы в слое жидкости и во внешней среде соответственно.

Граничные условия, которым должны удовлетворять потенциалы на границе раздела двух жидкостей и свободной поверхности слоя, имеют вид

$$z = \xi_2: \qquad \Phi_1 = \mathrm{const};$$

$$z = h + \xi_1: \quad \mathbf{n}\cdot\nabla\Phi_0 = \varepsilon\mathbf{n}\cdot\nabla\Phi_1; \quad \boldsymbol{\tau}\cdot\nabla\Phi_0 = \boldsymbol{\tau}\cdot\nabla\Phi_1;$$

$$z \to \infty: \qquad -\nabla\Phi_0 \to \mathbf{E}_* = E_*\mathbf{e}_z, \tag{3}$$

$\mathbf{E}_*$ — напряженность электростатического поля в верхней (внешней для жидкости) среде в отсутствие деформации свободной поверхности (при $\xi_1 \equiv 0$).

2. Линеаризация задачи

Будем решать задачу в рамках модели потенциального течения жидкости: $\mathbf{V}_i = \nabla\varphi_i$ $(i = 1, 2)$, где φ_1 и φ_2 — потенциалы поля скоростей движения в верхней и нижней жидкости соответственно. Поскольку движения обеих жидкостей вызваны малыми колебаниями их поверхностей, то примем, что потенциалы φ_1, φ_2 имеют тот же порядок малости, что и амплитуды капиллярно-гравитационных волн: $|\varphi_i| \sim |\xi_i|$.

Для линеаризации задачи все искомые величины в системе уравнений (1)–(3) представим в виде следующих разложений:

$$\Phi_j(x,z,t) \approx \Phi_j^{(0)}(z) + \delta\Phi_j(x,z,t) \quad (j = 0, 1);$$

$$P_i = P_i^{(0)} + P_i^{(1)}; \qquad P_{iE}^{(0)} + P_{iE}^{(1)};$$

$$P_{i\sigma} = P_{i\sigma}^{(0)} + P_{i\sigma}^{(1)} \quad (i = 1, 2), \tag{4}$$

где верхний индекс означает порядок малости соответствующей компоненты электростатического потенциала и давления: нулем помечены равновесные значения, не связанные с возмущением (причем потенциалы равновесного невозмущенного состояния в силу симметрии задачи зависят только от координаты Z), а единицей — добавки первого порядка малости к соответствующим давлениям, вызванные возмущением свободной поверхности и границы раздела, $\delta\Phi_j$ — добавки первого порядка малости к соответствующим потенциалам.

Подставив разложения (4) в задачу (1)–(2) и учитывая (3), получим краевые задачи различных порядков малости.

В нулевом порядке малости будем иметь

$$\partial_{zz}\Phi_j^{(0)} = 0; \quad P_i^{(0)} = -\rho_i g z + f_i; \tag{5}$$

$$z = h: \ f_1 = \rho_1 g h + P_{at} - P_{1E}^{(0)} + P_{1\sigma}^{(0)}; \ \partial_z\Phi_0^{(0)} = \varepsilon\partial_z\Phi_1^{(0)};$$

$$z = 0: \quad f_2 = f_1 - P_{2E}^{(0)} + P_{2\sigma}^{(0)}; \quad \Phi_1^{(0)} = \mathrm{const}; \tag{6}$$

$$z \to \infty: \qquad \nabla\Phi_0^{(0)} \to -\mathbf{E}_0. \tag{7}$$

Здесь f_1, f_2 — константы интегрирования уравнений Эйлера.

В первом порядке малости получим

$$\Delta\varphi_i = 0; \ P_i^{(1)} = -\rho_i\partial_t\varphi_i; \ \Delta\delta\Phi_j = 0 \ (i = 1, 2; \ j = 0, 1); \tag{8}$$

$$z = h: \quad \partial_t\xi_1 = \partial_z\varphi_1; \quad -\rho_1(\partial_t\varphi_1 + g\xi_1) + P_{1E}^{(1)} - P_{1\sigma}^{(1)} = 0; \tag{9}$$

$$\partial_z\delta\Phi_0 = \varepsilon\partial_z\delta\Phi_1;$$

$$\partial_x\xi_1\partial_z\Phi_0^{(0)} + \partial_x\delta\Phi_0 = \partial_x\xi_1\partial_z\Phi_1^{(0)} + \partial_x\delta\Phi_1; \tag{10}$$

$$z = 0: \qquad -\rho_2\partial_t\varphi_2 + \rho_1\partial_t\varphi_1 - (\rho_2 - \rho_1)g\xi_2 + P_{2E}^{(1)} - P_{2\sigma}^{(1)} = 0; \tag{11}$$

$$\partial_z\varphi_1 = \partial_z\varphi_2 = \partial_t\xi_2; \quad \partial\Phi_1 + \partial_z\Phi_1^{(0)}\xi_2 = 0; \tag{12}$$

$$z \to -\infty: \quad |\nabla\varphi_2| \to 0; \qquad z \to \infty: \quad |\nabla\delta\Phi_0| \to 0. \tag{13}$$

Для определения капиллярного давления на границу раздела и свободную поверхность жидкости удобно воспользоваться известным выражением:

$$P_{i\sigma} = \sigma_i \,\mathrm{div}\,\mathbf{n} \quad (i = 1, 2),$$

где вектор нормали определяется через уравнение поверхности

$$F_i(x,z,t) = 0: \qquad \mathbf{n}_i = \frac{\nabla F_i(x,y,z)}{|\nabla F_i(x,y,z)|}.$$

Используя введенные выше выражения для функций $F_i(x,z,t)$, несложно получить: $\mathbf{n}_i = \mathbf{e}_z - \mathbf{e}_x\partial_x\xi_i$. Тогда компоненты капиллярных давлений могут быть представлены через возмущения границы раздела и свободной поверхности жидкости в следующем виде:

$$P_{i\sigma}^{(0)} = 0; \quad P_{i\sigma}^{(1)} = -\sigma_i\partial_{xx}\xi_i \quad (i = 1, 2). \tag{14}$$

Для определения давления электрического поля на свободную поверхность P_{1E} и границу раздела сред P_{2E} воспользуемся выражением для электростатического давления на границу раздела двух диэлектрических сред:

$$P_E = \frac{1}{8\pi}(\varepsilon_{\text{in}} - \varepsilon_{\text{ex}})\left[(\mathbf{E}^{\text{ex}})^2 - \left(1 - \frac{\varepsilon_{\text{ex}}}{\varepsilon_{\text{in}}}\right)(\mathbf{n}\cdot\mathbf{E}_n^{\text{ex}})^2\right], \quad (15)$$

где индексы „ex" и „in" отмечают величины, внешние и внутренние по отношению к поверхности раздела.

