

Симметрия квазикристаллов

© А.Е. Мадисон

Государственная морская академия им. С.О. Макарова
Санкт-Петербург, Россия

E-mail: alex_madison@mail.ru

(Поступила в Редакцию 10 апреля 2012 г.

В окончательной редакции 3 сентября 2012 г.)

Определение аперриодического кристалла (квазикристалла) как твердого тела, характеризующегося запрещенной симметрией, свидетельствует о существовании нерешенной проблемы, поскольку взаимоисключающим образом апеллирует к основной теореме классической кристаллографии. Нами на примере разбиения Пенроуза исследуются свойства симметрии аперриодических разбиений с целью установления допустимых групп симметрии квазикристаллов. Заполнению евклидова пространства по аперриодическому закону ставится в соответствие действие бесконечного числа групповых элементов на некоторую фундаментальную область в неевклидовом пространстве. Делается вывод, что все локально эквивалентные разбиения имеют общую „родительскую“ структуру и, следовательно, одну и ту же группу симметрии. Вводится в рассмотрение идеализированный объект — бесконечно измельченное разбиение. Показано, что его операциями симметрии являются операции подобия (поворотной гомотетии). Дается положительный ответ на вопрос о возможности композиции операций подобия с различными особыми точками. Показано, что преобразования аперриодических кристаллов, сохраняющие ориентацию, изоморфны некоторой дискретной подгруппе группы Мёбиуса $PSL(2, \mathbb{C})$, т.е. могут быть реализованы как дискретные подгруппы полной группы движений пространства Лобачевского. Задача классификации допустимых типов аперриодических разбиений сводится к процедуре перечисления названных дискретных подгрупп.

1. Введение

Математическим аппаратом учения о симметрии является теория групп. Описание симметрии любого объекта, и квазикристалла в том числе, следует начинать с установления его группы симметрии.

Открытие квазикристаллов [1] первоначально было воспринято весьма прохладно, а самому автору открытия Шехтману, пришлось выдержать серьезную борьбу со скептиками, чтобы отстоять научную истину. Сам факт существования квазикристаллов в экстремальной степени противоречил фундаментальным основам кристаллографии. С трансляциями в кристаллах совместимы только оси второго, третьего, четвертого и шестого порядков. Оси пятого порядка запрещены. Это противоречие стимулировало создание и развитие новой научной дисциплины — квазикристаллографии [2–4], в рамках которой существует несколько способов описания структуры аперриодических кристаллов. Все они в большей или меньшей степени опираются на идеи кластерного подхода, построения аперриодических разбиений и технику проецирования из пространств высшей размерности на иррациональную гиперплоскость. Аперриодические разбиения (мозаики) могут быть получены в результате сборки базовых кластеров или ячеек нескольких типов. Базовые кластеры декорируются атомами по аналогии с тем, как декорируется элементарная ячейка в кристаллах. Дальний порядок получается в результате закономерного пристраивания новых кластеров к уже имеющимся по правилам локального соответствия. Альтернативный путь — подразби-

ение кластеров на субъединицы меньшего размера по правилам инфляции/дефляции.

Запрет на совместимость поворотов с трансляциями был снят, но возник следующий вопрос: существуют ли какие-либо ограничения взамен отвергнутых? И что же такое квазикристаллы? Согласно мнению Сенешаль, никто в настоящее время не может дать ответ на этот вопрос с полной убежденностью [5]. Краткое определение гласит, что это кристаллы с запрещенной симметрией, но существует множество примеров квазикристаллов, полученных всеми стандартными методами генерации аперриодических разбиений (при помощи правил локального соответствия, правил замены, правил инфляции/дефляции, метода проецирования и двойственной квазирешетки), в то же время обладающих кристаллографически допустимыми осями [6]. Таким образом, определение, апеллирующее к запрещенной симметрии, является некорректным. Новое определение квазикристаллов, принятое Комиссией по аперриодическим кристаллам Международного союза кристаллографов, гласит, что кристалл (и квазикристалл в том числе) — это любое твердое тело, обладающее существенно дискретной дифракционной диаграммой. Если при этом отсутствует трехмерная периодичность, то кристалл называется аперриодическим. Но какое именно свойство структуры однозначным образом связано с дискретностью дифракционной картины, а также в чем принципиальное отличие существенно дискретной картины от чуть менее существенной, пока неизвестно. Аргументация в пользу нового определения еще раз подтверждает существование нерешенной проблемы: новая

формулировка была принята с целью стимулирования исследований [5], однако представляется весьма спорным одно не вполне корректное определение заменять другим, в сущности своей столь же некорректным.

Многомерный подход (higher-dimensional approach, см., например, [4]) базируется на информации о распределении интенсивности в обратном пространстве, т.е. он применим непосредственно для описания экспериментальных дифракционных данных. Он основан на том, что с математической точки зрения построение аперидической функции может быть сведено к сумме гармонических функций с числом линейно независимых волновых векторов, большим, чем размерность реального пространства. Квазипериодические функции в d -мерном пространстве можно рассматривать как иррациональные сечения n -мерных периодических функций ($n > d$), где n определяет минимальную размерность пространства вложения, а d — размерность собственно квазикристалла. Структурный фактор квазикристалла в многомерном подходе рассчитывается на основе распределения гиператомов в элементарной ячейке n -мерной решетки. Метод позволил провести классификацию возможных точечных групп симметрии аксиальных квазикристаллов, установить размерность пространства вложения и соответствующие n -мерные пространственные группы для каждого случая [7].

Приведем достаточно пространную цитату из монографии [8]: „Проблема заключается в том, чтобы связать наблюдаемую дифракционную картину с нестандартной, возможно кристаллографически запрещенной, симметрией с распределением атомов, которые ее вызвали. И эта проблема остается. Потому что пока физик, живущий в мире, построенном из уравнений и теории групп, не встречает трудностей при конструировании Вселенной, ее законов масштабирования и сингулярностей наподобие черных дыр как реализации, скажем, 16-мерной группы, химик скован более узкими рамками. Трехмерный атом обладает некоей прозаичной реальностью, которая не так легко приспосабливается к отображению в шесть измерений“.

В рамках кластерного подхода [9] утверждается, что квазикристаллы являются агрегатами кластеров. Их структура не может быть представлена как упаковка идентичных элементарных ячеек. Они являют собой уникальный способ упаковки взаимно перекрывающихся кластеров, что позволяет реализовать наиболее стабильные, энергетически предпочтительные локальные атомные конфигурации. Причиной дальнего порядка и особых свойств являются существенно локализованные флуктуации, называемые фазонами. С другой стороны, сравним структуры квазикристаллов и их кристаллических аппроксимантов [10]. Две структуры в соответствующей паре (квазикристалл и его аппроксимант) практически неразличимы локально, и та и другая имеют строгий дальний порядок и дискретные дифрактограммы. Одна из структур (кристаллическая) характеризуется пространственной группой с бесконечным

числом элементов симметрии (дискретной подгруппой изометрий трехмерного евклидова пространства E^3). Трудно поверить, что вторая (аперидическая) обладает лишь точечной группой и насчитывает всего несколько десятков элементов симметрии. Возможно, мы попали в логическую ловушку самоограничения, и элементы симметрии аперидического кристалла не обязательно являются изометриями E^3 ?

Описание структуры новых материалов требует привлечения новых геометрических концепций [11]. В частности, „необычные“ структуры могут иметь идеализированные прототипы в неевклидовых пространствах [12]. По аналогии с тем, как бесконечный совершенный кристалл служит идеализацией реального кристалла, неевклидова „родительская“ структура может служить идеализацией необычного кластера с уникальной упаковкой. Часть высокосимметричной неевклидовой структуры вырезается, отображается на некоторую область пространства E^3 и подвергается релаксации. Единственное отличие состоит в том, что вся родительская структура как целое принципиально не может быть вложена в евклидово пространство.

По сути, наш подход базируется на идеях Клейна, изложенных в его лекции, известной как „Эрлангенская программа“ [13]. Он радикально расширил понятие симметрии, что позволило с единых позиций описывать объекты, вовсе не считавшиеся симметричными до этого. Он предложил рассматривать геометрию как науку о свойствах пространства, которое остается инвариантным под действием заданной группы преобразований. В классическом евклидовом смысле эти преобразования всегда являются жесткими движениями, а именно: следует взять фигуру и разместить ее копию на новом месте. Отображения, которые могут сжимать, растягивать и скручивать фигуры, согласно Клейну, также могут рассматриваться как движения. Клейном был также сформулирован принцип перенесения путем отображения, сущность которого заключается в установлении соответствия между элементами двух различных геометрий, благодаря чему мы можем выявить скрытую, не вполне очевидную симметрию первоначального объекта, изучая не сам объект в исходном пространстве, а движения его образа на другом многообразии под действием его автоморфизмов. В качестве примера Клейн приводит следующее утверждение: „элементарная геометрия плоскости и проективное исследование поверхности второго порядка с присоединением одной из ее точек — одно и то же“ [13]. Это означает, в частности, что изучение аперидического разбиения евклидовой плоскости мы вправе заменить проективным исследованием некоторого его образа на поверхности второго порядка (например, на сфере).

Предположим, что реальному конечному аперидическому кристаллу можно поставить в соответствие идеализированную бесконечную структуру в неевклидовом пространстве. Иными словами, будем искать абстрактное групповое многообразие, элементами симметрии

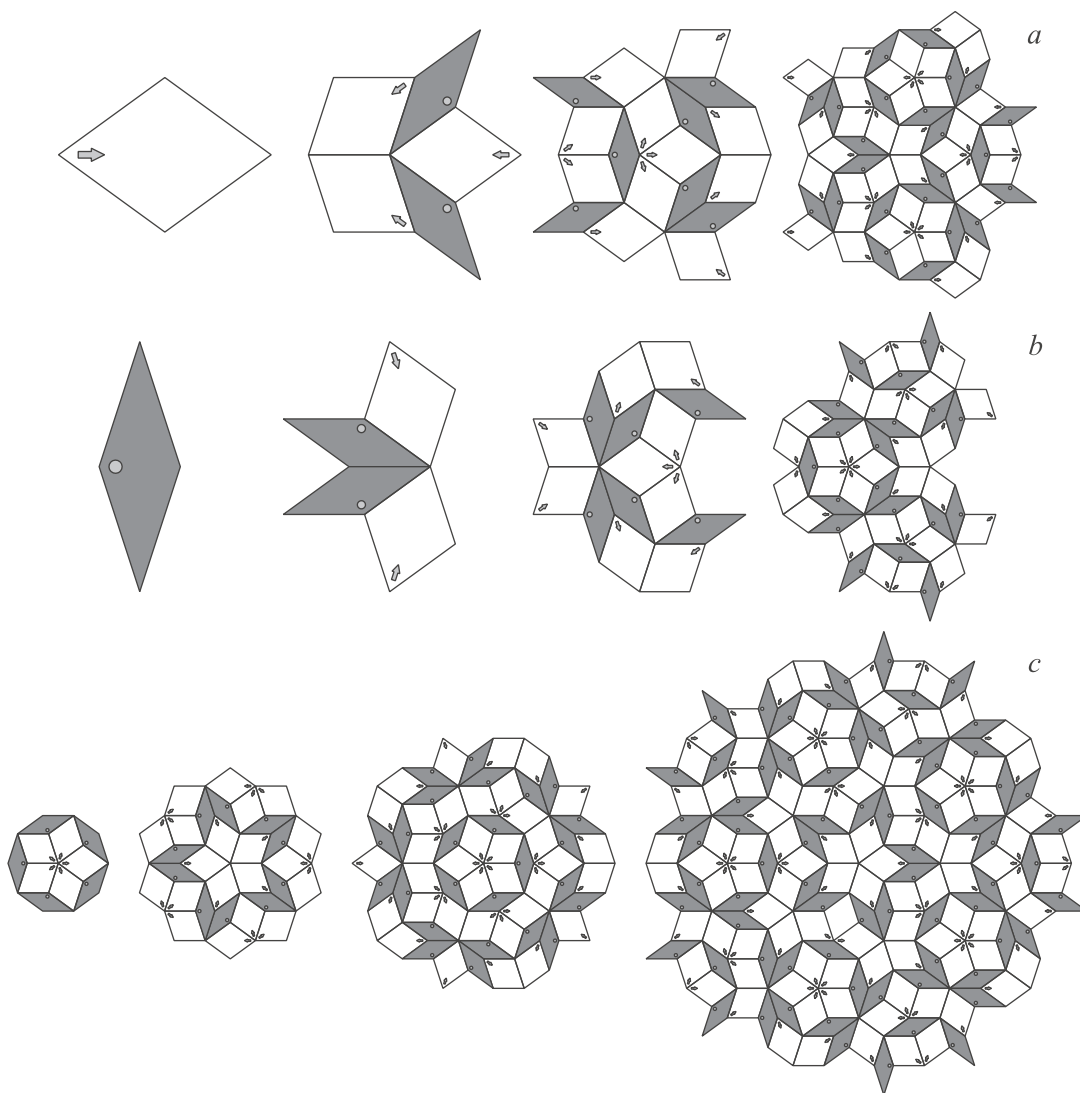


Рис. 1. Генерация разбиения Пенроуза с помощью правил инфляции/дефляции: применение правил дефляции к широкому (*a*) и узкому (*b*) ромбам, а также заполнение евклидовой плоскости путем применения правил инфляции/дефляции к фигуре, обладающей осью пятого порядка (*c*).

которого не обязательно являются изометрии пространства E^3 , порядок группы равен бесконечности, а заполнению всего пространства по аperiodическому закону соответствует обычное действие бесконечного числа групповых элементов на некоторую фундаментальную область. Если на этом пути мы будем вынуждены отказываться от общепринятых сегодня точек зрения, то соответствующие утверждения будут выделяться особо (см. далее утверждения 1–4).

2. Разбиение Пенроуза

Начнем с рассмотрения двумерного случая. Классическим примером двумерного аperiodического кристалла является разбиение Пенроуза. Трехмерный случай (икосаэдрических квазикристаллов) будет рассмотрен нами

подробно в отдельной работе. Тем не менее детальное рассмотрение неевклидовых движений разбиения Пенроуза позволит нам сделать основные принципиальные заключения о допустимой симметрии квазикристаллов вообще, а также предложить их общую классификацию по типу пространства представления, в котором реализуется неевклидова родительская структура — бесконечный идеальный квазикристалл.

Будем рассматривать разбиение Пенроуза, образованное широкими и узкими ромбами (разбиение $P3$). Угол в вершине широкого ромба равен $2\pi/5$, в вершине узкого — $2\pi/10$. Аperiodическое заполнение плоскости получим с помощью правил инфляции/дефляции. На рис. 1, *a, b* представлен результат применения четырех последовательных итераций дефляции к широкому и узкому ромбам соответственно. Ромбы уменьшаются в τ раз, где $\tau = (1 + \sqrt{5})/2$ — золотое сечение, после

чего производится замощение первоначальных областей уменьшенными копиями ромбов обоих типов в соответствии с указанными на рисунках правилами. Некоторые из уменьшенных копий частично выходят за пределы первоначальных областей. Выходящие части должны перекрываться с аналогичными фрагментами соседних областей, что обеспечивает однозначное выполнение правил локального соответствия. Операция инфляции позволяет однозначным образом заполнить сколь угодно большую область, в том числе и всю плоскость. Произвольная область разбиения Пенроуза увеличивается в τ раз, после чего увеличенные ромбы накрываются копиями ромбов прежних размеров по тому же алгоритму (рис. 1, *c*).

Обратим внимание на то, что только одна из двух диагоналей каждого ромба (как широкого, так и узкого) является его локальной плоскостью симметрии. В широком ромбе углы $3\pi/10$ локально симметричны относительно диагонали ромба, в то время как противоположные вершины, соответствующие острым углам $2\pi/5$, неэквивалентны. В узком ромбе углы $\pi/5$ локально симметричны относительно диагонали, а вершины, соответствующие тупым углам $4\pi/5$, неэквивалентны. Для удобства идентификации неэквивалентных вершин на рис. 1 они помечены различными символами.

Все разбиения, полученные из разных ромбов (или из разных начальных комбинаций ромбов) при помощи указанных правил инфляции/дефляции, принадлежат одному и тому же классу локальной эквивалентности [14,15] и, вообще говоря, могут быть получены из одного-единственного прообраза [16]. Два разбиения одного и того же класса локальной эквивалентности целиком не совпадают. В то же время если в одном из разбиений произвольным образом выделить некоторую область произвольно больших, но конечных размеров, то она всегда может быть найдена в любом из бесконечных разбиений, принадлежащих тому же классу.

На евклидовой плоскости существуют ровно два несовпадающих локально эквивалентных разбиения Пенроуза, обладающих осью пятого порядка. Назовем их *P3a* (центр разбиения образуют искаженные проекции кубов из двух широких и одного узкого ромба) и *P3b* (центр разбиения образуют вытянутые проекции кубов из одного широкого и двух узких ромбов). Если поместить ось пятого порядка в одну из неэквивалентных вершин широкого ромба и многократно применять к полученной фигуре операции инфляции/дефляции, то оба разбиения будут поочередно получаться друг из друга (рис. 1, *c*). Применяя операции инфляции/дефляции к некоторой части разбиения *P3a* четное число раз, будем получать увеличенную область того же разбиения. При нечетном числе операций инфляции/дефляции из разбиения *P3a* будет генерироваться разбиение *P3b*, и наоборот. Обычно предполагается, что разбиения, соответствующие одному и тому же классу локальной эквивалентности, принципиально различны. Далее показано, что все они имеют одну общую родительскую

структуру. Это утверждение означает, что все локально эквивалентные разбиения, не совмещающиеся друг с другом при жестких движениях евклидовой плоскости, суть тождественны, они лишь по-разному вырезанные фрагменты одного и того же теоретико-группового объекта.

Утверждение 1. Все разбиения, принадлежащие одному и тому же классу локальной эквивалентности, имеют одну и ту же группу симметрии.

Фундаментальные свойства разбиения Пенроуза будем рассматривать в предположении, что операции инфляции/дефляции применены бесконечное число раз. Разбиение, во-первых, занимает всю плоскость, а во-вторых, измельчение также проведено до бесконечности. При таком измельчении в любой малой ε -окрестности произвольной вершины окажется бесконечно много вершин. Все вершины стандартного разбиения Пенроуза образуют подмножество всего множества вершин разбиения, образованного, условно говоря, ромбами бесконечно малых размеров. Если измельчение было проведено некоторое конечное число раз N , то, увеличив в N раз масштаб рассмотрения, получим исходное стандартное разбиение Пенроуза. Иными словами, мы вводим в рассмотрение новый идеализированный объект, обладающий всеми свойствами симметрии стандартного разбиения Пенроуза.

Мысленно наложим стандартное разбиение Пенроуза поверх бесконечно измельченного. Мы по-прежнему можем считать, что разбиение образовано широкими и узкими ромбами конечных размеров, только теперь внутри их содержатся более мелкие, причем некоторые из них лишь наполовину. Если ребра ромбов заменить ломаными так, чтобы более мелкие детали подразбиения содержались внутри границы целиком, то вместо укладки ромбов по принципу „сторона к стороне“ получится укладка взаимно перекрывающихся областей с шероховатыми границами, изломанными бесконечно много раз, причем, что очень важно, области перекрытия оказываются точными уменьшенными копиями исходных. Тщательный анализ этого свойства, присущего также трехмерным квазикристаллам, приводит к однозначному выводу правил локального соответствия (*local matching rules*), что планируется детально проиллюстрировать в отдельной работе.

Согласно общепринятой точке зрения, в разбиении Пенроуза существует восемь различных неэквивалентных конфигураций вершин (см., например, [4]). Выберем произвольную вершину. Применим к локальной области вокруг выбранной вершины последовательно операции дефляции и инфляции. Поскольку мы обсуждаем бесконечное разбиение, само разбиение при этом не изменится; это приведет лишь к увеличению масштаба, в котором мы его рассматриваем, в τ раз. Последовательно применим обе операции несколько раз. Те области, которые первоначально окружали выбранный узел, при многократной смене масштаба рассмотрения в предельном случае могут быть удалены бесконечно далеко, как

будто при рассматривании деталей рисунка через очень большое увеличительное стекло. