

01;11

Влияние зависимости коэффициента зеркальности от угла падения электронов на величину импеданса

© А.В. Латышев, А.А. Юшканов

Московский государственный областной университет,
105005 Москва, Россия
e-mail: avlatyshev@mail.ru, yushkanov@inbox.ru

(Поступило в Редакцию 29 октября 2009 г.)

Получено решение задачи о скин-эффекте в металле с зеркально-диффузными граничными условиями при любых значениях параметра аномальности в виде ряда Неймана. Для этого развивается метод, в основе которого лежит идея представления в виде источника не только граничного условия на поле, как обычно делается, но и граничного условия на функцию распределения. Коэффициент зеркальности является произвольной функцией угла падения электронов на поверхность металла.

Введение

Последние десятилетия характеризуются возрастанием интереса к проблемам взаимодействия электромагнитной волны с веществом. Так, в [1] выяснены вопросы электросопротивления, а также протекания тока через границу раздела кристаллитов.

Явления в металле [2] с достаточно большой длиной свободного пробега электронов l существенно зависят от характера взаимодействия электронов проводимости с границами образца. Часто это взаимодействие описывается с помощью так называемого коэффициента зеркальности q , q — доля электронов, отражающихся от границы зеркально, а $(1 - q)$ — диффузно. В [3] показано, что коэффициент зеркальности должен существенно зависеть от угла падения электронов на поверхность. Этот эффект особенно сильно выражен для скользящих электронов, когда угол падения близок к $\pi/2$. В [3] отмечалось, что это обстоятельство должно существенно сказаться на явлении скин-эффекта, особенно в случае сильно аномального скин-эффекта.

Задача о скин-эффекте является одной из важнейших задач кинетической теории плазмы. Эта задача имеет большое практическое значение. Сделаем небольшой обзор работ, связанных с настоящей работой.

Решение задачи о скин-эффекте с зеркальными граничными условиями хорошо известно [4,5]. Задача с диффузными граничными условиями аналитически решена [6] в середине прошлого столетия.

Работа [7] посвящена изучению зависимости импеданса от угла падения электромагнитной волны на поверхность металла для случая зеркального характера отражения электронов от поверхности.

Работы [8,9] также посвящены предельно аномальному скин-эффекту.

В работе [10] показана эффективность метода разложения по собственным решениям для анализа структуры электрического поля в задаче о скин-эффекте в металле для случаев зеркального и диффузного граничных условий.

В настоящее время актуальной является проблема получить решение этой задачи с общими зеркально-диффузными граничными условиями. Именно коэффициент зеркальности q играет важную роль в описании скин-эффекта. Предельные случаи $q = 0$ — диффузное рассеяние электронов на поверхности металла и $q = 1$ — зеркальное рассеяние электронов — являются исключительными. В действительности коэффициент зеркальности в металле не равен ни нулю, ни единице, а принимает некоторые промежуточные значения.

Так, например, в работе [11] показано на основе анализа продольного магнитосопротивления тонкой проволоки из натрия [12], что коэффициент зеркальности в этом случае равен 0.4. В связи с этим замечанием задача о скин-эффекте с зеркально-диффузными граничными условиями приобретает исключительно принципиальное значение, которое велико как для теории, так и для практических применений. В частности, ее значение трудно переоценить, например, в металлооптике (см., например, [3,13]). В последнее время выявляются новые области применения теории скин-эффекта, например при анализе эффекта Казимира [14].

Цель настоящей работы состоит в изучении влияния коэффициента зеркальности и его зависимости от угла падения на скин-эффект в металле при любых значениях параметра аномальности. Случай коэффициента зеркальности, не зависящего от угла падения, рассмотрен в [15].

Постановка задачи

Пусть вырожденная плазма занимает полупространство $x > 0$. Функция распределения электронов [16] $f = f(t, x, \mathbf{v})$ нормирована на их числовую плотность (концентрацию):

$$\int f(t, x, \mathbf{v}) d\Omega_F = N(t, x), \quad d\Omega_F = \frac{2d^3p}{(2\pi\hbar)^3},$$

$\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ — импульс электрона, m — его масса, \hbar — постоянная Планка, $d^3p = dp_x dp_y dp_z$.