В задаче электростатическое давление P_{1E} является давлением на свободную поверхность жидкого диэлектрика, граничащего с вакуумом, т.е. диэлектриком с проницаемостью, равной единице. Заменив в выражении (15) поле $\mathbf{E}^{\text{ex}}$ на поле в верхней среде: $\mathbf{E}_0 = -\nabla\Phi_0$, внутреннюю диэлектрическую проницаемость ε_{in} — на диэлектрическую проницаемость слоя жидкости ε, а внешнюю — на проницаемость вакуума, равную единице $\varepsilon_{\text{ex}} = 1$, получим

$$z = h + \xi_1: \quad P_{1E} = \frac{\varepsilon - 1}{8\pi}\left[(\nabla\Phi_0)^2 - \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}(\mathbf{n}\cdot\nabla\Phi_0)^2\right]. \quad (16)$$

Для определения электростатического давления P_{2E} на границу раздела проводника (бесконечно глубокая идеально проводящая жидкость) и диэлектрика (слой жидкости толщиной h) учтем, что в этом случае вектор напряженности внешнего поля $\mathbf{E}^{\text{ex}}$ направлен по нормали и совпадает по модулю с нормальной проекцией: $E^{\text{ex}} = E_n^{\text{ex}}$. Заменив в выражении (15) поле $\mathbf{E}^{\text{ex}}$ на поле в верхнем слое $\mathbf{E}_1 = -\nabla\Phi_1$ и переходя к пределу $\varepsilon_{\text{in}} \to \infty$ (так как диэлектрическая проницаемость проводника стремится к бесконечности), получим

$$z = \xi_2: \qquad P_{2E} = \frac{\varepsilon}{8\pi}(\nabla\Phi_1)^2. \quad (17)$$

Подставив в (16), (17) разложения (4) для электростатических потенциалов, запишем компоненты электростатических давлений различных порядков малости в следующем виде:

— нулевой порядок малости

$$z = h: \qquad P_{1E}^{(0)} = \frac{\varepsilon - 1}{8\pi\varepsilon}(\partial_z\Phi_0^{(0)})^2;$$

$$z = 0: \qquad P_{2E}^{(0)} = \frac{\varepsilon}{8\pi}(\partial_z\Phi_1^{(0)})^2; \quad (18)$$

— первый порядок малости

$$z = k: \qquad P_{1E}^{(1)} = \frac{(\varepsilon - 1)}{4\pi\varepsilon}\partial_z\Phi_0^{(0)}\partial_z\delta\Phi_0;$$

$$z = 0: \qquad P_{2E}^{(1)} = \frac{\varepsilon}{4\pi}\partial_z\Phi_1^{(0)}\partial_z\delta\Phi_1. \quad (19)$$

3. Задача нулевого порядка малости

Система уравнений (5)–(7), где значения давления $P_{i\sigma}^{(0)}$ и $P_{iE}^{(0)}$ определяются выражениями (14), (18), описывает равновесное состояние системы в отсутствие каких-либо возмущений свободной поверхности и границы раздела сред.

Решения уравнений (5) имеют вид: $\Phi_i^{(0)} = C_i z + B_i$, где C_i и B_i — константы интегрирования. Подставив решения в граничные условия (6), (7), получим выражения для распределения гидродинамических давлений и потенциалов электрического поля в равновесном состоянии системы:

$$\Phi_0^{(0)} = -E_0 z; \quad P_1^{(0)} = P_{\text{at}} + \rho_1 g(h - z) - \frac{\varepsilon - 1}{8\pi\varepsilon}E_*^2;$$

$$\Phi_1^{(0)} = -\frac{1}{\varepsilon}E_0 z; \quad P_2^{(0)} = P_{\text{at}} + g(\rho_1 h - \rho_2 z) - \frac{1}{8\pi}E_*^2.$$

4. Задача первого порядка малости

Система уравнений (8)–(13) с учетом выражений (14), (19) для давлений $P_{i\sigma}^{(1)}$, $P_{iE}^{(1)}$ $(i = 1, 2)$ описывает в линейном приближении эволюцию рассматриваемой системы во времени, когда свободная поверхность и граница раздела сред возмущены волновым движением малой амплитуды.

Рассмотрим плоские волны, бегущие по обеим поверхностям в положительном направлении оси OX:

$$\xi_j(x, t) = \alpha_j \exp[i(kx - \omega t)] \quad (j = 1, 2).$$

Здесь i — мнимая единица.

Решения уравнений Лапласа (8) для гидродинамических и электростатических потенциалов также будем искать в виде плоских бегущих волн. Учитывая условия ограниченности (13), запишем:

$$\varphi_1(x, z, t) = [B_1\exp(kz) + B_2\exp(-kz)]\exp[i(kx - \omega t)];$$

$$\varphi_2(x, z, t) = A\exp(kz)\exp[i(kx - \omega t)];$$

$$\delta\Phi_0 = G\exp(-kz)\exp[i(kx - \omega t)];$$

$$\delta\Phi_1 = [D_1\exp(kz) + D_2\exp(-kz)]\exp[i(kx - \omega t)], \quad (20)$$

где A, B_1, B_2, G, D_1, D_2 — константы, определяемые из граничных условий. Подставив решения (20) в граничные условия (10), (12) и первое из условий (9), получим систему линейных уравнений относительно искомых коэффициентов. Данная система позволяет выразить константы A, B_1, B_2, G, D_1, D_2 через амплитуды волн на свободной поверхности α_1 и на границе раздела α_2:

$$A = -\frac{i\omega}{k}\alpha_2; \quad B_1 = \frac{i\omega}{k[\exp(2kh) - 1]}[\alpha_2 - \alpha_1\exp(kh)];$$

$$B_2 = \frac{i\omega\exp(kh)}{k[\exp(2kh) - 1]}[\alpha_2\exp(kh) - \alpha_1];$$

$$G = \frac{E_*\exp(kh)}{\varepsilon - 1 + (\varepsilon + 1)\exp(2kh)}\big\{[1 + \exp(2kh)](\varepsilon - 1)\alpha_1 + 2\alpha_2\exp(kh)\big\};$$

$$D_1 = \frac{(\varepsilon-1)E_*}{\varepsilon[\varepsilon-1+(\varepsilon+1)\exp(2kh)]}\,[\alpha_2-\alpha_1\exp(kh)];$$

$$D_2 = \frac{\exp(kh)E_*}{\varepsilon[\varepsilon-1+(\varepsilon+1)\exp(2kh)]} \times \big[\alpha_2(\varepsilon+1)\exp(kh)+\alpha_1(\varepsilon-1)\big]. \qquad (21)$$

Подставив решения (20) с коэффициентами (21) в динамические граничные условия (11) и второе из условий (9), получим систему уравнений относительно амплитуд α_1 и α_2

$$a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 = 0; \quad a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 = 0; \qquad (22)$$

$$a_{11} = \frac{\rho_1\omega^2}{k\,\mathrm{th}(kh)} - \rho_1 g - \sigma_1 k^2 + \frac{Wk}{\varepsilon}\,\frac{(\varepsilon-1)^2}{(\varepsilon+\mathrm{th}(kh))};$$

$$W \equiv \frac{E_*^2}{4\pi};$$

$$a_{12} = -\frac{1}{k\,\mathrm{sh}(kh)}\left(\rho_1\omega^2 - \frac{Wk^2}{\varepsilon}\,\frac{(\varepsilon-1)\,\mathrm{th}(kh)}{(\varepsilon+\mathrm{th}(kh))}\right);$$

$$a_{21} = -\frac{1}{k\,\mathrm{sh}(kh)}\left(\rho_1\omega^2 - \frac{Wk^2}{\varepsilon}\,\frac{(\varepsilon-1)\,\mathrm{th}(kh)}{(\varepsilon+\mathrm{th}(kh))}\right);$$

$$a_{22} = \frac{\omega^2}{k}\left(\rho_2 + \frac{\rho_1}{\mathrm{th}(kh)}\right) - (\rho_2-\rho_1)g - \sigma_2 k^2 + \frac{Wk}{\varepsilon}\,\frac{(\varepsilon\,\mathrm{th}(kh)+1)}{(\varepsilon+\mathrm{th}(kh))}.$$

Приравняв определитель выписанной системы нулю

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0,$$

получим дисперсионное уравнение задачи:

$$\omega^4 - \frac{kV}{[\rho_2+\rho_1\,\mathrm{th}(kh)]}\,\omega^2 + \frac{k^2\,\mathrm{th}(kh)N}{\rho_1[\rho_2+\rho_1\,\mathrm{th}(kh)]} = 0; \quad (23)$$

$$V = \rho_2 g + (\sigma_2+\sigma_1)k^2 + \frac{\rho_2}{\rho_1}(\rho_1 g + \sigma_1 k^2)\,\mathrm{th}(kh) - \frac{Wk}{\varepsilon\big(\varepsilon+\mathrm{th}(kh)\big)}\left\{\varepsilon^2 - 2(\varepsilon-1)\big(-1+\mathrm{ch}(kh)^{-2}\big) + \mathrm{th}(kh)\left[\varepsilon + \frac{\rho_2}{\rho_1}(\varepsilon-1)^2\right]\right\};$$

$$N = \left[\rho_1 g + \sigma_1 k^2 - \frac{Wk}{\varepsilon}\,\frac{(\varepsilon-1)^2}{\big(\varepsilon+\mathrm{th}(kh)\big)}\right]\left[(\rho_2-\rho_1)g + \sigma_2 k^2 - \frac{Wk}{\varepsilon}\,\frac{\big(\varepsilon\,\mathrm{th}(kh)+1\big)}{\big(\varepsilon+\mathrm{th}(kh)\big)}\right] - \left[\frac{Wk}{\varepsilon(\varepsilon+\mathrm{th}(kh))}\,\frac{(\varepsilon-1)}{\mathrm{ch}(kh)}\right]^2. \qquad (24)$$

Это биквадратное уравнение относительно ω^2 определяет связь частот ω волн, бегущих по свободной поверхности и по границе раздела сред, с волновыми числами k и их зависимость от физических параметров задачи.

5. Анализ полученных результатов

Из уравнений системы (22) легко определить отношение α_2 — амплитуды „внутренней“ волны, распространяющееся по границе раздела двух сред к α_1 — амплитуде волны, распространяющейся по свободной поверхности верхнего слоя жидкости:

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = -\frac{a_{11}}{a_{12}} = \frac{\rho_1\omega^2 - k(\rho_1 g+\sigma_1 k^2)\,\mathrm{th}(kh) + \frac{Wk}{\varepsilon}\,\frac{(\varepsilon-1)^2 k\,\mathrm{th}(kh)}{(\varepsilon+\mathrm{th}(kh))}}{\rho_1\omega^2 - \frac{Wk^2}{\varepsilon}\,\frac{(\varepsilon-1)\,\mathrm{th}(kh)}{(\varepsilon+\mathrm{th}(kh))}}\,\mathrm{ch}(kh). \qquad (25)$$

Это отношение зависит от квадрата частоты волны ω^2, а поскольку дисперсионное уравнение (23) биквадратное и имеет два решения для квадрата частоты, то следовательно, в системе возможны два режима волновых движений: первый соответствует положительному знаку перед радикалом в решении уравнения (23), второй — отрицательному.

Для дальнейшего анализа рассмотрим две асимптотические ситуации: чисто гравитационного волнового движения на обеих поверхностях раздела сред, и чисто капиллярного волнового движения.

5а. Асимптотика гравитационных волн. Эффект „мертвой воды“

Примем, что $W = 0$, $\sigma_1 \to 0$, $\sigma_2 \to 0$, тогда дисперсионное уравнение (23) запишется в виде

$$\omega^4 - \frac{k\rho_2 g(1+\mathrm{th}(kh))}{\rho_2+\rho_1\,\mathrm{th}(kh)}\,\omega^2 + \frac{k^2 g^2\,\mathrm{th}(kh)(\rho_2-\rho_1)}{\rho_2+\rho_1\,\mathrm{th}(kh)} = 0,$$

а его корни определяются выражениями:

$$\omega_{1,2} = \frac{kg}{2[\rho_2+\rho_1\,\mathrm{th}(kh)]}\big\{\rho_2(1+\mathrm{th}(kh)) \pm \big[\rho_2\big(1-\mathrm{th}(kh)\big) + 2\rho_1\,\mathrm{th}(kh)\big]\big\}.$$

Первый корень, соответствующий знаку „плюс“, после упрощения принимает совсем простой вид:

$$\omega_1^2 = kg;$$

второй корень, соответствующий знаку „минус“, выглядит так:

$$\omega_2^2 = \frac{kg(\rho_2-\rho_1)\,\mathrm{th}(kh)}{\rho_2+\rho_1\,\mathrm{th}(kh)}.$$

Теперь в соответствии с (25) несложно записать аналитические выражения для отношения амплитуд гравитационных волн, бегущих по границе раздела сред и по свободной поверхности верхнего слоя. Для первого корня получим

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \exp(-kh), \qquad (26)$$

а для второго:

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{\rho_1 \exp(kh)}{(\rho_1 - \rho_2)}. \qquad (27)$$

Таким образом, волны, соответствующие первому корню дисперсионного уравнения, порождаются свободной границей верхнего слоя жидкости, а их амплитуда убывает с глубиной, не реагируя на границу раздела верхней и нижней сред: их амплитуда на расстоянии h от свободной поверхности соответствует естественному убыванию амплитуды гравитационной волны с глубиной. Волны, соответствующие второму корню дисперсионного уравнения, порождаются границей раздела верхней и нижней сред и их амплитуда, согласно (27), может быть весьма большой при $\rho_2 \to \rho_1$. Этот феномен называется эффектом „мертвой воды“ и сводится к раскачке волн большой амплитуды на границе стратификации, когда разность значений плотности сред много меньше плотности нижней среды. Здесь следует отметить, что говорить о математически строгом предельном переходе $\rho_2 \to \rho_1$ не приходится, поскольку такой переход выведет задачу за рамки используемой физической модели, которая характеризуется наличием скачка плотности на границе стратификации. Говорить о наличии четкой границы стратификации можно, если характерный линейный пространственный масштаб перехода вдоль нормали к границе от среды с плотностью ρ_1 к среде с плотностью ρ_2 много меньше длины гравитационной волны.

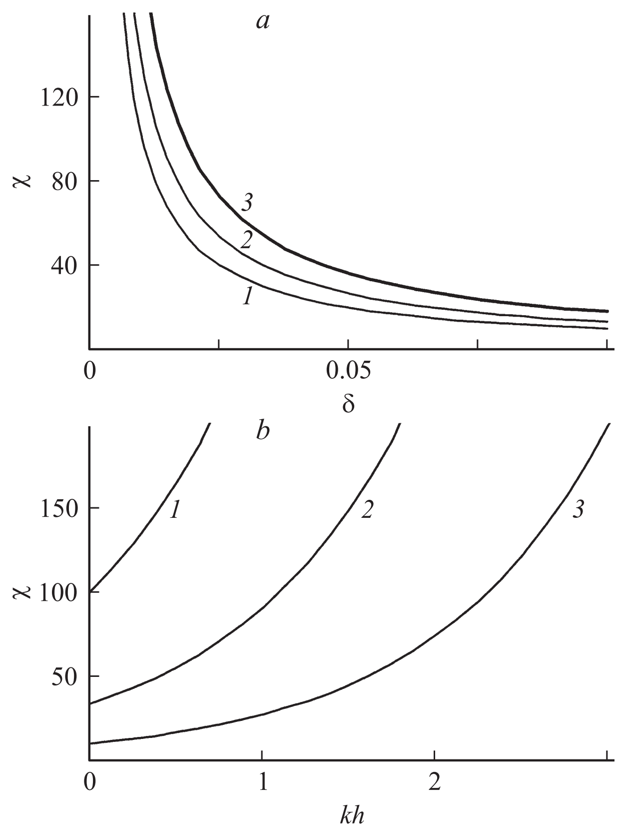

Рис. 1. a — зависимости отношения амплитуд $\chi \equiv \alpha_2/\alpha_1$ гравитационных волн, бегущих по границе раздела сред и свободной поверхности, от обезразмеренной разности плотностей: $\delta \equiv (\rho_2 - \rho_1)/\rho_1$, рассчитанные при $k = 1$ для h (*1* — 1, *2* — 30, *3* — 60). b — зависимости отношения χ от произведения волнового числа на толщину слоя верхней жидкости kh, рассчитанные для трех значений δ (*1* — 0.01, *2* — 0.03, *3* — 0.1).

Для наглядности на рис. 1 приведем рассчитанные по (25) для корня со знаком „минус“ при радикале, зависимости отношения амплитуд $\chi \equiv \alpha_2/\alpha_1$ от обезразмеренной разности значений плотности: $\delta \equiv (\rho_2 - \rho_1)/\rho_1$ и зависимости отношения амплитуд χ от произведения волнового числа на толщину слоя kh, полагая $W = 0$, $\sigma_1 \to 0$, $\sigma_2 \to 0$ (такой же результат дает и расчет непосредственно по (27)). Приведенные зависимости очевидны уже из явного вида соотношения (26), и они включены для возможности визуального сравнения в более сложных ситуациях, когда аналитическое выражение для отношения амплитуд не имеет такого простого вида, и приходится пользоваться общим выражением (25). Для первого корня дисперсионного уравнения (23) аналогичные зависимости очевидны из аналитической записи (27): значение χ не зависит от δ и экспоненциально убывает с ростом kh.

