

01;03

О развитии неустойчивости Рэлея—Тейлора в тонком слое магнитной жидкости при наличии ортогонального магнитного поля

© В.М. Коровин

Научно-исследовательский институт механики Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова, 119192 Москва, Россия
e-mail: 1111@imec.msu.ru

(Поступило в Редакцию 11 декабря 2009 г.)

Рассматривается находящийся в вертикальном магнитном поле тонкий слой ньютоновской магнитной жидкости, смачивающей обращенную вниз поверхность горизонтальной намагничивающейся пластины. Нижней границей слоя является поверхность раздела с покоящимся газом. В линейной постановке на базе длинноволнового приближения уравнений феррогидродинамики изучено влияние магнитных сил на развитие рэлей-тейлоровской неустойчивости.

Введение

Известно, что горизонтальный слой, покоящейся магнитной жидкости, первоначально имеющий плоскую свободную поверхность, под действием достаточно сильного вертикального магнитного поля, создаваемого внешним устройством, переходит в новое стационарное состояние, отличающееся от исходного наличием периодического рельефа свободной поверхности. Такой переход происходит в том случае, когда воздействие объемных и поверхностных магнитных сил превышает стабилизирующее воздействие силы тяжести и капиллярных сил. Если локальная намагниченность исходного жидкого слоя с плоскими границами, создаваемая приложенным магнитным полем, меньше некоторой критической величины, определяемой физическими характеристиками используемой жидкости, то свободная поверхность остается плоской. Исследованию этого явления — неустойчивости Розенцвейга — посвящено большое число экспериментальных и теоретических работ — см., например, библиографию в [1,2].

В первых экспериментах использовался толстый слой магнитной жидкости, находящейся в цилиндрической ненамагничивающейся кювете достаточно большого диаметра. При увеличении напряженности поля наблюдался переход от плоской свободной поверхности к периодическому рельефу из гексагональных ячеек, образованных острыми жидкими пиками [3,4]. Каждая ячейка состоит из центрального пика, окруженного шестью симметрично расположенными пиками. Расстояние между соседними пиками, как показало сравнение теоретических и экспериментальных результатов, с хорошей точностью рассчитывается в рамках линейной теории устойчивости [3]. После образования гексагональных ячеек при быстром увеличении напряженности поля до существенно большей величины в центральной части кюветы наблюдался переход от гексагональных ячеек к квадратным [3,5]. При уменьшении напряженности поля восстанавливалась гексагональная структура ячеек.

Эксперименты показали, что плоский слой магнитной жидкости, толщина которого не превышает капиллярной

длины, соответствующей физическим характеристикам рассматриваемой жидкости, под действием сильного магнитного поля распадается на капли с острыми вершинами, располагающиеся на подложке в виде периодических гексагональных ячеек [6,7].

Образование жидкой структуры из гексагональных ячеек вследствие развития неустойчивости Розенцвейга наблюдалось в экспериментах с тонкой дискообразной пленкой, сформированной в отсутствие магнитного поля при осесимметричном растекании капли магнитной жидкости, помещенной на горизонтальную подложку, предварительно смоченную жидкостью — носителем, использовавшейся при синтезе магнитной жидкости [2].

Периодические структуры из остроконечных капель представляют интерес при создании сильных электрических полей в устройствах инжекции заряженных частиц [8].

В отличие от имеющихся публикаций в настоящей работе исследовано влияние вертикального магнитного поля на развитие рэлей-тейлоровской неустойчивости тонкого слоя магнитной жидкости, смачивающей нижнюю поверхность горизонтальной пластины. Из экспериментов с немагнитной жидкостью известно, что на финальной стадии развития неустойчивости такой конфигурации в некотором диапазоне определяющих параметров происходит переход к стационарным жидким структурам различной симметрии, в том числе и к гексагональным ячейкам из висячих капель [9]. Поскольку рэлей-тейлоровская неустойчивость имеет беспороговый характер, то эффект воздействия магнитных сил проявляется при любой величине напряженности магнитного поля.

Определяющие уравнения

Рассматривается развитие рэлей-тейлоровской неустойчивости в слое ньютоновской магнитной жидкости, находящемся в ортогональном магнитном поле, создаваемом внешними источниками. Сверху слой граничит с намагничивающейся горизонтальной пластиной,

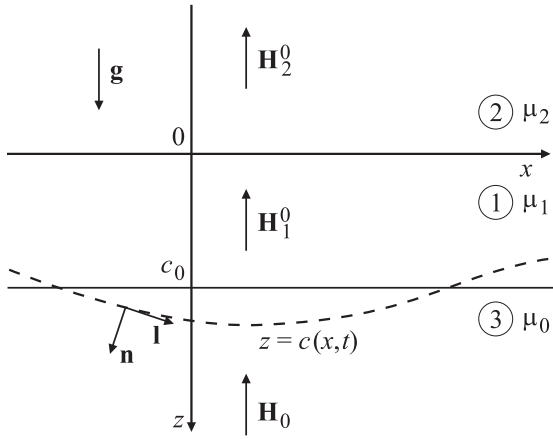


Рис. 1. Обозначения в задаче о рэлея-тейлоровской неустойчивости слоя магнитной жидкости.

а снизу — с покоящимся газом — рис. 1. Выберем декартову ортогональную систему координат x, y, z с базисом $\mathbf{a}_x, \mathbf{a}_y, \mathbf{a}_z$, ось x которой лежит в плоскости верхней границы жидкого слоя, ось y перпендикулярна плоскости рисунка, а ось z направлена вертикально вниз. Пусть уравнение $z = c(x, y, z)$, где t — время, описывает форму свободной поверхности жидкости.

