

01;03

Точные частные решения для динамики поверхности диэлектрической жидкости с заряженной поверхностью в поле тяжести

© Н.М. Зубарев¹, О.В. Зубарева,¹ Г.А. Рув²¹ Институт электрофизики УрО РАН,
620016 Екатеринбург, Россия² Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, Новосибирск
e-mail: nick@ami.uran.ru

(Поступило в Редакцию 24 октября 2009 г.)

Исследована динамика развития неустойчивости границы идеальной диэлектрической жидкости со свободным поверхностным зарядом во внешнем электрическом поле. С использованием конформных переменных найдены точные частные решения уравнений движения для случая, когда заряд полностью экранирует поле над жидкостью; при этом учитывалось влияние как электростатических, так и гравитационных сил. Решения описывают развитие неустойчивости изначально плоской границы вплоть до формирования в ней заостренных лунок.

Известно, что плоская поверхность проводящей жидкости неустойчива в достаточно сильном внешнем электрическом поле [1,2]. Взаимодействие электрического поля и индуцированного им поверхностного заряда приводит к взрывному росту возмущений поверхности и в конечном итоге формированию острий. Аналогичная неустойчивость реализуется в вертикальном электрическом поле для диэлектрических жидкостей с поляризационным (связанным) поверхностным зарядом [3], а также со свободным поверхностным зарядом [4]. Дисперсионное соотношение, характеризующее динамику поверхности бесконечно глубокой жидкости на линейных стадиях развития неустойчивости, имеет вид

$$\omega^2 = g|k| + \alpha|k|^3/\rho - A^2k^2,$$

где ω — частота, k — волновое число, g — ускорение свободного падения, α — коэффициент поверхностного натяжения, ρ — плотность среды, A — параметр, характеризующий влияние внешнего электрического поля. Для проводящей жидкости $A = E\sqrt{\varepsilon_0/\rho}$, где E — абсолютное значение напряженности электрического поля и ε_0 — электрическая постоянная; для жидкого диэлектрика со связанным поверхностным зарядом

$$A = E(\varepsilon - 1)\sqrt{\varepsilon_0/\rho(\varepsilon_2 + \varepsilon)},$$

где ε — диэлектрическая проницаемость среды; для жидкого диэлектрика со свободным поверхностным зарядом

$$A = \sqrt{(E^2 + \varepsilon E'^2)\varepsilon_0/\rho},$$

где E' — напряженность поля в жидкости, а E — над ее поверхностью. Таким образом, структура дисперсионного соотношения одинакова для жидкостей с различными физическими свойствами. Более того, закон дисперсии имеет аналогичную форму для волн на

поверхности раздела диэлектрических жидкостей в вертикальном электрическом поле [3].

Из дисперсионного соотношения следует, что апериодическая неустойчивость поверхности развивается при условии, что $A > A_c$, где $A_c^2 = 2\sqrt{g\alpha/\rho}$. Обсудим в первую очередь случай сильного поля, $A \gg A_c$, когда для волновых чисел в диапазоне $g/A^2 \ll |k| \ll A^2\rho/\alpha$ можно не учитывать влияние капиллярных и гравитационных сил. Закон дисперсии тогда принимает простой вид: $\omega^2 = -A^2k^2$. Ему соответствует две ветви решений: $\omega = \pm iA|k|$. Для одной ветви малые возмущения поверхности будут экспоненциально затухать, а для другой — нарастать. Естественно рассматривать только вторую ветвь решений; именно она ответственна за развитие электрогидродинамической неустойчивости. Подобный подход оказывается эффективным при анализе не только линейных, но и нелинейных стадий неустойчивости [5–7]. В терминах уравнений для эволюции плоских волн, форма которых задается функцией $\eta(x, t)$, выделение нарастающих со временем решений соответствует редукции эллиптического уравнения

$$\eta_{tt} = -A^2\eta_{xx} \quad (1)$$

(нижние индексы обозначают производные по соответствующим переменным) к интегро-дифференциальному уравнению

$$\eta_t = -A\hat{H}\eta_x. \quad (2)$$

Входящий в него параметр Гильберта \hat{H} , определяемый выражением

$$\hat{H}f(x) = \pi^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x')(x' - x)^{-1} dx',$$

удовлетворяет свойству $\hat{H}e^{ikx} = i \operatorname{sign}(k)e^{ikx}$. Воспользовавшись им, легко получить дисперсионное соотноше-

ние $\omega = -iA|k|$ для уравнения (2) при рассмотрении периодических волн $\eta \sim \exp(i\omega t + ikx)$.