5b. Асимптотика капиллярных волн

Для перехода к чисто капиллярным волнам в отсутствие электрического поля положим $g = 0$ и $W = 0$. Дисперсионное уравнение (23) при этом формально сохранит свой вид, но изменится запись коэффициентов V и N, которые несколько упростятся:

$$V = \sigma_2 k^2 + \sigma_1 k^2 \left(1 + \operatorname{th}(kh)\frac{\rho_2}{\rho_1}\right); \quad N = \sigma_1 \sigma_2 k^4.$$

Корни получившегося дисперсионного уравнения определятся выражениями:

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{-k^3}{2(\rho_2 + \rho_1 \operatorname{th}(kh))}\Big[-(\sigma_2 + \sigma_1 B) \pm \sqrt{(\sigma_2^2 + 2\sigma_2\sigma_1 A + \sigma_1^2 B^2)}\Big]; \qquad (28)$$

$$A \equiv \left(1 - \operatorname{th}(kh)\left(\frac{\rho_2}{\rho_1} + 2\operatorname{th}(kh)\right)\right);$$

$$B \equiv \left(1 + \operatorname{th}(kh)\frac{\rho_2}{\rho_1}\right).$$

Для отношения амплитуд для обоих корней уравнения (28) получим существенно более громоздкие по сравнению со случаем чисто гравитационных волн соотношения:

$$\left[\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right]_{1,2} = \operatorname{ch}(kh)\frac{-(\sigma_2 + \sigma_1 A) \pm \sqrt{(\sigma_2^2 + 2\sigma_2\sigma_1 A + \sigma_1^2 B^2)}}{-(\sigma_2 + \sigma_1 B) \pm \sqrt{(\sigma_2^2 + 2\sigma_2\sigma_1 A + \sigma_1^2 B^2)}}. \qquad (29)$$

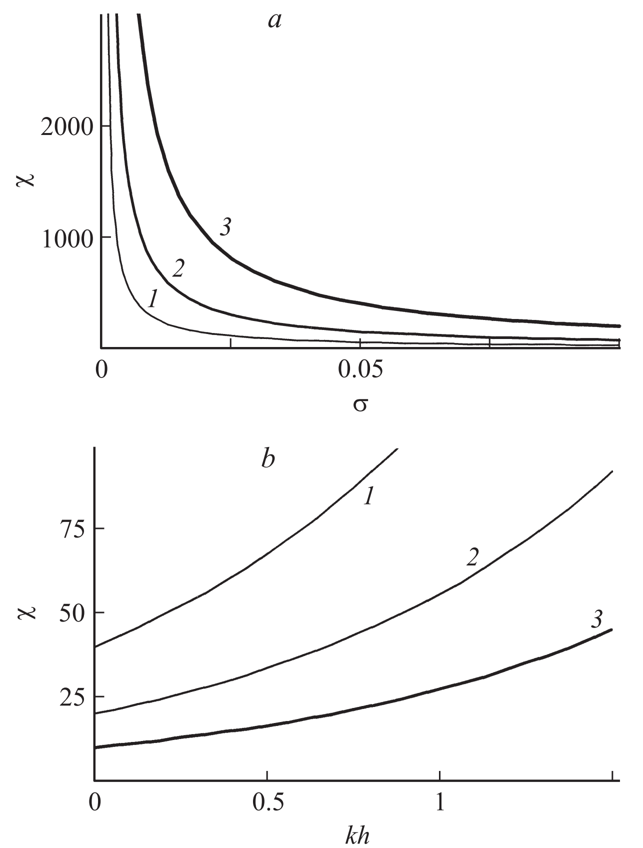

Рис. 2. *a* — зависимости отношения амплитуд χ капиллярных волн, бегущих по границе раздела сред и свободной поверхности, от отношения коэффициентов поверхностного натяжения границы раздела сред и свободной поверхности верхнего слоя: $\sigma \equiv \sigma_2/\sigma_1$, рассчитанные для $\delta = 0.03$, $k = 1$ и h (*1* — 1, *2* — 2, *3* — 3). *b* — зависимости отношения χ от произведения волнового числа на толщину слоя верхней жидкости kh, рассчитанные для трех значений отношения диэлектрических проницаемостей σ (*1* — 0.025, *2* — 0.05, *3* — 0.1).

На рис. 2 приведем рассчитанные по (25) для первого корня (со знаком „минус“ при радикале) зависимости отношения амплитуд $\chi \equiv \alpha_2/\alpha_1$ от $\sigma \equiv \sigma_2/\sigma_1$ — отношения величины коэффициента поверхностного натяжения границы раздела сред σ_2 к величине коэффициента поверхностного натяжения свободной поверхности верхней жидкости σ_1 и зависимости отношения амплитуд χ от произведения волнового числа на толщину слоя kh. (Отметим, что идентичные зависимости получаются при расчете по (29).)

Сравнение рис. 2 и 1 показывает, что при малых значениях σ на капиллярных волнах имеет место эффект, аналогичный эффекту „мертвой воды“, известному ранее только для гравитационных волн. Аналогичные зависимости для второго (со знаком „плюс“ перед радикалом в (28)) корня дисперсионного уравнения эквивалентны таковым для случая чисто гравитационных волн: χ практически не зависит от σ, весьма медленно увеличиваясь (примерно на толщину линии в диапазоне изменения σ от 0 до 0.1) с ростом σ, и экспоненциально убывает с ростом kh.

Здесь еще раз следует напомнить, что, как и в случае гравитационных волн на границе раздела сред с мало различающимися значениями плотности (см. разд. 5а), говорить о предельном переходе $\sigma \to 0$ не приходится, поскольку такой переход выведет задачу за рамки используемой физической модели, которая характеризуется наличием отличного от нуля коэффициента поверхностного натяжения на границе раздела сред. Говоря о наличии четкой границы раздела сред, будем предполагать, что характерный линейный пространственный масштаб перехода вдоль нормали к границе от одной среды к другой много меньше длины капиллярной волны. Учтем, что межмолекулярные взаимодействия в приповерхностном слое жидкости, приводящие к появлению результирующей силы, направленной в глубину жидкости, составляющей суть феномена поверхностного натяжения [12–16], обусловливают изменения структуры приповерхностного слоя на характерных линейных масштабах $\sim 1{-}10$ nm. Сказанное означает, что в рамках анализируемой физической модели нельзя рассматривать капиллярные волны длиной ≤ 10 nm, но поскольку данное ограничение определяет и границу применимости модели „сплошной среды“, в рамках которой справедлива вся гидродинамика, то особого ограничения общности проведенных рассуждений не получаем.

