Журнал технической физики, 2010, том 80, вып. 7

01

Вертикальная составляющая экстремально низкочастотного электрического поля, возбуждаемого заземленным горизонтальным вибратором

© П.Е. Терещенко

Полярный геофизический институт,
183010 Мурманск, Россия
e-mail: tereshchenko@gmail.com

(Поступило в Редакцию 8 октября 2009 г. В окончательной редакции 24 ноября 2009 г.)

Получено представление для вертикальной компоненты электрического поля, излучаемого заземленным линейным вибратором, в виде интеграла от осциллирующей функции, описан метод его численного интегрирования. Для частного случая, когда среда под антенной однородна и регистрация поля производится на границе раздела, проведено преобразование полученной формулы с помощью интегралов Фока к виду, удобному для нахождения простых приближенных формул и анализу особенностей поведения поля. По полученным выражениям произведены расчеты, подтверждающие аналитические выкладки.

Введение

Задача, связанная с возбуждением электромагнитного поля заземленным источником, имеет довольно длительную историю [1]. Ее важность обусловлена широким использованием электромагнитных полей как в геологоразведке, так и для связи с объектами, погруженными в проводящую среду. В таких задачах в основном используются горизонтальные составляющие электромагнитных полей, и соответственно большинство статей посвящено исследованию этих составляющих для различных моделей подстилающей поверхности.

В настоящей работе рассмотрим вертикальную составляющую электрического поля, играющую важную роль при исследовании влияния мощного низкочастотного электромагнитного поля на биологические объекты, а также имеющую самостоятельное применение при решении задачи дистанционного зондирования [2]. Расчеты выполним для однородной по проводимости Земли, что позволит получить приближенные аналитические формулы, пригодные для количественной оценки поведения вертикальной составляющей электрического поля в зависимости от расстояния, частоты и проводимости. Усложнение модели подстилающей среды на многослойную приводит не к принципиальным затруднениям, а лишь к большей громоздкости вычислений. Будем рассматривать поле на расстояниях, меньших или сравнимых с высотой ионосферного волновода, для которых влияние ионосферы невелико и можно пренебречь сферичностью Земли [3,4].

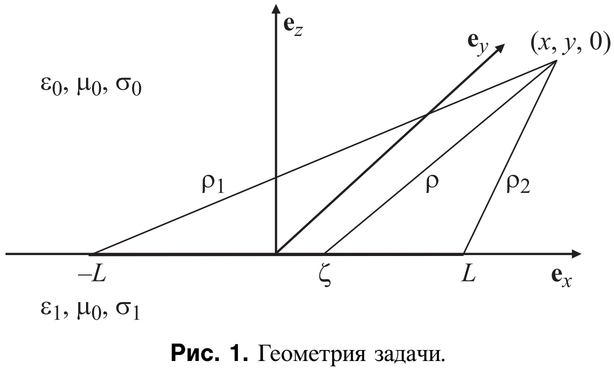

Рис. 1. Геометрия задачи.

1. Постановка задачи и результаты вычислений

Рассмотрим излучение в двуслойной среде заземленной антенны длиной $2L$, питаемой током с гармонической зависимостью от времени $e^{-i\omega t}$ (рис. 1). Среду в области $z > 0$ считаем вакуумом с бесконечно малой, но отличной от нуля проводимостью $\sigma_0 > 0$, диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_0 = 10^{-9}/36\pi$ F/m и магнитной проницаемостью $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m. Предположим, что область $z < 0$ имеет электромагнитные параметры ε_1, μ_0, σ_1. В [5] показано, что задача возбуждения электромагнитного поля током $\mathbf{J}_{CT}$ сводится к решению уравнений Гельмгольца для электрического вектора $\mathbf{A}$ с соответствующими граничными условиями.