Рассмотрим электромагнитную волну, падающую на поверхность металла по нормали к ней. Тогда внешнее поле имеет только одну y -компоненту. Самосогласованное электрическое поле внутри металла также имеет только одну y -компоненту $E_y(t, x) = e^{-i\omega t} E(x)$.

В качестве кинетического уравнения для функции распределения электронов будем использовать кинетическое уравнение Власова–Больцмана с самосогласованным электрическим полем $E_y(t, x)$ и интегралом столкновений в форме τ -модели. Для достаточно слабых внешних полей это уравнение можно линеаризовать по внешнему полю и по малым отклонениям $f_l(x, \mathbf{v})e^{-i\omega t}$ от равновесной функции распределения Ферми $f_0(\varepsilon)$:

$$-i\omega f_l(x, \mathbf{v}) + v_x \frac{\partial f_l}{\partial x} + e_0 E(x) \frac{\partial f_0(\varepsilon)}{\partial p_y} = -\frac{f_l(x, \mathbf{v})}{\tau}. \quad (1)$$

Здесь τ — характерное время между двумя последовательными столкновениями электрона, $\tau = 1\nu$, ν — эффективная частота столкновений электронов с дефектами решетки металла и фононами, e_0 — заряд электрона, $f_0(v) = H(\varepsilon_F - \varepsilon)$, $H(x)$ — функция Хэвисайда,

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \quad \varepsilon = \frac{mv^2}{2}, \quad \varepsilon_F = \frac{mv_F^2}{2},$$

ε — кинетическая энергия электрона, ε_F — энергия Ферми, v_F — скорость электрона на поверхности Ферми. Предполагается, что поверхность Ферми имеет сферическую форму.

Исключив магнитное поле из двух уравнений Максвелла, приходим к уравнению Пуассона с учетом тока смещения:

$$E''(x) + \frac{\omega^2}{c^2} E(x) = -\frac{4\pi i \omega}{c^2} j(x), \quad (2)$$

где $j(x)$ — плотность тока:

$$j(x) = e_0 \int v_y f_l(x, \mathbf{v}) d\Omega_F. \quad (3)$$

В работе [3] показано, что коэффициент зеркальности $q = q(\theta)$ (θ — угол падения электрона на границу) при отражении электронов от поверхности металлов стремится к единице при касательном падении, когда угол падения θ стремится к $\pi/2$. Из этого следует, что коэффициент зеркальности $q = q(\theta)$ можно представить в виде следующего разложения:

$$q(\theta) = 1 - a_1 \cos \theta - a_2 \cos^2 \theta - a_3 \cos^3 \theta + \dots \quad (4)$$

Здесь a_n — некоторые коэффициенты, зависящие от свойств поверхности металла.

Следуя [4], продолжим электрическое поле и функцию распределения электронов симметричным образом:

$$E(x) = E(-x), \quad f_l(x, \mathbf{v}) = f_l(-x, -v_x, v_y, v_z). \quad (5)$$

Продолжение неизвестных функций $E(x)$ и $f_l(x, \mathbf{v})$, согласно [5], на полупространство $x < 0$ позволяет включить граничные условия в уравнения задачи.

Такое продолжение функции распределения и поля позволяет фактически рассматривать две задачи, одна из которых определена в „положительном“ полупространстве $x > 0$, вторая — в „отрицательном“ $x < 0$.

Сформулируем зеркально-диффузные граничные условия для функции распределения соответственно для „положительного“ и „отрицательного“ полупространств. Для этого обозначим $q(\theta)$ через $q(|\mu|)$, $\mu = \cos \theta = v_x/v_F$, далее вместо $q(|\mu|)$ будем писать $q(\mu)$, считая $q(\mu)$ четной функцией, тем самым разложение (4) записывается в виде

$$q(\mu) = 1 - a_1|\mu| - a_2|\mu|^2 - a_3|\mu|^3 + \dots \quad (4')$$

С учетом (4') зеркально-диффузные граничные условия для функции распределения имеют вид

$$f_l(+0, \mathbf{v}) = q(\mu) f_l(+0, -v_x, v_y, v_z), \quad v_x > 0, \quad (6)$$

$$f_l(-0, \mathbf{v}) = q(\mu) f_l(-0, -v_x, v_y, v_z), \quad v_x < 0, \quad (7)$$

где $q(\mu)$ — коэффициент зеркальности, $0 \leq q(\mu) \leq 1$.