В проведенных расчетах принималось, что величина коэффициента поверхностного натяжения границы раздела сред σ_2 много меньше величины коэффициента поверхностного натяжения свободной поверхности σ_1. Основанием для такого выбора является правило Антонова ([17], стр. 425) для расчета величины межфазного натяжения σ_2 на границе раздела двух жидкостей с коэффициентами поверхностного натяжения σ_0 и σ_* соответственно, которое выражается соотношением: $\sigma_2 = |\sigma_0 - \sigma_*|$. В ситуации, обсуждаемой в настоящей работе, речь идет о границе стратификации для одной и той же жидкости, одно из физико-химических свойств которой имеет различные значения по разные стороны границы, т. е. $\sigma_0 \approx \sigma_*$ и, следовательно, их разность мала: $(|\sigma_0 - \sigma_*|/\sigma_0) \ll 1$.

Чтобы иметь более весомые аргументы, кроме визуального сходства рис. 2 с рис. 1, в пользу утверждения о существовании эффекта „мертвой воды“ на капиллярных волнах, учтем также, что $\delta \equiv (\rho_2 - \rho_1)/\rho_1 \ll 1$ и разложим (29) по степеням малых параметров δ и σ. В итоге получим:

$$\chi_1 = \mathrm{sh}(kh) - \frac{1}{\sigma}\,\mathrm{ch}(kh)[1 + (1+\delta)\,\mathrm{th}(kh)] + \delta\,\frac{\mathrm{th}(kh)}{\mathrm{ch}(kh)[1+\mathrm{th}(kh)]^2} + \sigma\,\frac{\mathrm{sh}(kh)[\mathrm{th}(kh)-1]}{[1+\mathrm{th}(kh)]^2} \times \{1 + \mathrm{th}(kh) + \delta[1 - 3\,\mathrm{th}(kh)]\}; \qquad (30)$$

$$\chi_2 = \exp(-kh)\big[1 - \delta\exp(-kh)\,\mathrm{sh}(kh) + \sigma\exp(-2kh)\,\mathrm{ch}(kh)\,\mathrm{sh}(kh)\big\{1 + \mathrm{th}(kh) + \delta[1 - 3\,\mathrm{th}(kh)]\big\}\big]. \quad (31)$$

Аналитическая зависимость (30) для первого корня дисперсионного уравнения соответствует гиперболическому росту χ при $\sigma \to 0$ (говоря об обозначенном предельном переходе, имеем в виду стремление σ к малым, но конечным значениям так, чтобы остаться в рамках физической модели) и примерно экспоненциальному росту при увеличении kh, проиллюстрированным рис. 2. Зависимость (31) для второго корня дисперсионного уравнения также полностью согласуется с результатами численных расчетов по (29): χ весьма слабо зависит от σ (вследствие малости при любых значениях kh численного множителя перед σ) и экспоненциально убывает с ростом kh.

Таким образом, в области чисто капиллярных волн реализуется аналог эффекта „мертвой воды".

Посмотрим теперь, будет ли существовать этот эффект в области, переходной от гравитационных волн к капиллярным, когда существенно и наличие поля сил тяжести, и действие сил поверхностного натяжения ($g \neq 0$ и $\sigma_j \neq 0$). Для этого разложим по степеням малых параметров δ и σ исходное выражение (25). Для двух корней дисперсионного уравнения получим:

$$\begin{aligned}\chi_1 = {} & \mathrm{sh}(kh) + \frac{\delta g(g+k^2)}{\sigma^2 k^4}\,\mathrm{ch}(kh)[1 + (1+\delta)\,\mathrm{th}(kh)] \\ & - \frac{g+k^2}{\sigma k^2}\,\mathrm{ch}(kh)[1 + (1+\delta)\,\mathrm{th}(kh)] \\ & + \delta\,\frac{k^2\,\mathrm{th}(kh)}{(g+k^2)\,\mathrm{ch}(kh)[1+\mathrm{th}(kh)]^2} \\ & + \sigma\,\frac{k^2\,\mathrm{sh}(kh)[\mathrm{th}(kh) - 1]}{(g+k^2)^2[1+\mathrm{th}(kh)]^2}\big\{(g+k^2)[1+\mathrm{th}(kh)] \\ & + \delta\big[k^2[1 - 3\,\mathrm{th}(kh)] + g[\mathrm{th}(kh) - 1]\big]\big\}; \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned}\chi_2 = {} & \exp(-kh)\Bigg[1 - \delta\,\frac{k^2}{g+k^2}\exp(-kh)\,\mathrm{sh}(kh) \\ & + \sigma\,\frac{k^2}{g+k^2}\exp(-2kh)\,\mathrm{ch}(kh)\,\mathrm{sh}(kh)\big\{(g+k^2) \\ & - \delta(g-k^2) + [(g+k^2) + \delta(g-3k^2)]\mathrm{th}(kh)\big\}\Bigg]. \end{aligned} \quad (33)$$

Из (32) видно, что для первого корня дисперсионного уравнения особенность в зависимости $\chi = \chi(\sigma)$ при $\sigma \to 0$ по сравнению с ситуацией $g = 0$ усилилась, а зависимость χ от kh осталась качественно прежней. Решение, соответствующее второму корню дисперсионного уравнения, согласно (33) качественно не изменилось.