Наряду с базисом $\mathbf{a}_x, \mathbf{a}_y, \mathbf{a}_z$ в каждой точке свободной поверхности введем неортогональный триэдр $\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{n}$, где \mathbf{l}, \mathbf{m} — единичные векторы, лежащие в касательной плоскости, проходящей через рассматриваемую точку свободной поверхности, а \mathbf{n} — внешняя нормаль:

$$\mathbf{l} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial c}{\partial x}\right)^2}} \left(\mathbf{a}_x + \frac{\partial c}{\partial x} \mathbf{a}_z \right),$$

$$\mathbf{m} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial c}{\partial y}\right)^2}} \left(\mathbf{a}_y + \frac{\partial c}{\partial y} \mathbf{a}_z \right),$$

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial c}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial c}{\partial y}\right)^2}} \left(-\frac{\partial c}{\partial x} \mathbf{a}_x - \frac{\partial c}{\partial y} \mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z \right).$$

Будем отмечать индексами $j = 1, 2, 3$ магнитное поле \mathbf{H}_j и векторы магнитной индукции

$$\mathbf{B}_1 = \mu_0(\mathbf{H}_1 + \mathbf{M}_1), \quad \mathbf{B}_2 = \mu_0(\mathbf{H}_2 + \mathbf{M}_2), \quad \mathbf{B}_3 = \mu_0\mathbf{H}_3 \quad (1)$$

соответственно в областях, занятых жидкостью ($j = 1$), пластиной ($j = 2$) и газом ($j = 3$). Здесь и далее $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Н/м — магнитная постоянная, а $\mathbf{M}_j = \chi_j \mathbf{H}_j$ ($j = 1, 2$) — векторы намагниченности жидкости и пластины. Предполагается, что магнитная восприимчивость жидкости χ_1 и материала пластины χ_2 не зависит от напряженности магнитного поля.

Распределение магнитного поля описывается уравнениями магнитостатики

$$\text{rot } \mathbf{H}_j = 0, \quad \text{div } \mathbf{B}_j = 0, \quad j = 1, 2, 3. \quad (2)$$

Граничные условия на поверхностях раздела сред, обладающих различными магнитными свойствами, имеют следующий вид.

$$\text{При } z = c(x, y, t) : (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_3) \times \mathbf{n} = 0, \quad (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_3)\mathbf{n} = 0. \quad (3)$$

$$\text{При } z = 0 : H_{1x} = H_{3x}, \quad H_{1y} = H_{3y}, \quad B_{1z} = B_{3z}.$$

В области, заполненной газом, вдали от жидкого слоя магнитное поле однородно и направлено вертикально.

$$\text{При } z \rightarrow \infty : H_{3x} \rightarrow 0, \quad H_{3y} \rightarrow 0, \quad H_{3z} \rightarrow -H_0. \quad (4)$$

Рассматривается случай толстой пластины. Ввиду этого асимптотическое условие для магнитного поля внутри пластины на большом удалении от магнитной жидкости имеет вид

$$H_{2x} \rightarrow 0, \quad H_{2y} \rightarrow 0, \quad H_{2z} \rightarrow \text{const}. \quad (5)$$

В приближении феррогидродинамики плотность объемной магнитной силы определяется выражением

$$\mathbf{f}_m = \mu_0 M_1 \nabla H_1, \quad \nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{a}_y + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{a}_z.$$

Движение магнитной жидкости описывается уравнением неразрывности и уравнениями Навье–Стокса:

$$\text{div } \mathbf{V} = 0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \nabla) \mathbf{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{V} + \frac{1}{\rho} \mathbf{f}_m + \mathbf{g}, \quad (7)$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Здесь $\mathbf{V} = (u, v, w)$ — вектор скорости, p — давление, ρ, ν — плотность и коэффициент кинематической вязкости жидкости, а $\mathbf{g} = (0, 0, g)$ — вектор ускорения свободного падения.

На свободной поверхности жидкости $z = c(x, y, t)$ должны выполняться кинематическое и динамические условия

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} + v \frac{\partial c}{\partial y} = w, \quad (8)$$

$$\mathbf{p}_{-n} \mathbf{n} = p_a + \alpha \text{div } \mathbf{n} - \frac{\mu_0}{2} (\mathbf{M}_1 \mathbf{n})^2, \quad (9)$$

$$\mathbf{p}_{-n} \mathbf{l} = 0, \quad \mathbf{p}_{-n} \mathbf{m} = 0, \quad (10)$$

где \mathbf{p}_{-n} — вектор напряжений в жидкости на площадке с нормалью $-\mathbf{n}$, p_a — давление в газе, а α — коэффициент поверхностного натяжения. Компоненты вектора \mathbf{p}_{-n} выражаются через компоненты тензора внутренних напряжений для несжимаемой ньютоновской жидкости и компоненты вектора $-\mathbf{n}$ [10]. Последнее слагаемое в правой части равенства (9) представляет магнитный скачок давления при переходе через свободную поверхность магнитной жидкости [7].

На поверхности пластины ставятся условия непроницаемости и прилипания.

$$\text{При } z = 0: \quad u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0. \quad (11)$$

Задача (2)–(11) имеет точное решение, описывающее реализованное в начальный момент времени гидростатическое состояние жидкости с плоской свободной поверхностью

$$\begin{aligned} c &= c_0 = \text{const}, \quad \mathbf{H}_j^0 = \left(0, 0, -\frac{\mu_0}{\mu_j} H_0 \right), \\ \mathbf{H}_3^0 &= (0, 0, -H_0), \\ u &= 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \\ p_0 &= p_a - \frac{\mu_0}{2} (M_{1z}^0)^2 + \rho g(z - c_0), \\ \mathbf{M}_j^0 &= \left(0, 0, -\frac{\mu_0 \chi_j}{\mu_j} H_0 \right), \quad j = 1, 2, \end{aligned} \quad (12)$$

где $\mu_j = \mu_0(1 + \chi_j)$ — магнитная проницаемость жидкости ($j = 1$) и материала пластины ($j = 2$).