В настоящей работе рассматривается возможность использования аналогичного подхода для относительно длинных волн, для которых влияние гравитационных и электростатических сил сравнимо, $|k| \approx g/A^2$. Проиллюстрируем основную идею на примере линейной эволюции поверхности жидкости. Ее динамика, по аналогии с (1), будет определяться учитывающим влияние силы тяжести уравнением:

$$\eta_{tt} = -A^2\eta_{xx} + g\hat{H}\eta_x. \quad (3)$$

Потребуем, чтобы это уравнение редуцировалось к уравнению вида (2) с поправкой на то, что теперь будем полагать параметр A функцией времени. Несложно обнаружить, что уравнения (2) и (3) совместны, и следовательно, редукция осуществима, только если $A_t = -g$, т.е. приложенное электрическое поле линейно убывает со временем. В этом частном случае возникает возможность, по аналогии с работами [5–7], эффективно исследовать развитие электрогидродинамической неустойчивости для целого ряда ситуаций.

Остановимся на случае диэлектрической жидкости с малой поляризуемостью (к примеру, жидкого гелия, для которого можно приближенно считать проницаемость равной единице). Поверхность подобной жидкости может быть заряжена до больших значений поверхностной плотности электрического заряда, который может свободно перемещаться вдоль границы, обеспечивая ее эквипотенциальность [8,9].

Итак, рассмотрим развитие неустойчивости границы, помещенной в вертикальное электрическое поле бесконечно глубокой диэлектрической жидкости со свободным поверхностным зарядом. Как и в работах [6,10], будем считать, что заряд полностью экранирует поле над жидкостью, $E = 0$, а поле в жидкости является функцией времени $E'(t)$. Следует отметить, что эта ситуация противоположна реализующейся для проводящих жидкостей, для которых $E'(t) = 0$ и $E \neq 0$. Положим, что ось y прямоугольной системы координат $\{x, y\}$ направлена вдоль внешнего электрического поля. В невозмущенном состоянии жидкость покоится, а ее поверхность представляет собой горизонтальную плоскость $y = 0$. Возмущенная граница жидкости задается уравнением $y = \eta(x, t)$. Потенциал электрического поля в жидкости ϕ и потенциал скорости для безвихревого движения несжимаемой жидкости (ϕ) удовлетворяют уравнениям Лапласа со следующими граничными условиями:

$$\phi_t + \frac{(\nabla \phi)^2}{2} = \frac{E'^2(t) - (\nabla \phi)^2}{2\rho/\varepsilon_0} - g\eta, \quad y = \eta(x, t), \quad (4)$$

$$\eta_t = \phi_y - \eta x \phi_x, \quad y = \eta(x, t), \quad (5)$$

$$\phi = 0, \quad y = \eta(x, t), \quad (6)$$

$$\phi \rightarrow 0, \quad \phi \rightarrow -E'(t)y, \quad y \rightarrow -\infty. \quad (7)$$

Уравнение (4) представляет собой нестационарное уравнение Бернулли; первое слагаемое в правой части учитывает влияние электрического поля, а второе — поля тяжести. Кинематическое соотношение (5) определяет временную эволюцию свободной поверхности жидкости. В соответствии с условиями (6) и (7) потенциал электрического поля не изменяется вдоль границы жидкости; на бесконечной глубине электрическое поле становится однородным, а движение жидкости затухает.

Перейдем к безразмерным обозначениям при помощи замен:

$$\phi \rightarrow \phi(g/k^3)^{1/2}, \quad t \rightarrow t(gk)^{-1/2}, \quad \phi \rightarrow \phi(\rho g/\varepsilon_0 k^3)^{1/2},$$

$$\eta \rightarrow \eta/k, \quad y \rightarrow y/k, \quad x \rightarrow x/k,$$

где $k > 0$ — характерное волновое число. В новых переменных приложенное электрическое поле характеризуется безразмерной величиной $p(t) = E'(t)(\varepsilon_0 k/\rho g)^{1/2}$.