6. Влияние электрического поля

В связи с упомянутыми во введении к данной работе приложениями, связанными с наличием электрического поля, перпендикулярно границе раздела, представляется целесообразным исследовать роль параметра W (пропорционального давлению электрического поля на поверхность), входящего в полную постановку задачи, в дисперсионное уравнение (23) и отношение амплитуд (25). Это интересно еще и потому, что из рис. 1, *a* и 2, *a* видно, что отношение амплитуды волны, распространяющейся по границе раздела двух сред, к амплитуде волны, распространяющейся по свободной поверхности верхнего слоя жидкости, имеет резонансный характер. Это обстоятельство имеет место как в чисто гравитационном случае (стремится к бесконечности при $(\rho_2 - \rho_1) \to 0$), так и в чисто капиллярном (при $\sigma_2 \to 0$). Из (25) видно, что в наиболее общей ситуации, когда $g \neq 0$; $\sigma_2 \neq 0$; $W \neq 0$, отношение амплитуд может иметь резонанс при варьировании зарядового параметра W — когда знаменатель в (25) стремится к нулю:

$$\left[\rho_1\omega^2 - \frac{Wk^2}{\varepsilon}\,\frac{(\varepsilon - 1)\mathrm{th}(kh)}{(\varepsilon + \mathrm{th}(kh))}\right] \to 0.$$

Это обстоятельство указывает на важную роль поверхностного заряда, по крайней мере, в области капиллярных волн.

На рис. 3, *a–d* приведены зависимости $\chi = \chi(\sigma)$, построенные по (25) по первому корню дисперсионного уравнения при $g = 0$, при различных значениях параметров W, ε и h. Из рис. 3, *a–b* видно, что при $W \neq 0$ резонанс, ранее имевший место при $\sigma \to 0$, по мере увеличения параметра W смещается в область больших значений σ, причем кривые, соответствующие различным значениям толщины слоя h, делают это с различной скоростью. Из рис. 3, *b–d* видно, что положение центра резонанса и ширина резонансной кривой зависят от волнового числа: с увеличением волнового числа положение резонанса смещается в область малых значений σ, а ширина резонансной кривой при этом увеличивается, и наоборот, с уменьшением волнового числа положение резонанса смещается в область больших значений σ, а ширина резонансной кривой при этом уменьшается. Из рис. 3, *d, e* видно, что при увеличении диэлектрической проницаемости верхнего слоя ε положения резонансов смещаются в область малых значений σ, а при уменьшении ε в область больших значений σ. Расчеты показывают, что при уменьшении безразмерной разности значений плотности δ положение резонанса смещается вправо, в область больших σ.

Аналогичные расчеты для второго корня дисперсионного уравнения показывают весьма слабую (рост в пределах толщины линии на графиках) зависимость отношения амплитуд от отношения коэффициентов поверхностного натяжения σ при тех же значениях физических параметров, что были использованы при расчетах, проиллюстрированных рис. 3, *a–d*.