Асимптотический анализ уравнений в случае тонкого слоя магнитной жидкости

В процессе развития рэлей-тейлоровской неустойчивости изменение формы свободной поверхности магнитной жидкости, вызываемое силой тяжести, влечет за собой возмущение приложенного однородного магнитного поля. Положим

$$\mathbf{H}_j = \mathbf{H}_j^0 + \mathbf{h}_j, \quad j = 1, 2, 3;$$

$$\mathbf{M}_i = \mathbf{M}_i^0 + \chi_i \mathbf{h}_i, \quad i = 1, 2.$$

В рассматриваемом случае однородных линейно намагничивающихся сред после подстановки этих выражений в систему уравнений (1), (2) получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_{jz}}{\partial y} - \frac{\partial h_{jy}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial h_{jx}}{\partial z} - \frac{\partial h_{jz}}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial h_{jy}}{\partial x} - \frac{\partial h_{jx}}{\partial y} = 0, \quad j = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\frac{\partial h_{jx}}{\partial x} + \frac{\partial h_{jy}}{\partial y} + \frac{\partial h_{jz}}{\partial z} = 0, \quad j = 1, 2, 3. \quad (14)$$

Пусть L — характерный размер области на плоскости x, y , в пределах которой толщина слоя претерпевает изменение порядка c_0 . Будем рассматривать режим течения, когда $\varepsilon = 2\pi c_0/L \ll 1$. В отсутствие магнитного поля это условие, как показывают эксперименты, реализуется в случае тонкого слоя, средняя толщина которого много меньше капиллярной постоянной рассматриваемой жидкости [9].

Оценим порядок величин в уравнениях и граничных условиях гидродинамики, а также в уравнениях (13), (14), относящихся к области, занятой магнитной жидкости ($j = 1$). С этой целью введем безразмерные переменные (со звездочками):

$$\begin{aligned} x_* &= \frac{\varepsilon x}{c_0}, \quad y_* = \frac{\varepsilon y}{c_0}, \quad z_* = \frac{z}{c_0}, \\ t_* &= \frac{\varepsilon u_0}{c_0} t, \quad c_*(x_*, y_*, t_*) = \frac{c}{c_0}, \\ u_*(x_*, y_*, z_*, t_*) &= \frac{u}{u_0}, \quad v_*(x_*, y_*, z_*, t_*) = \frac{v}{u_0}, \\ w_*(x_*, y_*, z_*, t_*) &= \frac{w}{\varepsilon u_0}, \quad p_*(x_*, y_*, z_*, t_*) = \frac{\varepsilon c_0}{\eta u_0} p, \\ h_{1x}^*(x_*, y_*, z_*, t_*) &= \frac{\varepsilon h_{1x}}{h_0}, \quad h_{1y}^*(x_*, y_*, z_*, t_*) = \frac{\varepsilon h_{1y}}{h_0}, \\ h_{1z}^*(x_*, y_*, z_*, t_*) &= \frac{h_{1z}}{h_0}, \end{aligned} \quad (15)$$

где u_0 — характерная скорость, $\eta = \rho\nu$ — коэффициент динамической вязкости жидкости, h_0 — характерное возмущение напряженности магнитного поля в жидкости.

При развитии неустойчивости в тонком жидком слое вплоть до образования висячих капель его толщина $c(x, y, t)$ в каждый момент времени за счет сглаживающего действия капиллярных сил достаточно плавно изменяется по x, y . Ввиду этого первоначально параллельные магнитные силовые линии остаются внутри тонкого слоя локально параллельными, вследствие чего $\gamma = h_0/|H_{1z}^0| \ll 1$.

После перехода к безразмерным переменным (15) в уравнениях движения (7) и в относящемся к жидкому слою уравнении магнитостатики (14) получаем (далее звездочки опущены):

$$\begin{aligned} \varepsilon \text{Re}' \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ = -\frac{\partial p}{\partial x} + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\ + \varepsilon \gamma S \left[\frac{\partial h_{1z}}{\partial x} (\gamma h_{1z} - 1) + \varepsilon^2 \gamma \left(h_{1x} \frac{\partial h_{1x}}{\partial x} + h_{1y} \frac{\partial h_{1y}}{\partial x} \right) \right], \\ \varepsilon \text{Re}' \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ = -\frac{\partial p}{\partial y} + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \\ + \varepsilon \gamma S \left[\frac{\partial h_{1z}}{\partial y} (\gamma h_{1z} - 1) + \varepsilon^2 \gamma \left(h_{1x} \frac{\partial h_{1x}}{\partial y} + h_{1y} \frac{\partial h_{1y}}{\partial y} \right) \right], \\ \varepsilon^3 \text{Re}'' \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\ = -\frac{\partial p}{\partial z} + \varepsilon^4 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \varepsilon \gamma S \left[\frac{\partial h_{1z}}{\partial z} \right. \\ \left. \times (\gamma h_{1z} - 1) + \varepsilon^2 \gamma \left(h_{1x} \frac{\partial h_{1x}}{\partial z} + h_{1y} \frac{\partial h_{1y}}{\partial z} \right) \right] + \varepsilon G, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\varepsilon^2 \left(\frac{\partial h_{1x}}{\partial x} + \frac{\partial h_{1y}}{\partial y} \right) + \frac{\partial h_{1z}}{\partial z} = 0.$$

Здесь

$$\text{Re}' = \frac{\rho u_0 c_0}{\eta}$$

— число Рейнольдса,

$$\text{G} = \frac{\rho g c_0^2}{\eta u_0}$$

— гравитационное число, а

$$S = \frac{\mu_0 c_0}{\eta u_0} \chi_1 |H_{1z}^0|^2$$

— характерное отношение магнитных сил к силам вязкости.