Так как рассматриваем зондирование монохроматическими волнами, будем использовать уравнения для комплексных амплитуд $\mathbf{A}$, соответствующих $(\mathbf{A} \to \mathbf{A}e^{-i\omega t}$, $\mathbf{E} \to \mathbf{E}e^{-i\omega t})$ монохроматических компонент:

$$\nabla^2 \mathbf{A}^{(j)} + k_j^2 \mathbf{A}^{(j)} = -\mathbf{J}_{CT}, \tag{1}$$

$$\mathbf{A}^{(1)}\big|_{z=0} = \mathbf{A}^{(0)}\big|_{z=0}, \qquad \frac{\partial A_x^{(1)}}{\partial z}\bigg|_{z=0} = \frac{\partial A_x^{(0)}}{\partial z}\bigg|_{z=0},$$

$$\frac{\partial A_y^{(1)}}{\partial z}\bigg|_{z=0} = \frac{\partial A_y^{(0)}}{\partial z}\bigg|_{z=0}, \qquad \frac{1}{k_1^2}\operatorname{div}\mathbf{A}^{(1)}\big|_{z=0} = \frac{1}{k_0^2}\operatorname{div}\mathbf{A}^{(0)}\big|_{z=0}, \tag{2}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r})\big|_{|\mathbf{r}|\to\infty} \to 0.$$

Последнее соотношение в (2) необходимо для исключения волн, приходящих из бесконечности, вследствие их поглощения в среде. Значок $j = 0$ и 1 указывает на среду, к которой относится соответствующее значение вектора $\mathbf{A}$, $k_j = \frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{\varepsilon_j}{\varepsilon_0} + i\frac{\sigma_j}{\omega\varepsilon_0}}$ — волновое число, при этом ветвь корня фиксируется исходя из условия $\operatorname{Im} k_j > 0$, c — скорость света.

Значения электромагнитных полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ можно определить по соотношениям:

$$\mathbf{E}^{(j)} = i\omega\mu_0\mathbf{A}^{(j)} - \operatorname{grad}\frac{\operatorname{div}\mathbf{A}^{(j)}}{i\omega(\varepsilon_j + i\sigma_j/\omega)}, \quad \mathbf{H}^{(j)} = \operatorname{rot} A^{(j)}. \tag{3}$$

Построить решение уравнения (1) с помощью одной составляющей электрического вектора потенциала $\mathbf{A}$, например A_x, для горизонтального диполя не удается, так как при $k_0 \neq k_1$ нельзя одновременно удовлетворить второму и четвертому граничному условию. Поэтому представим вектор $\mathbf{A}$ в следующем виде:

$$\mathbf{A}^{(j)} = A_x^{(j)}\mathbf{e}_x + A_z^{(j)}\mathbf{e}_z.$$

Общее решение уравнений (1) для точечного источника $\mathbf{J}_{CT} = J_x\delta(x-\xi)\delta(y)\delta(z)\mathbf{e}_x$, где $\xi \in [-L, L]$ — положение источника на оси x, $\delta(x)$ — дельта-функция, можно представить в следующем виде [5]:

$$A_x^{(j)} = \frac{J_x}{4\pi} P_x^{(j)}(\rho, z)$$

$$\equiv \frac{J_x}{4\pi}\int_0^\infty\left[\left(\frac{i\lambda}{\sqrt{k_j^2-\lambda^2}}\delta_{0,j} + \alpha_j\right)e^{i\sqrt{k_j^2-\lambda^2}z}\right.$$

$$\left. + \left(\frac{i\lambda}{\sqrt{k_j^2-\lambda^2}}\delta_{1,j} + \beta_j\right)e^{-i\sqrt{k_j^2-\lambda^2}z}\right]J_0(\lambda\rho)d\lambda, \tag{4}$$

$$A_z^{(j)} = \frac{J_x}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x}F^{(j)}(\rho, z)$$

$$\equiv -\frac{J_x}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\infty\left[\eta_j e^{i\sqrt{k_j^2-\lambda^2}z} + \gamma_j e^{-i\sqrt{k_j^2-\lambda^2}z}\right]\frac{J_0(\lambda\rho)}{\lambda}\,d\lambda.$$

Здесь $J_0(\lambda\rho)$ — функция Бесселя, $\rho = \sqrt{(x-\xi)^2 + y^2}$, $\delta_{i,j}$ — символ Кронекера. Ветвь квадратного корня в показателе экспоненты фиксируем исходя из условия

$$\operatorname{Im}\sqrt{k_j^2 - \lambda^2} > 0. \tag{5}$$

Члены в формуле (4), содержащие символ Кронекера, соответствуют полю точечного источника в однородном пространстве, а остальные отражают влияние границы.

Для компактности записи, а также чтобы провести аналогию с работами по геоэлектрике [1,5], введем обозначения $k_j = i\varkappa_j$ и $\nu_i = -i\sqrt{k_j^2 - \lambda^2} = \sqrt{\varkappa_i^2 + \lambda^2}$, тогда из соотношения (5) следует, что $\operatorname{Re}\nu_j > 0$.

Определим коэффициенты α_j, β_j, η_j и γ_j так, чтобы (4) удовлетворяло граничным условиям (2). Рассмотрим поле над границей раздела. Из формул (3) и (4) получаем

$$E_z^{(0)}(\rho, z) = \frac{J_x}{4\pi}(i\omega\mu_0)$$

$$\times\frac{\partial}{\partial x}\left[F^{(0)}(\rho, z) - \frac{\partial}{\partial z}\frac{P_x^{(0)} + \frac{\partial F^{(0)}(\rho,z)}{\partial z}}{\varkappa_0^2}\right]. \tag{6}$$

Из требования равенства нулю поля на бесконечности, следует что $\beta_0 = \gamma_0 = 0$. Другие коэффициенты α_0 и η_0 находятся из граничных условий и для однородного полупространства имеют вид:

$$\alpha_0 = \frac{\lambda}{\nu_0}\frac{\nu_0 - \nu_1}{\nu_0 + \nu_1}, \quad \eta_0 = \frac{2\lambda^2(\varkappa_0^2 - \varkappa_1^2)}{(\nu_0 + \nu_1)(\varkappa_1^2\nu_0 + \varkappa_0^2\nu_1)}. \tag{7}$$

При этом

$$P_x^{(0)}(\rho, z) = \int_0^\infty\left(\frac{\lambda}{\nu_0} + \alpha_0\right)e^{-i\nu_0 z}J_0(\lambda\rho)d\lambda,$$

$$F^{(0)}(\rho, z) = -\int_0^\infty\frac{\eta_0}{\lambda}e^{-\nu_0 z}J_0(\lambda\rho)d\lambda. \tag{8}$$

Подстановка в (6) выражений (7) и (8) дает следующий результат:

$$E_z^{(0)}(\rho, z) = \frac{J_x}{4\pi}(i\omega\mu_0)\frac{\partial}{\partial x}U_z(\rho, z), \tag{9}$$

где

$$U_z(\rho, z) = \int_0^\infty\frac{2\lambda\nu_1}{\varkappa_1^2\nu_0 + \varkappa_0^2\nu_1}e^{-\nu_0 z}J_0(\lambda\rho)d\lambda. \tag{10}$$

Для того чтобы получить значение для поля, возбуждаемого линейной антенной длиной $2L$, необходимо проинтегрировать выражение (9) по длине антенны

$$\mathscr{E}_z = \int_{-L}^{L}E_z(\rho, z)d\xi$$

$$= \frac{J_x}{4\pi}(i\omega\mu_0)\left[U_z(\rho_1, z) - U_z(\rho_2, z)\right],$$

$$\rho_1 = \sqrt{(x+L)^2 + y^2}, \quad \rho_2 = \sqrt{(x-L)^2 + y^2}.$$

Представление $U_z(\rho, z)$ в виде (10) не позволяет даже при $z = 0$ воспользоваться для его вычисления интегралами Фока, как это имеет место для других составляющих электромагнитного поля [5], однако это несобственный интеграл, содержащий осциллирующую функцию $J_0(\lambda\rho)$. Для расчетов таких интегралов имеются хорошо разработанные численные методы, в частности метод

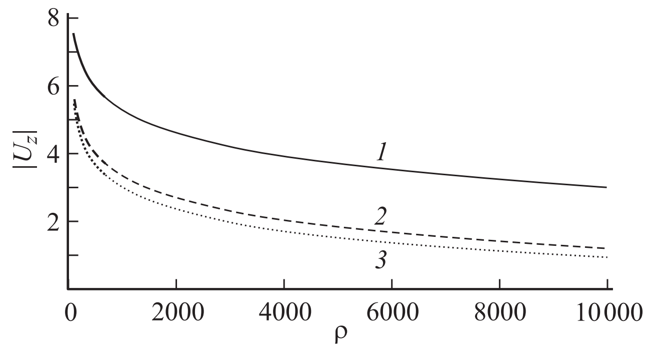

Рис. 2. Зависимость $|U_z|$ от расстояния ρ для ряда частот f. *1* — $f = 1$, *2* — 50, *3* — 100 Hz.

Лонгмана [6], заключающийся в замене исходного интеграла на сумму определенных интегралов с пределами в соседних нулях осциллирующей функции. К получившемуся плохо сходящемуся знакопеременному ряду применяют преобразование Эйлера, что дает быстро сходящийся ряд с остатком $|R_n| < 2^{-p}|V_n|$, где n — число членов ряда, $|V_n|$ — величина последнего учитываемого члена. Применив данный метод для расчета зависимости $U_z(\rho, z = 0)$ от расстояния ρ и частоты $f = \omega/2\pi$ при проводимости $\sigma_1 = 5 \cdot 10^{-5}$ S/m и диэлектрической проницаемости $\varepsilon_1 = 5$ F/m, получим результаты, показанные на рис. 2.

2. Представление поля $E_z^{(0)}(\rho, z)$ на основе интегралов Фока

Как было отмечено выше, представление вертикальной составляющей электрического поля в форме (9) не позволяет напрямую применить интегралы Фока [1] для расчета функции $U_z(\rho, z = 0)$. Найдем эквивалентное (9) представление для $E_z^{(0)}(\rho, z)$, позволяющее воспользоваться разработанным аппаратом вычисления интегралов, содержащих функцию Бесселя.

Из формулы (6) с учетом (8) следует соотношение

$$E_z^{(0)}(\rho, z) = \frac{J_x}{4\pi} \frac{i\omega\mu_0}{\varkappa_0^2}$$

$$\times \frac{\partial}{\partial x}\left[-\frac{\partial}{\partial z} P_x^{(0)}(\rho, z) + \int_0^\infty \lambda^2 \frac{\eta_0}{\lambda} e^{-\nu_0 z} J_0(\lambda\rho) d\lambda\right], \quad (11)$$

а из дифференциального уравнения для $J_0(\lambda\rho)$ можно получить, что

$$\lambda^2 J_0(\lambda\rho) = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} J_0(\lambda\rho) - \frac{\partial^2}{\partial\rho^2} J_0(\lambda\rho). \quad (12)$$

Преобразуем (11) с учетом (12). Так как

$$\int_0^\infty \lambda^2 \frac{\eta_0}{\lambda} e^{-\nu_0 z} J_0(\lambda\rho) d\lambda = -\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{\partial^2}{\partial\rho^2}\right)$$

$$\times \int_0^\infty \frac{\eta_0}{\lambda} e^{-\nu_0 z} J_0(\lambda\rho) d\lambda = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{\partial^2}{\partial\rho^2}\right) F^{(0)}(\rho, z),$$

то можно привести еще одно представление для $E_z^{(0)}(\rho, z)$

$$E_z^{(0)}(\rho, z) = \frac{J_x}{4\pi} \frac{i\omega\mu_0}{\varkappa_0^2} \frac{\partial}{\partial x}\left[-\frac{\partial}{\partial z} P_x(\rho, z)\right.$$

$$\left. + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} F^{(0)}(\rho, z) + \frac{\partial^2}{\partial\rho^2} F^{(0)}(\rho, z)\right].$$

Рассмотрим поле на границе двух сред $E_z^{(0)}(\rho, z = 0)$. В работе [1] приводится статья В.А. Фока, в которой дан способ вычисления $\frac{\partial}{\partial z} P_x(\rho, z)\big|_{z=0}$ и $F^{(0)}(\rho, z = 0)$. Применив его, получим следующий результат:

$$E_z^{(0)}(\rho, z = 0) = \frac{J_x}{4\pi} (i\omega\mu_0) \frac{\partial}{\partial x} U_z(\rho, z = 0),$$

где

$$U_z(\rho, z=0) = -\left\{\frac{\varkappa_1^2}{\varkappa_1^2 - \varkappa_0^2} I_0\left(\rho\,\frac{\varkappa_1 - \varkappa_0}{2}\right) K_0\left(\rho\,\frac{\varkappa_1 + \varkappa_0}{2}\right)\right.$$

$$+ \frac{\varkappa_1^2}{\varkappa_1^2 + \varkappa_0^2} I_1\left(\rho\,\frac{\varkappa_1 - \varkappa_0}{2}\right) K_1\left(\rho\,\frac{\varkappa_1 + \varkappa_0}{2}\right) - 2\,\frac{\varkappa_1^4}{\varkappa_1^4 - \varkappa_0^4}$$

$$\left.\times \frac{\varkappa_0^2}{\varkappa_1^2 + \varkappa_0^2}\left[I_0\left(\rho\,\frac{\varkappa_1 - \varkappa_0}{2}\right) K_0\left(\rho\,\frac{\varkappa_1 + \varkappa_0}{2}\right) + T\right]\right\}, \quad (13)$$

I_0, K_0 — модифицированные функции Бесселя,

$$T = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty K_0\left(\rho\sqrt{\varkappa_1^2 \sin^2\frac{\theta}{2} + \varkappa_0^2 \cos^2\frac{\theta}{2}}\right)$$

$$\times \frac{\varkappa_1^2 \varkappa_0^2}{\varkappa_1^4 \sin^2\frac{\theta}{2} + \varkappa_0^4 \cos^2\frac{\theta}{2}}\, d\theta.$$

Представление $U_z(\rho, z = 0)$ в виде (13) удобно для нахождения простых приближенных формул и анализа особенностей поведения вертикальной составляющей электромагнитного поля. Для квазистационарного случая, когда можно пренебречь максвелловским током смещения по сравнению с током проводимости, можно положить [1] $\varkappa_0 = 0$. Тогда (13) существенно упростится. При этом характер поведения функции $U_z(\rho, z = 0)$ будет зависеть только от параметра $\rho\varkappa_1/2$, поэтому ее целесообразно рассматривать для двух предельных значений: $\rho|\varkappa_1/2| \ll 1$ и $\rho|\varkappa_1/2| \gg 1$. Используя представление модифицированных функций Бесселя в виде рядов

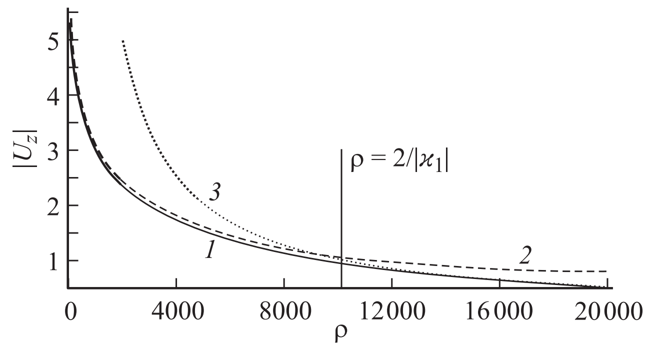

Рис. 3. Зависимость $|U_z|$ — и его асимптотик от расстояния ρ для частоты $f = 100$ Hz. *1* — точное значение $|U_z|$, *2* — асимптотика $|U_z|$, рассчитанная по формуле (14), *3* — по (15).

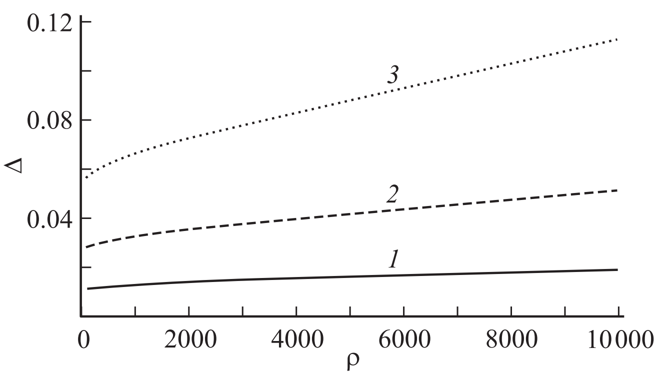

Рис. 4. Зависимость относительной погрешности Δ (в процентах) от расстояния ρ и частоты f: *1* — 20, *2* — 50, *3* — 100 Hz.

и асимптотических разложений [7], можно получить

$$U_z(\rho, z = 0) \sim \ln\rho\,\frac{\varkappa_1}{4}, \quad \rho\left|\frac{\varkappa_1}{2}\right| \ll 1, \tag{14}$$

$$U_z(\rho, z = 0) \sim -\frac{2}{\rho\varkappa_1}, \quad \rho\left|\frac{\varkappa_1}{2}\right| \gg 1. \tag{15}$$

На рис. 3 приведены приближенные значения $|U_z|$, полученные по этим формулам, и точные, рассчитанные с использованием (10). Эти расчеты подтверждают справедливость областей применимости данных асимптотик.

Теперь оценим относительную погрешность (в процентах)

$$\Delta = 2\,\frac{\varkappa_1^4}{\varkappa_1^4 - \varkappa_0^4}\,\frac{\varkappa_0^2}{\varkappa_1^2 + \varkappa_0^2}\left[I_0\left(\rho\,\frac{\varkappa_1 - \varkappa_0}{2}\right)\right.$$
$$\left.\times K_0\left(\rho\,\frac{\varkappa_1 + \varkappa_0}{2}\right) + T\right]\frac{100}{U_z(\rho, z = 0)},$$

возникающую при пренебрежении последним слагаемым в выражении (13).

На рис. 4 приведены результаты расчета Δ при проводимости $\sigma = 5 \cdot 10^{-5}$ S/m и диэлектрической проницаемости $\varepsilon_1 = 5$ F/m для ряда частот. Видно, что в экстремально низком диапазоне при малой проводимости подстилающей поверхности можно отбросить последний член в (13).

Также было произведено сравнение расчетов при $z = 0$ по формуле (10) с использованием метода Лонгмана и учетом первых двадцати слагаемых в полученном ряде и по формуле (13). Расхождение не превышало 10^{-6} %.

Заключение

В результате выполнения расчетов получены два представления для вертикальной компоненты электрического поля, излучаемого заземленным линейным вибратором. При этом представление с помощью интегралов Фока более удобно для качественного анализа поведения поля как функции расстояния, частоты и других параметров. Такое представление возможно только для частного случая, когда среда под антенной однородна и регистрация поля производится на границе раздела. В свою очередь, интегральное представление с осциллирующей функцией $J_0(\lambda\rho)$ в подынтегральном выражении свободно от этих ограничений и может быть использовано как для определения поля в любой точке, так и обобщено на многослойную плоскослоистую среду.

Автор благодарит Терещенко Е.Д. за помощь и плодотворную дискуссию при написании работы.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 09-05-12-12 ОФИ_м).

Список литературы

[1] *Бурсиан В.Р.* Теория электромагнитных полей, применяемых в электроразведке. Л.: Недра, 1972. 367 с.
[2] *Жданов М.С.* Теория обратных задач и регуляризация в геофизике. М., 2007. 710 с.
[3] *Bannister P.R., Williams F.J.* // J. Geophys. Res. 1974. Vol. 79. N 8. P. 725–732.
[4] *Терещенко Е.Д., Григорьев В.Ф., Сидоренко А.Е.* и др. // Геомагнетизм и аэрономия. 2007. Т. 47. № 6. С. 855–856.
[5] *Вешев А.В.* Электромагнитное профилирование на постоянном и переменном токе. Л.: Недра, 1980. 391 с.
[6] *Longman I.M.* // Cambridge Phil. Soc. Proc. 1956. Vol. 52. 764 p.
[7] *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., 1962. 1100 с.