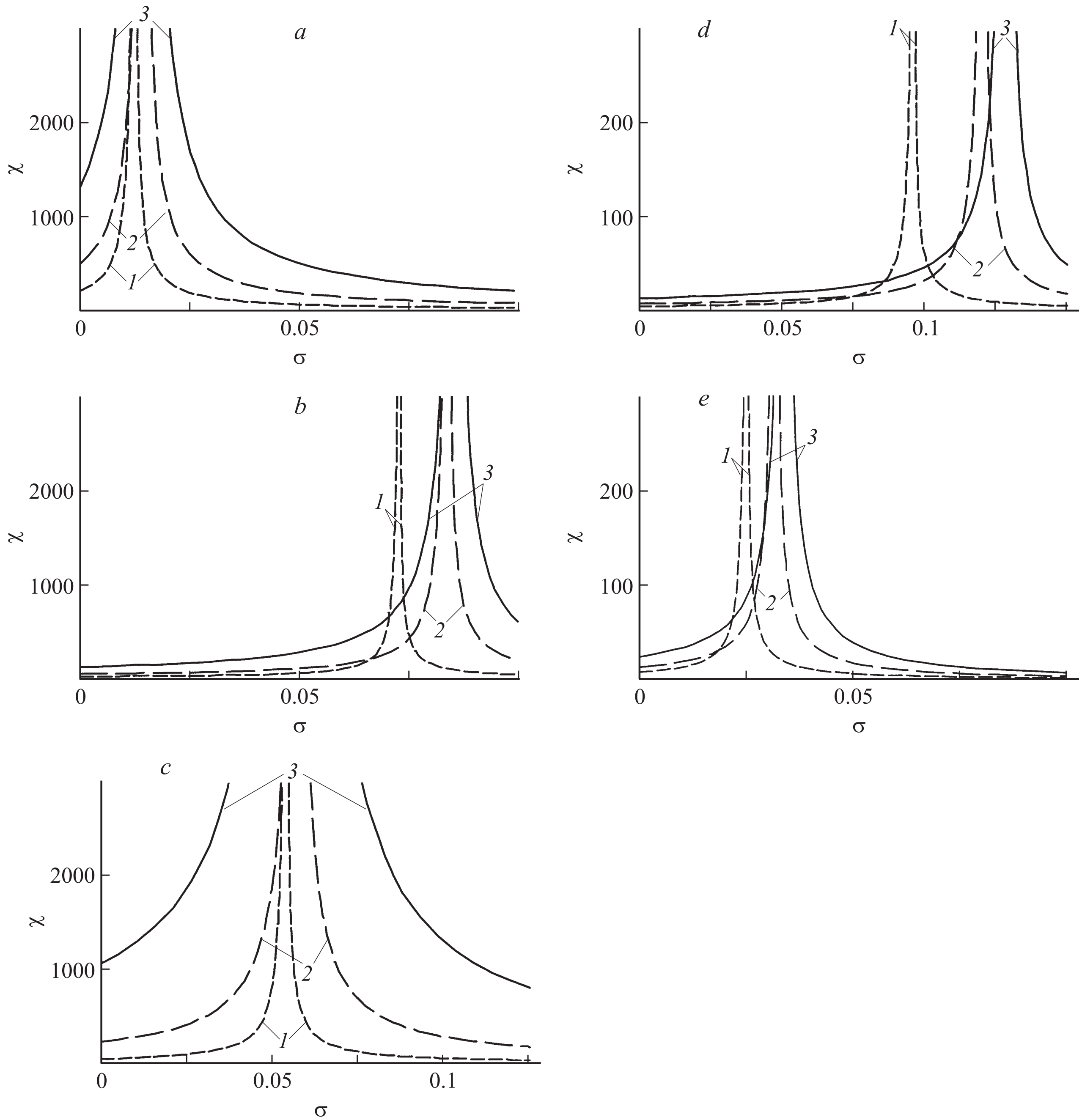

Рис. 3. Зависимости $\chi = \chi(\sigma)$, построенные по (25) при $\sigma_1 = \rho_1 = 1$, $g = 0$, $\delta = 0.03$ для различных значений толщины верхнего слоя жидкости: $h = 1$ (*1*), 2 (*2*), 3 (*3*). a — $W = 0.1$, $k = 1$, $\varepsilon = 20$; b — $W = 0.6$, $k = 1$, $\varepsilon = 20$; c — $W = 0.6$, $k = 1.5$, $\varepsilon = 20$; d — $W = 0.6$, $k = 0.65$, $\varepsilon = 20$; e — $W = 0.6$, $k = 0.65$, $\varepsilon = 80$.

Если взять более общую ситуацию, когда $g \neq 0$, то картина влияния электрического поля на реализацию капиллярного аналога эффекта „мертвой воды“ качественно не изменится, лишь сместятся положения резонансов и изменится ширина резонансной кривой.

Таким образом, наличие внешнего электрического поля позволяет наблюдать капиллярный аналог эффекта „мертвой воды“ в области хотя и малых, но конечных значений коэффициента поверхностного натяжения границы раздела сред σ.

Капиллярный аналог эффекта „мертвой воды“, проявляющийся в экспоненциальном увеличении (при изменении физических параметров жидкостей и окружающей среды) амплитуды капиллярных волн на границе раздела жидкостей с близкими значениями плотности и малыми величинами коэффициента поверхностного натяжения границы раздела, по-видимому, наблюдался в экспериментах [5–7]. В [5–7] экспериментально исследовались электрогидродинамические течения в слое коллоида толщиной $20-25\,\mu$m на основе керосина со взвешенными в нем полидисперсными (2–30 nm) магнетитовыми частицами, заполняющего пространство между двумя оптически прозрачными пластинами плоского конденсатора, в котором создавалось электрическое поле. Было зафиксировано образование тонких приэлектродных слоев с электрофизическими свойствами, отличающимися от таковых в объеме коллоида, обладающих низкой электропроводностью и оказывающих существенное влияние на исследуемые эффекты самоорганизации коллоида и возникновения вихревых течений при постепенном увеличении напряженности электрического поля. Одним из возможных физических механизмов, объясняющих наблюдаемую самоорганизацию и возникновение вихревого движения, может быть раскачка и обрушение капиллярных волн на границе раздела приэлектродного слоя и основного объема коллоида.

Заключение

В проведенном аналитическом исследовании волнового движения на границе раздела несмешивающихся жидкостей и на свободной поверхности верхней жидкости выяснилось, что в области капиллярных волн имеет место аналог эффекта „мертвой воды“, ранее известный лишь в области гравитационных волн. Суть эффекта заключается в экспоненциальном увеличении амплитуд капиллярных волн на границе раздела сред при формальном стремлении величины коэффициента поверхностного натяжения границы раздела к нулю (в реальности к весьма малым, но конечным значениям). Наличие электрического поля, перпендикулярного границе раздела сред, приводит к смещению (увеличивающемуся с ростом напряженности поля) области наблюдения эффекта (по σ) в область конечных (хотя и малых) значений коэффициента поверхностного натяжения. Сам эффект имеет резонансный характер. Положение резонанса и ширина резонансной кривой зависят от физико-химических характеристик жидкостей и волнового числа.

Работа выполнена в рамках тематического плана университета, при поддержке грантов: губернатора Ярославской области, Рособразования № 2.1.1/3776 и РФФИ № 09-01-00084.

Список литературы

[1] *Сретенский Л.Н.* Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977. 816 с.
[2] *Григорьев О.А., Ширяева С.О., Григорьев А.И.* // Письма в ЖТФ. 1995. Т. 21. Вып. 12. С. 36–41.
[3] *Ширяева С.О., Григорьев О.А., Григорьев А.И.* // ЖТФ. 1996. Т. 66. Вып. 10. С. 31–46.
[4] *Ширяева С.О., Григорьев О.А.* // ЖТФ. 2000. Т. 70. Вып. 6. С. 31–36.
[5] *Кожевников В.М., Чуенкова И.Ю., Данилов М.И., Ястребов С.С.* // Письма в ЖТФ. 2005. Т. 31. Вып. 21. С. 64–67.
[6] *Кожевников В.М., Чуенкова И.Ю., Данилов М.И., Ястребов С.С.* // ЖТФ. 2006. Т. 76. Вып. 7. С. 129–131.
[7] *Кожевников В.М., Чуенкова И.Ю., Данилов М.И., Ястребов С.С.* // ЖТФ. 2008. Т. 78. Вып. 2. С. 51–57.
[8] *Дерягин Б.В.* Теория устойчивости коллоидов и тонких пленок. М.: Наука, 1986. 405 с.
[9] *Grigor'ev A.I., Munichev M.I., Shiryaeva S.O.* // J. Coll. Int. Sci. 1994. N 166. P. 267–274.
[10] *Саночкин Ю.В.* // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 5. С. 24–29.
[11] *Ширяева С.О.* // ЖТФ. 2001. Т. 71. Вып. 3. С. 9–16.
[12] *Фишер И.З.* Статистическая теория жидкостей. М.: Физматгиз, 1961. 280 с.
[13] *Оно С., Кондо С.* Молекулярная теория поверхностного натяжения в жидкостях. М.: ИЛ, 1963. 292 с.
[14] *Крокстон К.* Физика жидкого состояния. М.: Мир, 1978. 400 с.
[15] *Иголкин С.И.* // Прикладная физика. 2007. № 5. С. 21–29.
[16] *Иголкин С.И.* // Прикладная физика. 2007. № 6. С. 30–37.
[17] *Рид Р., Шервуд Т.* Свойства газов и жидкостей. Л.: Химия, 1971. 704 с.