01

Динамика классической частицы в поле с нестационарным потенциалом

© А.С. Чихачев

Всероссийский электротехнический институт,
Москва, Россия

(Поступило в Редакцию 17 ноября 2009 г. В окончательной редакции 4 февраля 2010 г.)

Изучается поведение классической частицы, преодолевающей препятствие в виде прямоугольной ямы или прямоугольного барьера, характеризуемых растущим поперечным размером. Показано наличие ускорения при прохождении расширяющегося барьера.

В течение длительного времени существует большой интерес к изучению систем, как классических, так и квантовых, характеризующихся потенциалом, явно зависящим от времени (см. [1–3]). Примером ситуации, которая может возникнуть в эксперименте, является пролет заряженной частицы через расплывающееся облако заряженных частиц того же или противоположного заряда. В качестве одной из самых простых моделей подобного явления можно рассматривать потенциальную прямоугольную яму (или прямоугольный барьер) с переменным поперечным размером.

Рассмотрим случай одномерного движения. Пусть яма характеризуется постоянной глубиной α, причем стенки разбегаются симметрично вдоль оси x со скоростью $\pm V$. Уравнение движения можно представить в виде:

$$\ddot{x} = -\frac{\partial U}{\partial x}, \tag{1}$$

где

$$U = -\alpha\theta(x + Vt)\theta(Vt - x),$$

$\theta(z)$ — функция Хевисайда: $\theta = 1$, $z > 0$, $\theta = 0$, $z < 0$. Потенциальная яма имеется в области $-Vt > x > Vt$ (считается, что $t > 0$).

Уравнение движения имеет вид (всюду далее полагается масса $m = 1$):

$$\ddot{x} = \alpha\left[\delta(x + Vt) - \delta(x - Vt)\right]. \tag{2}$$

Поскольку силовое воздействие на частицу имеется только в точках $x = \pm Vt$, решение (2) можно искать в виде:

$$\dot{x} = C_1\theta(-x - Vt) + C_2\theta(x + Vt)\theta(Vt - x) + C_3\theta(x - Vt). \tag{3}$$

В соотношении (3) константы C_1, C_2, C_3 — скорости при $x < -Vt$, $-Vt < x < Vt$, $Vt < x$ соответствено. Используя (3), можно найти действие $S(x, t)$ для описываемой системы как

$$S = \int \dot{x}(x)dx.$$

Выражение $S(x, t)$ в виде

$$S(x, t) = C_1(x + Vt)\theta(-x - Vt) + C_2\big[x\theta(x + Vt) \times \theta(Vt - x) - Vt\theta(-x - Vt) + Vt\theta(x - Vt)\big] + C_3(x - Vt)\theta(x - Vt) + \Psi(t) \tag{4}$$

(где $\Psi(t)$ — произвольная функция времени) с учетом соотношения $z\delta(z) \equiv 0$ удовлетворяет условию:

$$\frac{\partial S}{\partial x} = \dot{x},$$

где $\dot{x}$ определяется равенством (3). При этом имеет место соотношение

$$\frac{\partial S}{\partial t} = V(C_1 - C_2)\theta(-x - Vt) + V(C_2 - C_3)\theta(x - Vt) + \dot{\Psi}(t). \tag{5}$$

Соотношения (4) и (5) можно подставить в уравнение Гамильтона–Якоби (см. [4]):

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + U(x, t) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0. \tag{6}$$

Используя выражения для U и S, получим следующие три равенства:

$$\frac{C_1^2}{2} + V(C_1 - C_2) + \dot{\Psi} = 0,$$

$$\frac{C_2^2}{2} - \alpha + \dot{\Psi} = 0,$$

$$\frac{C_3^2}{2} + V(C_2 - C_2) + \dot{\Psi} = 0. \tag{7}$$

Обозначим $C_1/V = u$, $C_2/V = v$, $C_3/V = w$, $2\alpha/V^2 = a$.

Из равенств (7) следует параметрическая зависимость $w(u)$, т.е. зависимость конечного импульса от начального, определяемая равенствами:

$$(u + 1)^2 + a = (v + 1)^2,$$

$$(w - 1)^2 + a = (v - 1)^2.$$

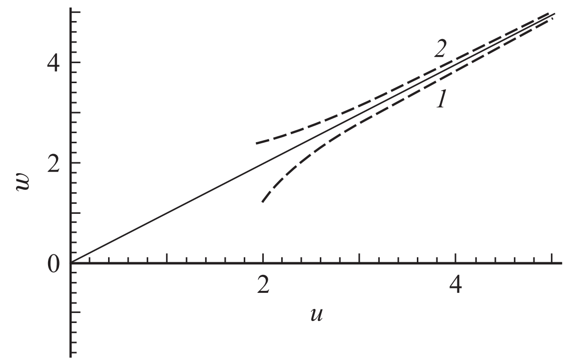

Рис. 1.

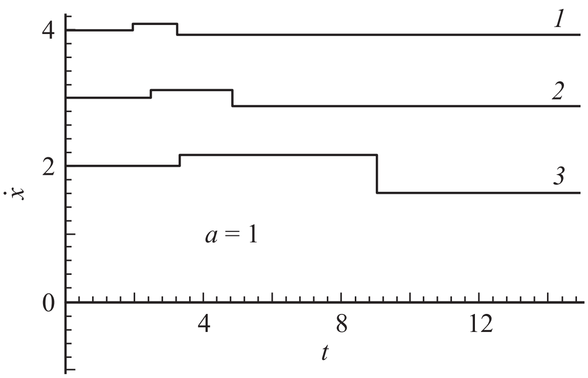

Рис. 2.

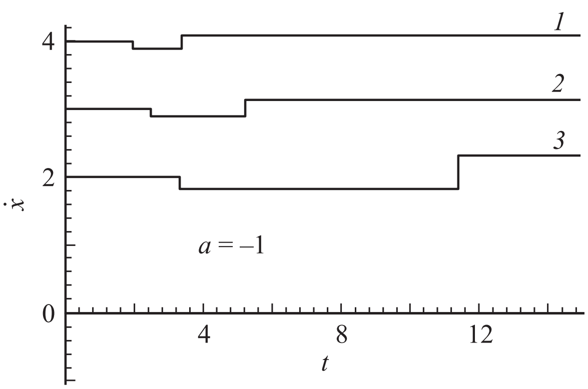

Рис. 3.

Зависимость $w(u)$ при значениях $a = \pm 1.5$ изображена на рис. 1. При положительных значениях a (т.е. при прохождении ямы) скорость частиц уменьшается (кривая *1* на рис. 1), тогда как после преодоления барьера ($a < 0$) скорость увеличивается (кривая *2*). Во втором случае имеется своего рода механизм ускорения частиц.

Условие захвата в яму можно представить в виде $v < 1$, откуда следует:

$$u < -1 + \sqrt{4 - a}.$$

Условие преодоления барьера ($a < 0$) имеет вид:

$$u > -1 + \sqrt{4 - a}.$$

Оба эти условия отличаются от условий преодоления стационарного препятствия: в случае ямы возможен захват частицы с положительной энергией, а в случае барьера — преодоление препятствия с энергией, меньшей высоты барьера.

В уравнении (3) правая часть является функцией от x/t, что позволяет получить полное решение для $x(t)$. Положим начальное значение времени $t = t_0 > 0$, при этом начальная скорость $\dot{x}_0 = C_1$. Обозначим $x_0 = -At_0$, где $A > V$. В результате интегрирования (3) можно получить:

$$x(t) = [C_1 t - t_0(C_1 + A)]\theta\left(t_0 \frac{C_1 + A}{C_1 + V}\right)$$
$$+ \left[C_2 t - t_0 \frac{C_1 + A}{C_1 + V}(C_2 + V)\right]\theta\left(t - t_0 \frac{C_1 + A}{C_1 + V}\right)$$
$$\times \theta\left(t_0 \frac{C_1 + A}{C_1 + V}\frac{C_2 + V}{C_2 + V} - 1\right) + \left[C_3 t - t_0 \frac{C_1 + A}{C_1 + V}\right.$$
$$\left.\times \frac{C_2 + V}{C_2 - V}(C_3 - V)\right]\theta\left(t - t_0 \frac{C_1 + A}{C_1 + V}\frac{C_2 + V}{C_1 + V}\right). \qquad (8)$$

Графический вид зависимостей функций $\dot{x}(t)$ при различных значениях входящих параметров и при $a = 2\alpha/V^2 = 1$ приведен на рис. 2, а при $a = 2\alpha/V^2 = -1$ — на рис. 3.

Значения моментов времени, при которых происходит скачок скорости, зависят от начального времени t_0. Для всех кривых, изображенных на рис. 2 и 3, полагалось $t_0 = 0.01$, $A = 1000$. Для каждого из этих рисунков верхняя кривая соответствует начальной скорости $C_1/V = 4$, средняя — $C_1/V = 3$ и нижняя — $C_1/V = 2$.

Предположим, что имеется поток частиц, преодолевающих препятствие в виде ямы или барьера, характеризующийся функцией распределения, зависящей от интеграла движения. В качестве интеграла движения возьмем константу C_2. Плотность частиц

$$n = \int f(C_2 dx).$$

Поскольку $\dot{x}$ определяется равенством (3), то

$$d\dot{x} = dC_2 \left\{ \frac{\partial C_1}{\partial C_2}\theta(-x - Vt) + \theta(x + Vt)\theta(Vt - x) + \frac{\partial C_3}{\partial C_2}\theta(x - Vt) \right\}.$$

Если все частицы характеризуются одним значением C_2, т.е. $f = n_0\delta(C_2 - I_0)$, то плотность имеет вид:

$$n(x,t) = n_0\left\{\frac{I_0+V}{\sqrt{(I_0+V)^2-2\alpha}}\,\theta(-x-Vt) + \theta(x+Vt)\theta(Vt-x) + \frac{I_0-V}{\sqrt{(I_0-V)^2-2\alpha}}\,\theta(x-Vt)\right\}. \qquad (9)$$

Здесь n_0 — плотность частиц в потенциальной яме. Согласно (9), плотность частиц минимальна в потенциальной яме, а максиальна на выходе, так как

$$\frac{I_0-V}{\sqrt{(I_0-V)^2-2\alpha}} > \frac{I_0+V}{\sqrt{(I_0+V)^2-2\alpha}} > 1.$$

Плотность потока частиц в яме больше, чем на выходе, поскольку

$$\frac{I_0+V}{\sqrt{(I_0+V)^2-2\alpha}}\left(\sqrt{(I_0+V)^2-2\alpha}-V\right) < I_0,$$

но меньше, чем на выходе, так как

$$\frac{I_0-V}{\sqrt{(I_0-V)^2-2\alpha}}\left(\sqrt{(I_0-V)^2-2\alpha}+V\right) > I_0,$$

Таким образом, плотность потока частиц, пересекающих препятствие в виде потенциальной ямы, оказывается максимальной на выходе системы. При наличии барьера плотность проходящих частиц минимальна на самом барьере, а плотность потока минимальна на выходе из системы.

Таким образом, в работе изучена динамика частицы, пересекающей нестационарный барьер или нестационарную яму. При пересечении барьера возможно ускорение частицы, тогда как при пересечении ямы происходит захват частицы или уменьшение ее энергии.

Список литературы

[1] *Чихачев А.С.* ЖЭТФ. 2006. Т. 130. Вып. 5(11). С. 917–921.

[2] *Lewis H.R., Leach P.G.L.* // J. Math. Phys. 1982. Vol. 23. N 1. P. 165–175.

[3] *Efthimiou C.J., Spector D.* // Phys. Rev. A. 1994. Vol. 49. N 4. P. 2101–2311.

[4] *Голдстейн Г.* Классическая механика. М.: ГИТТЛ, 1957.