В безразмерных переменных динамическое условие (9), выражающее баланс нормальных сил, приложенных к противоположным сторонам свободной поверхности жидкости, в развернутом виде записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} & \left\{ 1 + \varepsilon^2 \left[\left(\frac{\partial c}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial c}{\partial y} \right)^2 \right] \right\} (p - p_a) \\ &= 2\varepsilon^2 \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} \left[\varepsilon^2 \left(\frac{\partial c}{\partial x} \right)^2 - 1 \right] + \frac{\partial v}{\partial y} \left[\varepsilon^2 \left(\frac{\partial c}{\partial y} \right)^2 - 1 \right] \right. \\ & \quad \left. - \frac{\partial c}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \varepsilon^2 \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \frac{\partial c}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \varepsilon^2 \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right. \\ & \quad \left. + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right\} - \frac{\varepsilon^3}{\text{Ca} \sqrt{1 + \varepsilon^2 \left[\left(\frac{\partial c}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial c}{\partial y} \right)^2 \right]}} \\ & \quad \times \left\{ \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \left[1 + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial c}{\partial y} \right)^2 \right] - 2\varepsilon^2 \frac{\partial c}{\partial x} \frac{\partial c}{\partial y} \frac{\partial^2 c}{\partial x \partial y} \right. \\ & \quad \left. + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} \left[1 + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial c}{\partial x} \right)^2 \right] \right\} - \frac{\varepsilon}{2} \chi_1 S \\ & \quad \times \left\{ \gamma \left[h_{1z} - \varepsilon^2 \left(\frac{\partial c}{\partial x} h_{1x} + \frac{\partial c}{\partial y} h_{1y} \right) \right] - 1 \right\}^2, \quad (17) \end{aligned}$$

где

$$\text{Ca} = \frac{\eta}{u_0} \alpha$$

— капиллярное число.

Условия отсутствия касательных напряжений на поверхности жидкости (10) принимают вид:

$$\begin{aligned} & \left[\varepsilon^2 \left(\frac{\partial c}{\partial x} \right)^2 - 1 \right] \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \varepsilon^2 \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \varepsilon^2 \left[2 \frac{\partial c}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right. \\ & \quad \left. + \frac{\partial c}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial c}{\partial x} \frac{\partial c}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \varepsilon^2 \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] = 0, \quad (18) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left[\varepsilon^2 \left(\frac{\partial c}{\partial y} \right)^2 - 1 \right] \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \varepsilon^2 \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \varepsilon^2 \left[\frac{\partial c}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right. \\ & \quad \left. + 2 \frac{\partial c}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{\partial c}{\partial x} \frac{\partial c}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \varepsilon^2 \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] = 0. \end{aligned}$$

Как и в работе [11], далее рассматривается случай $\text{Re} \approx 1$, $\text{Ca} \approx \varepsilon^3$, $\text{G} \approx \varepsilon^{-1}$ и предполагается $S \approx (\varepsilon\gamma)^{-1}$. Пренебрегая в (16)–(18) величинами порядков ε , γ и выше, получаем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial x} (p + \varepsilon\gamma S h_{1z}),$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial y} (p + \varepsilon\gamma S h_{1z}), \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \varepsilon\text{G}, \quad (19)$$

$$\frac{\partial h_{1z}}{\partial z} = 0. \quad (20)$$

При $z = c(x, y, t)$: $p - p_a = -\frac{\varepsilon^3}{\text{Ca}} \left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} \right) - \varepsilon\chi_1 S \left(\frac{1}{2} - \gamma h_{1z} \right).$ (21)

При $z = c(x, y, t)$: $\frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = 0.$ (22)

Аналогичные оценки показывают, что в уравнении неразрывности (6), в кинематическом условии на свободной поверхности (8) и в каждом из уравнений магнитостатики (13), относящихся к жидкому слою, все члены одинаковы по порядку величины.

В размерах переменных проекции на оси координат упрощенного уравнения движения (19) и скачок давления при переходе через свободную поверхность (21) записываются следующим образом:

$$\eta \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial x} (p - \mu_0 M_{1z}^0 h_{1z}),$$

$$\eta \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial y} (p - \mu_0 M_{1z}^0 h_{1z}), \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \rho g. \quad (23)$$

При $z = c(x, y, t)$: $p - p_a = -\alpha\Delta c$

$$- \mu_0 M_{1z}^0 \left(\frac{1}{2} M_{1z}^0 + \chi_1 h_{1z} \right). \quad (24)$$

Безразмерный и размерный вид как уравнения магнитостатики (20), так и граничных условий (22), очевидно, одинаков.

Таким образом, в рассматриваемом приближении влияние горизонтальных компонент возмущения магнитного поля h_{1x}, h_{1y} на динамику жидкости пренебрежимо мало, а вертикальная компонента h_{1z} не изменяется поперек жидкого слоя.