По аналогии с работами [11,12], где рассматривалась динамика жидкости в поле тяжести (т.е. было $E' = 0$), осуществим конформное преобразование занимаемой ею области в полуплоскость $v \leq 0$ и $-\infty < u < \infty$. Свободная поверхность в новых переменных задается параметрическими выражениями:

$$y = Y(u, t), \quad x = X(u, t) = u - \hat{H}Y(u, t). \quad (8)$$

Уравнения Лапласа для потенциалов в переменных $\{u, v\}$ решаются аналитически. В итоге уравнения движения жидкости сводятся к паре уравнений на эволюцию границы:

$$\begin{aligned} \Psi_t (1 - \hat{H}Y_u) + \Psi_u \hat{H}Y_t + \hat{H} (Y_t \Psi_u - Y_u \Psi_t) \\ = -p^2 \hat{H}Y_u - Y + Y \hat{H}Y_u + \hat{H}Y Y_u, \end{aligned} \quad (9)$$

$$Y_t (1 - \hat{H}Y_u) + Y_u \hat{H}Y_t = -\hat{H}\Psi_u, \quad (10)$$

где функция $\Psi(u, t)$ задает значение потенциала скорости при $v = 0$. Эти уравнения совпадают с полученными [11,12], за исключением первого слагаемого в правой части (9), которое учитывает электростатическое давление. Вывод этого слагаемого подробно описан в недавней работе [10].

Будем искать частное решение задачи в виде:

$$Y(u, t) = a(t) - b(t) \cos u, \quad \Psi(u, t) = c(t) - d(t) \cos u, \quad (11)$$

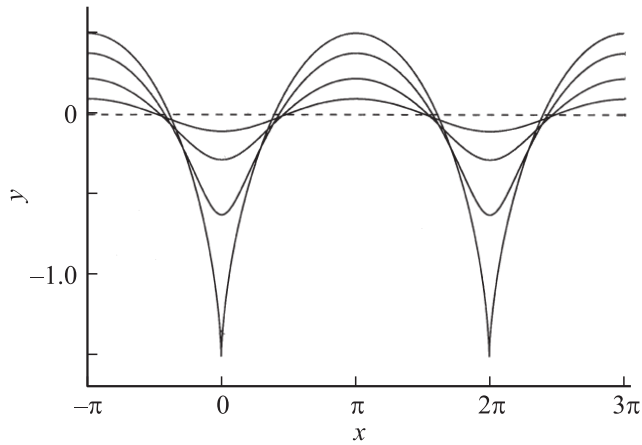
что соответствует периодическому возмущению границы. Подставив эти выражения в (9) и (10) и приравняв коэффициенты при одинаковых гармониках, получим следующие обыкновенные дифференциальные уравнения:

$$c_t + db_t/2 + bd_t/2 = -a - b^2/2,$$

$$d_t + 2bc_t - da_t = p^2 b - b - 2ab,$$

$$a_t + bb_t = 0, \quad b_t + ba_t = d, \quad db_t - bd_t = b^2.$$

Система этих пяти уравнений на четыре амплитуды гармоник a , b , c и d в общем случае является переопределенной. Воспользуемся тем обстоятельством,



Эволюция периодического возмущения границы для $p_0 = 2$. Профиль поверхности приведен в последовательные моменты времени $t = 0$ ($b = b_0 = 0.1$), $t \approx 0.51$ ($b = 0.25$), $t \approx 0.99$ ($b = 0.5$) и $t = t_c \approx 1.38$ ($b = 1$).