В уравнениях (6) и (7) параметр $q(\mu)$ — часть электронов, рассеивающихся границей зеркально, $(1 - q(\mu))$ — часть электронов, рассеивающихся диффузно.

В уравнениях (1)–(3) положим: $f_l = v_y \times \times \delta(v_F - v) h(x, \mu)$, где $h(x, \mu)$ — неизвестная безразмерная функция, а также перейдем к безразмерным переменным:

$$t_l = \nu t, \quad x_l = \frac{x}{l}, \quad l = \frac{v_F}{\tau}, \quad e(x_l) = \frac{e_0}{\nu m v_F} E(x_l)$$

и введем параметры

$$\alpha = \frac{e_0^2 \omega m^3 l^2 v_F^3}{c^2 \nu \pi \hbar^3 m} = \frac{3\pi N e_0^2 l^2 \omega}{c^2 m \nu} = \frac{3}{2} \left(\frac{l}{\delta_0} \right)^2,$$

$$\delta_0^2 = \frac{c^2}{2\pi \omega \sigma_0}, \quad \sigma_0 = \frac{e_0 N}{m \nu}, \quad \left(\frac{m v_F}{\hbar} \right)^3 = 3\pi^2 N,$$

N — концентрация электронов, σ — статическая электрическая проводимость, δ_0 — толщина скин-слоя в случае нормального скин-эффекта, α — параметр аномальности скин-эффекта. Далее переменную x_l будем снова обозначать через x .

Таким образом, далее будем рассматривать следующую систему уравнений:

$$\mu = \frac{\partial h(x, \mu)}{\partial x} + z_0 h(x, \mu) = e(x), \quad z_0 = 1 - i \frac{\omega}{\nu}, \quad (8)$$

$$e''(x) + \left(\frac{\omega l}{c} \right)^2 e(x) = -i\alpha \int_{-l}^l (1 - \mu^2) h(x, \mu) d\mu. \quad (9)$$

При малых значениях α скин-эффект носит нормальный характер и его можно описать на основе макроскопической электродинамики. При больших значениях α для описания скин-эффекта необходимо использование кинетической теории.

Сформулируем граничные условия на поверхности металла. Для функции распределения электронов на границе, согласно (6) и (7), получаем:

$$h(+0, \mu) = q(\mu)h(+0, -\mu), \quad 0 < \mu < 1,$$

$$h(-0, \mu) = q(\mu)h(-0, -\mu), \quad -1 < \mu < 0.$$

С помощью второго равенства из (5) эти граничные условия преобразуются в следующие:

$$h(+0, \mu) = q(\mu)h(-0, \mu), \quad 0 < \mu < 1, \quad (10)$$

$$h(-0, \mu) = q(\mu)h(+0, \mu), \quad -1 < \mu < 0. \quad (11)$$

Вдали от границы функция распределения электронов и электрическое поле ищутся исчезающими:

$$h(+\infty, \mu) = 0, \quad e(+\infty) = 0. \quad (12)$$

На границе плазмы считаем заданной конечную величину градиента электрического поля:

$$e'(0) = e'_s, \quad |e'_s| < +\infty. \quad (13)$$

Здесь e'_s — заданная величина — градиент электрического поля на границе плазмы.

Характеристическая система

Включим граничные условия (10) и (11) в кинетическое уравнение (8), а граничное условие (13) включим в уравнение для электрического поля (9).

Согласно (6) и (7), электрическое поле и функция распределения продолжают в область $x < 0$ следующим образом:

$$e(x) = e(-x), \quad h(x, \mu) = h(-x, -\mu).$$

Получаем следующую систему уравнений для описания скин-эффекта в полупространстве металла:

$$\mu \frac{\partial h}{\partial x} + z_0 h(x, \mu) = e(x) - (1 - q(\mu))|\mu| h(\mp 0, \mu) \delta(x), \quad (14)$$

$$e''(x) + \left(\frac{\omega l}{c}\right)^2 e(x) = -i\alpha \int_{-l}^l (1 - \mu^2) h(x, \mu) d\mu + 2e'_s \delta(x). \quad (15)$$

В уравнении (14) слагаемое $h(\mp 0, \mu)$ означает, что при $\mu > 0$ в уравнении стоит $h(-0, \mu)$, а при $\mu < 0$ — стоит $h(+0, \mu)$.

Отметим, что при зеркальных граничных условиях ($q(\mu) \equiv 1$) член типа источника включается только в уравнение для электрического поля (см., например, [4]). Дело в том, что зеркальное граничное условие для функции распределения $h(0, \mu) = h(0, -\mu)$ при этом оказывается включенным автоматически в кинетическое уравнение.

При общих зеркально-диффузных граничных условиях дело обстоит принципиально сложнее. Теперь граничные условия для функции распределения не включаются автоматически в кинетическое уравнение. Чтобы кинетическое уравнение „содержало“ граничное условие для функции распределения, требуется включить в кинетическое уравнение член типа источника. Нетрудно проверить, что граничные условия (10) и (11) включены в уравнение (14).

Решим уравнение (14) при $x > 0, \mu < 0$, считая заданным поле $e(x)$, получим, удовлетворяя граничным условиям (12):

$$h_+(x, \mu) = \frac{1}{\mu} \exp\left(-\frac{z_0 x}{\mu}\right) \int_x^\infty \exp\left(\frac{z_0 t}{\mu}\right) e(t) dt.$$

Соответственно при $x < 0, \mu > 0$ находим

$$h_-(x, \mu) = \frac{1}{\mu} \exp\left(-\frac{z_0 x}{\mu}\right) \int_{-\infty}^x \exp\left(\frac{z_0 t}{\mu}\right) e(t) dt.$$

Теперь уравнение (14) можно переписать в виде

$$\mu \frac{\partial h}{\partial x} + z_0 h(x, \mu) - e(x) = -(1 - q(\mu))|\mu| h_\pm(0, \mu) \delta(x). \quad (16)$$

Решение уравнений (15) и (16) ищем в виде интегралов Фурье:

$$e(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{ikx} E(k) dk, \quad \delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{ikx} dk, \quad (17)$$

$$h(x, \mu) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{ikx} \Phi(k, \mu) dk. \quad (18)$$

При этом функция $h_+(x, \mu)$ выражается через спектральную плотность электрического поля $E(k)$ следующим образом:

$$h_+(x, \mu) = -\frac{\exp(-z_0 x/\mu)}{2\pi\mu} \int_{-\infty}^\infty E(k) dk \times \int_x^\infty \exp\left(iku + \frac{z_0 u}{\mu}\right) du = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{\exp(ikx) E(k)}{z_0 + ik\mu} dk. \quad (19)$$

Нетрудно проверить, что выражение для $h_-(x, \mu)$ в точности совпадает с выражением для $h_+(x, \mu)$. Учитывая, что функция $e(x)$ — четная по x , а значит $E(-k) = E(k)$, получим

$$h_{\pm}(0, \mu) = \frac{z_0}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{E(k)dk}{z_0^2 + k^2\mu^2}.$$

Теперь подставим интегралы Фурье (17) и (18), а также равенство (19) в уравнения (15) и (16). Получаем характеристическую систему уравнений

$$\Phi(k, \mu)(z_0 + ik\mu) = E(k) - (1 - q(\mu)) \frac{|\mu|}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{E(k_l)dk_l}{z_0^2 + k_l^2\mu^2}, \quad (20)$$

$$L(k)E(k) = -2e'_s + \frac{\alpha z_0^2}{\pi i} \int_0^{\infty} E(k_l)J(k, k_l)dk_l. \quad (21)$$

Здесь

$$J(k, k_l) = 2 \int_0^l \frac{(1 - \mu^2)(1 - q(\mu))\mu d\mu}{(z_0^2 + k^2\mu^2)(z_0^2 + k_l^2\mu^2)}$$

и введена дисперсионная функция

$$L(k) = k^2 - \left(\frac{\omega l}{c}\right)^2 - 2iz_0\alpha \int_0^l \frac{(1 - \mu^2)d\mu}{z_0^2 + k^2\mu^2}.$$

Решение задачи

Так как наша цель — нахождение импеданса, далее будем рассматривать уравнение (21). Уравнение (20) может быть использовано при нахождении функции распределения. Разложим спектральную плотность поля $E(k)$ в ряд, членами которых служат последовательные приближения решения уравнения (21):

$$E(k) = E_0(k) + E_1(k) + E_2(k) + \dots \quad (22)$$

С помощью (22) из (21) находим

$$E_0(k) = -\frac{2e'_s}{L(k)}. \quad (23)$$

Для n -го ($n = 1, 2, \dots$) приближения получаем

$$E_n(k) = \frac{\alpha z_0^2}{L(k)\pi i} \int_0^{\infty} E_{n-1}(k_l)J(k, k_l)dk_l. \quad (24)$$

После того как ряд (22) построен, спектральная плотность функции распределения находится из уравнения (20).

Согласно (17) и (22), построим электрическое поле:

$$e(x) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} E_n(k) \cos kx dk.$$

Перейдем к вычислению импеданса:

$$Z = \frac{4\pi i \omega l}{c^2} \frac{e(0)}{e'_s} = \frac{2i\omega l}{c^2 e'_s} \int_{-\infty}^{\infty} E(k)dk = \frac{4i\omega l}{c^2 e'_s} \int_0^{\infty} E(k)dk.$$

Раскладываем величину Z в ряд Неймана:

$$Z = Z_0 + Z_1 + Z_2 + \dots, \quad (25)$$

здесь

$$Z_n = \frac{4i\omega l}{c^2 e'_s} \int_0^{\infty} E_n(k)dk, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Анализ, обсуждение и численные результаты

Итак, выше представлен метод, приводящий к решению задачи о скин-эффекте с произвольным коэффициентом зеркальности. Отметим, что при $q(\mu) \equiv 1$ метод приводит к классическому решению. Оно хорошо известно из литературы (см., например, [4]). Решение из [4] приведем к виду:

$$Z_{\text{ref}} = -\frac{8i\omega l}{c^2} \int_0^{\infty} \frac{dk}{L(k)}, \quad \text{т. е. } Z_{\text{ref}} = Z_0. \quad (26)$$

Отметим, что ряд (25) можно просуммировать при малых значениях параметра аномальности α . В самом деле, при малых α основной вклад в интегралы определяется величинами $k^2 \sim \alpha$, т. е. существенны малые величины k . Из равенства (26) находим

$$\int_0^{\infty} \frac{dk}{L(k)} = \frac{ic^2}{8\omega l} Z_0.$$

Кроме того, при малых k и k_l имеем: $J(k, k_l) = J_q z_0^{-4}$, где

$$J_q = 2 \int_0^l (1 - \mu^2)(1 - q(\mu))\mu d\mu.$$

Следовательно, в первом приближении находим: $Z_l = Z_0^2 \alpha^2 J_q / (8\pi \omega l z_0^2)$. Точно так же при любом натуральном n получаем:

$$Z_n = Z_0^{n+1} \left(\frac{\alpha^2 J_q}{8\pi \omega l z_0^2} \right)^n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Следовательно, ряд (25) имеет следующую сумму:

$$Z = \frac{8\pi \omega l z_0^2 Z_0}{8\pi \omega l z_0^2 - \alpha^2 J_q Z_0}.$$

Из данного выражения следует, что при малых значениях параметра аномальности α зависимость импеданса от коэффициента зеркальности пропадает: $Z \rightarrow Z_0$ при $\alpha \rightarrow 0$. При $q(\mu) \equiv q$ интеграл J_q равен: $J_q = (1 - q)/2$, поэтому из полученной формулы следует

$$Z = \frac{16\pi\omega l z_0^2 Z_0}{16\pi\omega l z_0^2 - \alpha c^2(1 - q)Z_0}.$$

Ясно, что при $q(\mu) \equiv 1$ полученное решение является точным уже в нулевом приближении. Наибольшее отклонение от этого решения при учете конечного числа членов в ряде (25) достигается при $q(\mu) \equiv 0$. При $q(\mu) \equiv 0$ решение задачи также хорошо известно — это классическое решение с диффузными граничными условиями [6]. В терминах наших обозначений это решение запишется следующим образом:

$$Z_{\text{diff}} = -\frac{4\pi i \omega l}{c^2} \left[\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \ln[k^{-2}L(k)dk] \right]^{-1}.$$

В дальнейшем анализе задачи ограничимся практически важным случаем, когда током смещения можно пренебречь.

Хорошо известно [16], что отношение импедансов в случае диффузных и зеркальных граничных условий для предельно аномального скин-эффекта, когда $\alpha \gg 1$ и $\omega \ll \nu$, равно 1.125, т.е. в нулевом приближении различие точного и приближенного решений составляет 12.5%. Отметим, что в нулевом приближении величина импеданса от коэффициента зеркальности $q(\mu)$ не зависит.

Введем аппроксимационные полиномы

$$Z^{(n)} = Z_0 + Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

В общем случае величина импеданса зависит от параметров $\alpha, q, \omega, \nu, l$. Ограничимся исследованием зависимости от параметра аномальности α и величины коэффициента зеркальности q . Будем считать, что частота ω много меньше частоты рассеяния электронов ν . При этом $z_0 = 1$.

Рассмотрим сначала случай, когда коэффициент зеркальности q не зависит от угла падения электронов на поверхность металла, т.е. случай постоянного коэффициента зеркальности.

Остановимся на количественных оценках точности приближений. Возьмем случай $\alpha > 1000$. Численный анализ полученных результатов показывает, что для действительной части импеданса в первом приближении ошибка составляет менее 3.04%, во втором приближении — менее 1.05%, а в третьем — менее 0.38%.

Для мнимой части импеданса в первом приближении ошибка составляет менее 2.62%, во втором приближении — менее 0.98%, а в третьем — менее 0.35%.

Эти приближения говорят об эффективности представленного метода. Подчеркнем, что максимальная ошибка достигается при больших значениях параметра аномальности: $\alpha > 10^3$.

На рис. 1 и 2 представлены графики зависимостей $\text{Re}Z/\text{Re}Z_0$ и $\text{Im}Z/\text{Im}Z_0$ от параметра аномальности α при различных постоянных значениях коэффициента зеркальности q . Кривые 1, 2, 3 отвечают значениям $q = 0, 0.3, 0.7$ соответственно.

Перейдем к рассмотрению случая переменного коэффициента зеркальности. Для анализа влияния зависимости коэффициента зеркальности от угла падения электронов на поверхность $q(\theta)$ на величину импеданса рассмотрим некоторую конкретную реализацию этой зависимости. В общем случае эта зависимость определяется характером рассеяния электронов на поверхности металла [3]. В то же время представляет интерес рассмотрение некоторой общей модельной зависимости коэффициента зеркальности от угла падения электро-

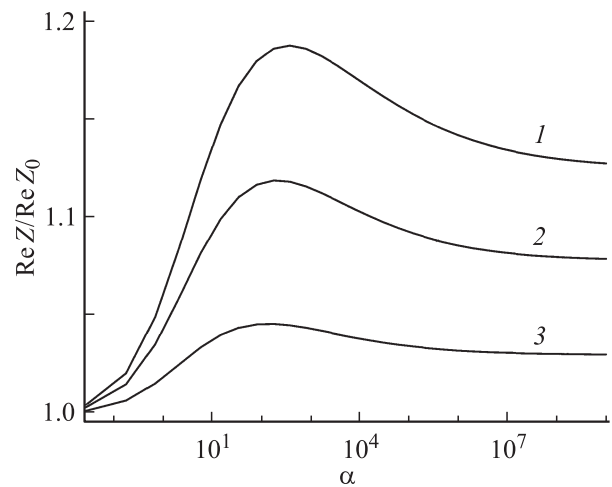


Рис. 1. Зависимость $\text{Re}Z/\text{Re}Z_0$ от параметра аномальности α при различных значениях коэффициента аккомодации.

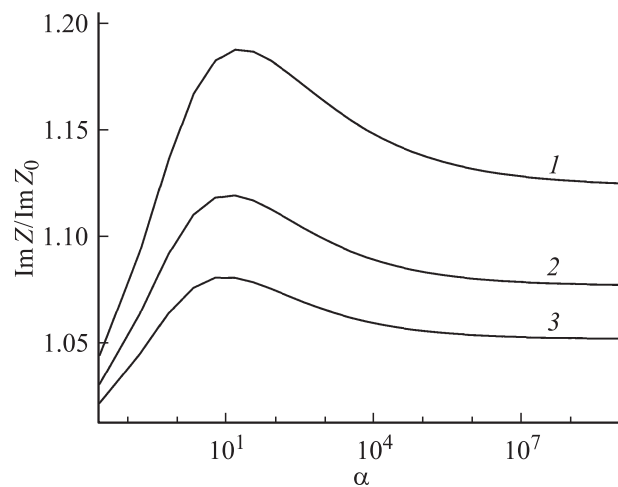


Рис. 2. Зависимость $\text{Im}Z/\text{Im}Z_0$ от параметра аномальности α при различных значениях коэффициента аккомодации.

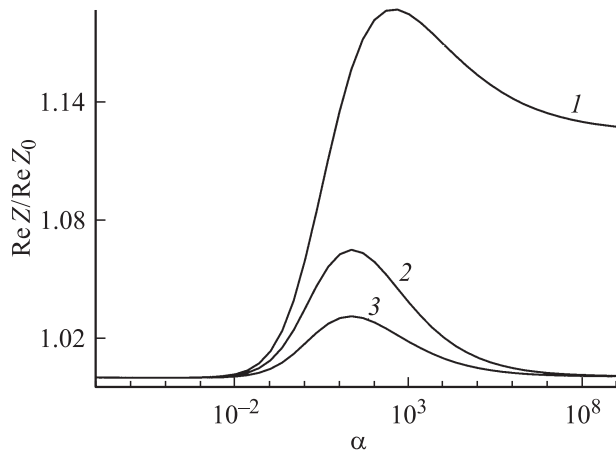


Рис. 3. Зависимость $\text{Re}Z/\text{Re}Z_0$ от параметра аномальности α при различных значениях коэффициента аккомодации. Кривые 1, 2, 3 отвечают коэффициентам 0, $1 - \cos \theta$, $1 - 0.5 \cos \theta$ соответственно.

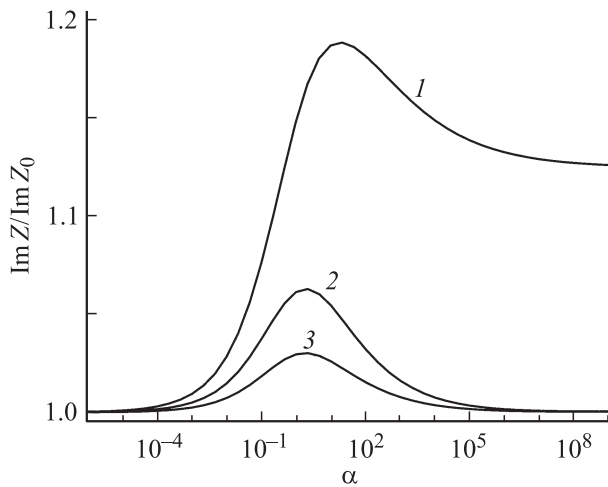


Рис. 4. Зависимость $\text{Im}Z/\text{Im}Z_0$ от параметра аномальности α при различных значениях коэффициента аккомодации. Кривые 1, 2, 3 отвечают коэффициентам 0, $1 - \cos \theta$, $1 - 0.5 \cos \theta$ соответственно.

нов на поверхность. Подобное рассмотрение позволяет оценить общее влияние переменности величины $q(\theta)$ на импеданс, не связывая это рассмотрение с конкретной динамикой рассеяния электронов на поверхности. Для этого в общем представлении функции $q(\theta)$ в виде ряда (4) оставим два первых члена: $q(\theta) = 1 - a_1 \cos \theta$.

При таком подходе величина a_1 является свободным параметром, характеризующим рассеяния электронов на поверхности металла.

Рассмотрим, как меняется импеданс при изменении коэффициента аномальности α при различных значениях величины a_1 . На рис. 3 и 4 приведена зависимость $\text{Re}Z/\text{Re}Z_0$ и $\text{Im}Z/\text{Im}Z_0$ от коэффициента аномальности α . Случай $q = 0$ (кривые 1 на рис. 3 и 4) —

это случай полностью диффузного рассеяния электронов на границе. Кривые 2 и 3 отвечают коэффициентам зеркальности $q(\theta) = 1 - \cos \theta$ и $q(\theta) = 1 - 0.5 \cos \theta$, т.е. значениям $a_1 = 1$ и $a = 0.5$.

Все кривые на рис. 3 и 4 имеют максимум (при различных значениях параметра аномальности $\alpha_{\text{max}} = \alpha_{\text{max}}(q)$), причем наибольшее значение импеданса достигается в случае, когда все электроны рассеиваются диффузно на границе металла. В этом случае оба отношения $\text{Re}Z/\text{Re}Z_0$ и $\text{Im}Z/\text{Im}Z_0$ выходят на свою асимптотику при $\alpha \rightarrow \infty$. Этот случай отмечается в [16]. Учет зависимости коэффициента зеркальности от угла падения электронов приводит к тому, что в случае предельно аномального скин-эффекта величина импеданса стремится к значению, равному соответствующему значению для случая зеркального рассеяния электронов. Таким образом, $Z/Z_0 \rightarrow 1$, $\alpha \rightarrow \infty$. Это обстоятельство отмечалось ранее в [3].

Анализ графиков показывает, что величины импеданса при каждом значении параметра аномальности существенно зависят от коэффициента зеркальности. При этом чем меньше q , тем больше значение импеданса, и чем больше q , тем меньше значение импеданса. Это и понятно, ибо случай $q = 0$ отвечает диффузным граничным условиям, а случай $q = 1$ — зеркальным.

Итак, в данной работе разработан эффективный метод решения граничных задач кинетической теории, основанный на симметричном продолжении электрического поля и функции распределения электронов.

Предлагаемый метод во втором приближении дает ошибку менее 1%, а в третьем — менее 0.38%. Третье приближение фактически совпадает с точным решением, когда параметр аномальности меняется в широком диапазоне: $0 < \alpha < 100$. Метод позволяет построить точное решение в виде ряда, т.е. является регулярированным. Повышая степень полинома Z^n , можно строить решение с любой наперед заданной точностью.

Список литературы

- [1] *Latyshev A.V., Yushkanov A.A.* // Phys. Met. Metallogr. 2008. Vol. 105. N 3. P. 236–244.
- [2] *Займан Дж.* Электроны и фононы. М.: Мир, 1962. 488 с.
- [3] *Андреев А.Ф.* // УФН. 1971. Т. 105. Вып. 1. С. 113–124.
- [4] *Абрикосов А.А.* Основы теории металла. М.: Наука, 1977. 520 с.
- [5] *Платцман Ф., Вольф П.* Волны и взаимодействия в плазме твердых тел. М.: Мир, 1975. 436 с.
- [6] *Reuter G.E.H., Sondheimer E.H.* // Proc. Roy. Soc. A. 1948. Vol. 195. P. 336–352.
- [7] *Kliewer K.L., Fuchs R.* // Phys. Rev. 1968. Vol. 172. N 3. P. 607–624.
- [8] *Hartmann L.E., Luttinger J.M.* // Phys. Rev. 1966. Vol. 151. N 2. P. 430–433.
- [9] *Мирошниченко В.И., Остроушко В.Н.* Электромагнитные явления. 2001. Т. 2. № 3(7). С. 324–330.
- [10] *Латышев А.В., Юшканов А.А.* // ЖВММФ. 1999. Т. 39. № 6. С. 989–1005.

- [11] *Завитаев Э.В., Юшканов А.А.* // ЖВММФ. 2006. Т. 130. Вып. 5. С. 887–894.
- [12] *Chambers R.G.* // Proc. Roy. Soc. A. 1950. Vol. 202. P. 378–394.
- [13] *Гинзбург В., Мотулевич Г.П.* // УФН. 1955. Т. 55. Вып. 4. С. 469–535.
- [14] *Esquivel R., Svetovoy V.B.*
<ArXiv:physics/quant-ph/0404073>.
- [15] *Latyshov A.V., Yushmanov A.A.* // Comp. Math. Math. Phys. Vol. 49. N 1. P. 131–145.
- [16] *Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П.* Физическая кинетика. М.: Наука, 1979. 528 с.