Постановка задачи

Легко видеть, что система уравнений (23) с граничными условиями (11), (24) легко интегрируется. В результате получаем

$$p - p_a - \frac{\mu_0}{2}(M_{1z}^0)^2 + \rho g(z - c) - \alpha \Delta c - \mu_0 \chi_1 M_{1z}^0 h_{1z}, \quad (25)$$

$$u = \frac{z}{2\eta}(z - 2c) \left(\frac{\partial p}{\partial x} - \mu_0 M_{1z}^0 h_{1z} \right),$$

$$v = \frac{z}{2\eta}(z - 2c) \left(\frac{\partial p}{\partial y} - \mu_0 M_{1z}^0 h_{1z} \right). \quad (26)$$

Далее из уравнения неразрывности (6) находим распределение вертикальной компоненты скорости, удовлетворяющее условию непроницаемости (11):

$$w = - \int_0^z \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dz. \quad (27)$$

С учетом (27) кинематическое условие на свободной поверхности жидкости (8) приводится к виду

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{c(x,y,t)} u dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_0^{c(x,y,t)} v dz = 0.$$

Принимая во внимание выражения (26), после интегрирования получаем эволюционное уравнение

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{3\eta} \operatorname{div} \left\{ c^3 \nabla \left[\rho g c - \mu_1 M_{1z}^0 h_{1z} \right]_{z=c(x,y,t)} + \alpha \Delta c \right\} = 0. \quad (28)$$

Обращаясь к задаче магнитостатики (2)–(5), введем потенциалы магнитных полей

$$\mathbf{H}_j = \nabla \Phi_j, \quad \Phi_j(x, y, z, t) = \Phi_j^0(z) + \varphi_j(x, y, z, t),$$

$$\mathbf{h}_j = \nabla \varphi_j, \quad j = 1, 2, 3, \quad (29)$$

$$\Phi_1^0 = H_0 \left[\frac{\mu_0}{\mu_1} (c_0 - z) - c_0 \right],$$

$$\Phi_2^0 = H_0 \left[\mu_0 \left(\frac{c_0}{\mu_1} - \frac{z}{\mu_2} \right) - c_0 \right], \quad \Phi_3^0 = -H_0 z.$$

В рассматриваемом приближении с учетом (20), (29) задача о расчете потенциалов возмущений магнитных полей формируется следующим образом:

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} = 0, \quad \Delta \varphi_i = 0, \quad j = 2, 3. \quad (30)$$

$$\text{При } z = c(x, y, t): \quad \varphi_1 - \varphi_3 = M_{1z}^0 (c - c_0),$$

$$\mu_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = \mu_0 \frac{\partial \varphi_3}{\partial z}. \quad (31)$$

$$\text{При } z = 0: \quad \varphi_1 = \varphi_2, \quad \mu_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = \mu_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial z}. \quad (32)$$

$$\text{При } z \rightarrow \infty: \quad \nabla \varphi_3 \rightarrow 0; \quad \text{при } z \rightarrow -\infty: \quad \nabla \varphi_2 \rightarrow 0. \quad (33)$$

Таким образом, эволюция формы первоначально плоской свободной поверхности тонкого жидкого слоя при наличии ортогонального магнитного поля описывается решением задачи (28), (30)–(33). После нахождения функций $c(x, y, t)$, $\varphi_j(x, y, z, t)$, $j = 1, 2, 3$ распределения давления и скорости определяются выражениями (25)–(27).

Ограничимся исследованием линейной стадии развития неустойчивости. Полагая $c(x, y, t) = c_0 + \xi(x, y, t)$, $|\xi|/c_0 \ll 1$, линеаризуем эволюционное уравнение (28):

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{c_0^3}{3\eta} \left[\rho g \Delta \xi - \mu_1 M_{1z}^0 \Delta \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \Big|_{z=c_0} \right) + \alpha \Delta \xi \right] = 0. \quad (34)$$

Граничные условия (31) ввиду малости $|\xi|$ допустимо перенести на невозмущенную свободную поверхность.

$$\text{При } z = c_0: \quad \varphi_1 - \varphi_3 = M_{1z}^0 \xi, \quad \mu_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = \mu_0 \frac{\partial \varphi_3}{\partial z}. \quad (35)$$

Далее рассматривается задача (30), (32)–(35).

Влияние магнитного поля на развитие рэлей-тейлоровской неустойчивости

С целью исследования поведения функций $\varphi_j(x, y, z, t)$, $\xi(x, y, t)$, $j = 1, 2, 3$ с ростом времени представим их в форме линейной суперпозиции нормальных мод — решений уравнений (30), (34), имеющих соответственно вид

$$F_j(z, k_x, k_y) \exp[i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)],$$

$$Z(k_x, k_y) \exp[i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)], \quad j = 1, 2, 3. \quad (36)$$

Здесь i — мнимая единица, $\mathbf{r} = (x, y, z)$ — радиус-вектор, $\mathbf{k} = (k_x, k_y, 0)$ — волновой вектор (действительный параметр), а функция $\omega(k_x, k_y)$ подлежит нахождению.

После подстановки выражений (36) в систему уравнений (30) и в граничные условия (32), (33), (35) получаем

$$\frac{d^2 F_1}{dz^2} = 0, \quad \frac{d^2 F_j}{dz^2} - (k_x^2 + k_y^2) F_j = 0, \quad j = 2, 3.$$

$$\text{При } z = 0: \quad F_1 = F_2, \quad \mu_1 \frac{dF_1}{dz} = \mu_2 \frac{dF_2}{dz}.$$

$$\text{При } z = c_0: \quad F_1 - F_3 = M_{1z}^0 Z, \quad \mu_1 \frac{dF_1}{dz} = \mu_0 \frac{dF_3}{dz}.$$

Исчезающее при $z \rightarrow \pm\infty$ решение этой задачи с точностью до малых порядков $\varepsilon = kc_0$ записывается следующим образом:

$$F_1 = \frac{1}{\mu_{r2} + 1} M_{1z}^0 Z \left(1 + \frac{\mu_{r2}}{\mu_{r1}} kz \right),$$

$$F_2 = M_{1z}^0 Z \frac{e^{kz}}{\mu_{r2} + 1}, \quad F_3 = -M_{1z}^0 Z \frac{\mu_{r2} e^{-kz}}{\mu_{r2} + 1}, \quad (37)$$

где $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ — волновое число, а $\mu_{rj} = \mu_j/\mu_0$ — относительные магнитные проницаемости жидкости ($j = 1$) и материала пластины ($j = 2$).

Принимая во внимание (37), после подстановки (36) в (34) заключаем, что зависящая от переменных x, y, t и параметров k_x, k_y функция $Z(k_x, k_y) \exp[i(\mathbf{kr} - \omega t)]$ является нетривиальным решением дифференциального уравнения в частных производных (34) только в том случае, когда ω и k связаны соотношением

$$\omega = i \frac{\alpha c_0}{3\eta} k^2 [\text{Bo} + \text{Jp} k c_0 - (k c_0)^2]. \quad (38)$$

Здесь $\text{Bo} = (c_0/l_c)^2$ — число Бонда, $l_c = \sqrt{\alpha/(\rho g)}$ — капиллярная длина, а $\text{Jp}(\mu_{r1}, \mu_{r2}, q)$ — безразмерная функция:

$$\text{Jp}(\mu_{r1}, \mu_{r2}, q) = \frac{q\mu_{r2}}{\mu_{r1}^2} \frac{(\mu_{r1} - 1)^2}{\mu_{r2} + 1}, \quad q = \frac{c_0\mu_0}{\alpha} H_0^2.$$

Следует отметить, что найденная функция (38) не зависит от направления волнового вектора, т.е. развитие рэлей-тейлоровской неустойчивости слоя магнитной жидкости, находящегося в ортогональном магнитном поле, происходит изотропно. Ввиду этого ограничимся исследованием развития нормальных мод с волновыми векторами, направленными, например, вдоль оси x , т.е. положим $\mathbf{k} = (k, 0, 0)$.

При использовании ненамагничивающейся пластины численное значение $\text{Jp}(\mu_{r1}, 1, q)$ равно величине безразмерного скачка давления $p_a - p_0$ при переходе через плоскую свободную поверхность $z = c_0$ магнитной жидкости, вызываемого поверхностными магнитными силами — второе слагаемое в правой части выражения (12) для p_0 . При фиксированной размерной величине этого скачка в случае пластины из магнитомягкого материала с большой магнитной проницаемостью ($\mu_{r2} \gg 1$) имеем

$$\text{Jp}\Big|_{\mu_{r2} \gg 1} = 2 \left(1 - \frac{1}{\mu_{r2}}\right) \text{Jp}\Big|_{\mu_{r2}=1}. \quad (39)$$

В качестве примера приведем оценочные величины $l_c = 1.7 \cdot 10^{-3}$ м, $\text{Bo} = 3 \cdot 10^{-3}$, $\text{Jp}\Big|_{\mu_{r2}=1} = 4 \cdot 10^{-2}$ для слоя магнитной жидкости с характерными значениями физических параметров: $\rho = 1.3 \cdot 10^3$ кг/м³, $\alpha = 3.5 \cdot 10^{-2}$ Н/м, $\mu_{r1} = 2.4$ при $c_0 = 10^{-4}$ м, $H_0 = 8.1$ кА/м.

При $k \neq 0$, за исключением случая, когда в дисперсионном соотношении (38) выражение в квадратных скобках обращается в нуль, значения функции $\omega(k, \text{Bo}, \text{Jp})$ являются чисто мнимыми. Вследствие этого нормальная мода с заданным волновым числом k в зависимости от численных значений параметров Bo, Jp либо экспоненциально растет по времени (при $\omega_i = \text{Im} \omega > 0$), либо экспоненциально затухает (при $\omega_i < 0$), либо является нейтрально устойчивой (при $\omega_i = 0$).

Обращаясь к (38), легко найти волновое число

$$k_s = 0.5 \left(\text{Jp} + \sqrt{\text{Jp}^2 + 4\text{Bo}} \right) / c_0$$

нейтрально устойчивой моды. При этом моды с волновыми числами $0 < k < k_s$ неустойчивы, а моды с $k > k_s$ — устойчивы. Таким образом, для одного и того же жидкого слоя при фиксированной напряженности приложенного магнитного поля с увеличением магнитной проницаемости материала пластины диапазон неустойчивых мод расширяется.

В безразмерных переменных дисперсионная зависимость (38) при различных значениях Bo, Jp представлена на рис. 2, 3. С учетом формулы (39) допустимо считать, что на рис. 2 кривая 2 относится к слою магнитной жидкости на ненамагничивающейся пластине, а кривая 3 — к тому же слою на пластине из материала с достаточно большой магнитной проницаемостью, причем приложенное магнитное поле в обоих случаях одно и то же.

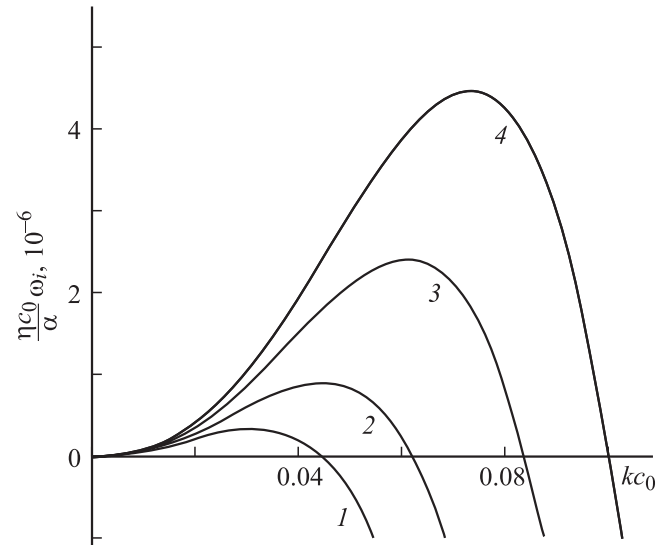


Рис. 2. Дисперсионные зависимости при числе Бонда $\text{Bo} = 2 \cdot 10^{-3}$ и различных величинах магнитного скачка давления Jp : 1 — 0; 2 — $3 \cdot 10^{-2}$; 3 — $6 \cdot 10^{-2}$; 4 — $8 \cdot 10^{-2}$.

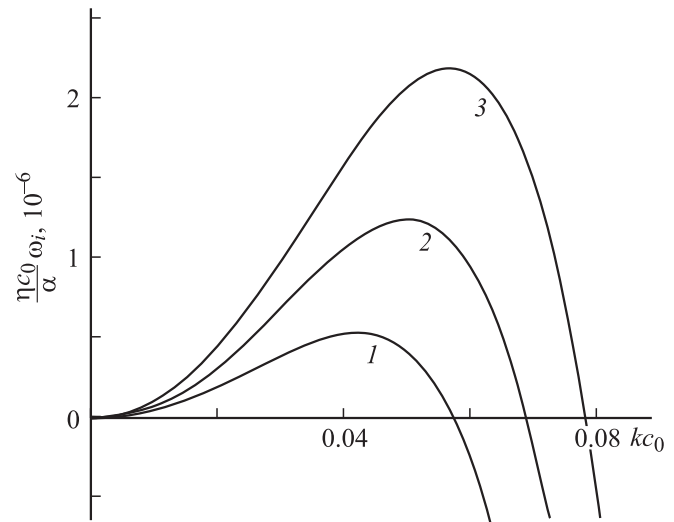


Рис. 3. Дисперсионные зависимости при $\text{Jp} = 4 \cdot 10^{-2}$ и различных числах Бонда Bo : 1 — 10^{-3} ; 2 — $2 \cdot 10^{-3}$; 3 — $3 \cdot 10^{-3}$.

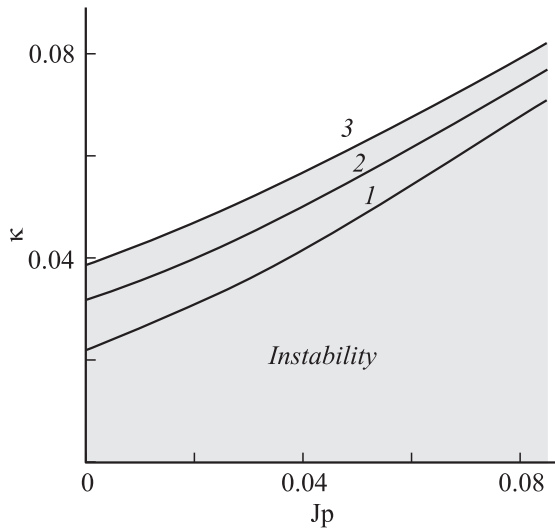


Рис. 4. Нейтральные кривые при различных числах Бонда Bo : 1 — 10^{-3} ; 2 — $2 \cdot 10^{-3}$; 3 — $3 \cdot 10^{-3}$.

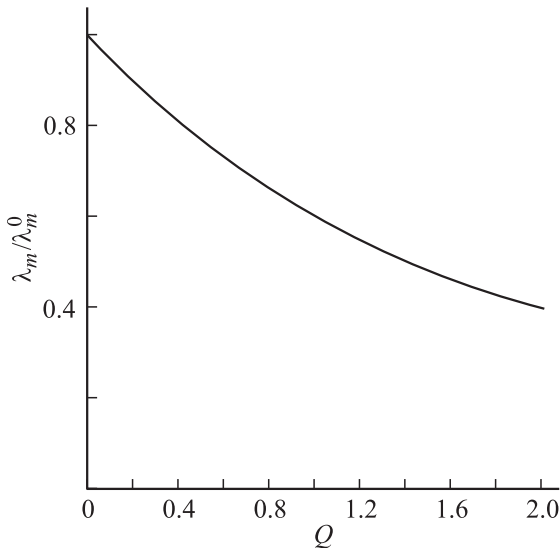


Рис. 5. Изменение длины волны наиболее быстро растущей моды с ростом напряженности магнитного поля.

На рис. 4 в плоскости параметров (k, Jr) , где $k = kc_0$ — безразмерное волновое число, при различных фиксированных значениях числа Бонда представлены нейтральные кривые $k_s c_0 = \kappa_s(Jr, Bo)$. Эти кривые являются границей между областью устойчивости $\{Jr \geq 0, k \geq \kappa_s\}$ и областью неустойчивости $\{Jr \geq 0, 0 < k < \kappa_s\}$. Из рисунка видно, что сравнительно несильные магнитные поля вызывают существенное увеличение диапазона неустойчивых мод, развитие которых приводит на финальной стадии формирования стационарной жидкой конфигурации к распаду сплошного слоя на отдельные периодически расположенные висячие капли. Отметим, что в отсутствие магнитного поля при $Bo \geq 4 \cdot 10^{-2}$ в экспериментах наблюдался отрыв и падение уединенных капель [9].

С использованием дисперсионного соотношения (38) легко найти длину волны моды, наиболее быстро растущей при заданных Bo, Jr . Эта мода определяется безразмерным волновым числом $\kappa_m = k_m c_0$, реализующим максимум соответствующей кривой на рис. 2, 3:

$$\lambda_m = \frac{2\pi}{k_m} = \frac{4\sqrt{2}\lambda_m^0}{3Q + \sqrt{9Q^2 + 32}},$$

$$Q = \frac{Jr}{\sqrt{Bo}} = \frac{\mu_0 \mu_{r2}}{\mu_{r1}^2 \sqrt{\rho g a}} \frac{(\mu_{r1} - 1)^2}{\mu_{r2} + 1} H_0^2, \quad (40)$$

где $\lambda_m^0 = 2\pi\sqrt{2}l_c$ — длина волны моды, наиболее быстро растущей в отсутствие магнитного поля. Из (40) следует, что с увеличением как напряженности приложенного магнитного поля, так и магнитных проницаемостей жидкости и материала пластины численное значение λ_m уменьшается. При этом, как видно из графиков на рис. 2, уменьшается и характерное время $\omega_i^{-1}(k_m)$ линейной стадии развития неустойчивости.

График зависимости нормированной величины λ_m/λ_m^0 от безразмерного параметра Q представлен на рис. 5, характеризующего напряженность магнитного поля.

Из экспериментов с немагнитными жидкостями известно [9], что характерное расстояние между вершинами соседних периодически расположенных висячих капель, образующихся на финальной стадии развития рэлей-тейлоровской неустойчивости тонкого слоя, с хорошей точностью равно λ_m^0 . Таким образом, при распаде тонкого слоя магнитной жидкости с увеличением напряженности магнитного поля расстояние между соседними каплями уменьшается.

Заключение

Применительно к слою ньютоновской линейно намагничивающейся жидкости, толщина которого мала по сравнению с капиллярной постоянной, проведен асимптотический анализ уравнений и граничных условий, описывающих развитие рэлей-тейлоровской неустойчивости при наличии вертикального магнитного поля, создаваемого внешними устройствами. Верхней границей слоя является поверхность горизонтальной намагничивающейся пластины. Снизу жидкий слой граничит с покоящимся газом.

В рамках длинноволнового приближения уравнений феррогидродинамики выведено нелинейное эволюционное уравнение, описывающее изменение с ростом времени формы первоначально плоской свободной поверхности тонкого жидкого слоя.

На базе линеаризованных эволюционного уравнения и задачи магнитостатики о расчете возмущений магнитных полей получено дисперсионное соотношение. Безразмерная форма записи дисперсионного соотношения содержит число Бонда и некоторую функцию $Jr(\mu_{r1}, \mu_{r2}, q)$, где μ_{r1}, μ_{r2} — относительные магнитные проницаемости жидкости и материала пластины, а q —

квадрат обезразмеренной напряженности приложенного магнитного поля. В случае ненамагничивающейся пластины численное значение $J_r(\mu_{r1}, 1, q)$ равно величине обезразмеренного скачка давления при переходе через плоскую свободную поверхность магнитной жидкости, вызываемого поверхностными магнитными силами.

Анализ дисперсионного соотношения показал, что легко реализуемые в лабораторных условиях магнитные поля существенно расширяют диапазон неустойчивых мод. Установлено, что с увеличением как напряженности приложенного магнитного поля, так и магнитных проницаемостей жидкости и материала пластины, за счет воздействия магнитных сил уменьшается длина волны наиболее быстро растущей моды. В результате уменьшается характерное расстояние между соседними висячими каплями, образующимися на финальной стадии развития рэлей-тейлоровской неустойчивости тонкого слоя магнитной жидкости.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 08-01-00026).

Список литературы

- [1] *Abou B., Wesfreid J.-E., Roux S.* // J. Fluid Mech. 2000. Vol. 416. P. 217–237.
- [2] *Chen Ch.-Yao, Cheng Z.-Y.* // Phys. Fluids. 2008. Vol. 20. N 5. P. 054 105/1–054 105/8.
- [3] *Cowley M.D., Rosensweig R.E.* // J. Fluid Mech. 1967. Vol. 30. N 4. P. 671–688.
- [4] *Розенцвейг Р.* Феррогидродинамика. М.: Мир, 1989. 357 с. [Rosenweig R.E. Ferrohydrodynamics. Cambridge: Cambridge University Press, 1985.]
- [5] *Boudouvis A.G., Puchalla J.L., Scriven L.E., Rosensweig R.E.* // JMMM. 1987. Vol. 65. P. 307–310.
- [6] *Баитовой В.Г., Краков М.С., Рекс А.Г.* // Магнитная гидродинамика. 1985. № 1. С. 19–24.
- [7] *Берковский Б.М., Медведев В.Ф., Краков М.С.* Магнитные жидкости. М.: Химия, 1989. 239 с.
- [8] *Zahn M.* // J. Nanopart. Res. 2001. Vol. 3. P. 73–78.
- [9] *Fermigier M., Limat L., Wesfreid J.E., Boudinet P., Quilliet C.* // J. Fluid Mech. 1992. Vol. 236. P. 349–383.
- [10] *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1983. 528 с.
- [11] *Oron A., Davis S.H., Bankoff S.G.* // Rev. Mod. Phys. 1997. Vol. 69. N 3. P. 931–980.