что в них входит функция времени $p(t)$, определяющая временную эволюцию напряженности электрического поля. Оказывается, что уравнения совместны, если $p_t = -1$, что в точности соответствует полученному выше условию $A_t = -g$, обеспечивающему возможность редукции линеаризованных уравнений движения. Это означает, что решение уравнений (9) и (10) представимо в виде (11) только в том случае, если поле линейно убывает со временем: $p(t) = p_0 - t$, где $p_0 = p(0) > 0$. Эволюция амплитуд при этом задается выражениями:

$$\ln b - b^2/2 - \ln b_0 + b_0^2/2 = p_0 t - t^2/2, \quad (12)$$

$$a = -b^2/2, \quad c = -pb^2/2, \quad d = pb, \quad (13)$$

где $b_0 = b(0)$, причем $0 < b_0 < 1$. Соотношения (11)–(13) задают точные частные решения задачи. В соответствии с ними можно выделить два различных сценария поведения границы жидкости. Если $p_0 > p_c$, где $p_c^2 = b_0^2 - 1 - 2 \ln b_0$, то амплитуда волны b нарастает, достигая в некоторый момент времени $t = t_c = p_0 - \sqrt{p_0^2 - p_c^2}$ предельного значения $b = 1$, которому соответствует появление на поверхности особенностей — заостренных лунок (см. рисунок). Если, напротив, $p_0 < p_c$, то амплитуда b сначала растет, а затем начинает уменьшаться, не достигая равного единице значения. При этом формирования точек заострения не происходит, а исходное периодическое возмущение поверхности затухает.

Рассмотрим поведение границы жидкости на стадии формирования заостренных лунок. Профиль границы жидкости в момент $t = t_c$, как несложно найти из (8) и (11), в окрестности особой точки (точки заострения) задается выражением: $y \approx -3/2 + (9/2)^{1/3}|x|^{2/3}$. В этой точке в бесконечность формально обращаются кривизна поверхности, напряженность электрического поля и скорость жидкости. Действительно, при $t \rightarrow t_c$ будет:

$b(t) \approx 1 - [p_1(t_c - t)]^{1/2}$, где $p_1 \equiv p(t_c) = \sqrt{p_0^2 - p_c^2}$. Тогда для скорости справедливо: $b_t \sim -(t_c - t)^{-1/2}$, т.е. она становится бесконечной за конечное время. Понятно, что применимость рассмотренных нами уравнений движения к моменту формирования особенности будет нарушена; на этой стадии следует ввести в рассмотрение ряд новых факторов (в частности, капиллярных и вязких сил), которые будут препятствовать появлению сингулярностей в решениях.

Таким образом, в настоящей работе найдены точные частные решения для эволюции периодического возмущения заряженной поверхности жидкого диэлектрика в поле тяжести. В соответствии с этими решениями, развитие электрогидродинамической неустойчивости приводит к формированию в ней заостренных лунок.

Работа выполнена при поддержке Фонда „Династия“ в рамках Программы поддержки фундаментальных проектов, выполняемых совместно УрО РАН и СО РАН, и Программы президиума РАН „Фундаментальные проблемы нелинейной динамики“.

Список литературы

- [1] Tonks L. // Phys. Rev. 1935. Vol. 48. P. 562.
- [2] Френкель Я.И. // ЖЭТФ. 1936. Т. 6. Вып. 4. С. 347–350.
- [3] Melcher J.R. // Field-Coupled Surface Waves. Cambridge, MA: MIT Press, 1963.
- [4] Эдельман В.С. // УФН. 1980. Т. 130. № 4. С. 675.
- [5] Зубарев Н.М. // ЖЭТФ. 1998. Т. 114. Вып. 6(12). С. 2043.
- [6] Зубарев Н.М. // ЖЭТФ. 2002. Т. 121. Вып. 3. С. 624.
- [7] Zubarev N.M. // Phys. Fluids. 2006. Vol. 18. 028 103.
- [8] Cole M.W., Cohen M.H. // Phys. Rev. Lett. 1969. Vol. 23. P. 1238.
- [9] Шикин В.Б. // ЖЭТФ. 1970. Т. 58. Вып. 5. С. 1748.
- [10] Зубарев Н.М. // ЖЭТФ. 2008. Т. 134. Вып. 4(10). С. 779.
- [11] Dyachenko A.I., Kuznetsov E.A., Spector M.D., Zakharov V.E. // Phys. Lett. A. 1996. Vol. 221. P. 73.
- [12] Дьяченко А.И., Захаров В.Е., Кузнецов Е.А. // Физика плазмы. 1996. Т. 22. Вып. 10. С. 916.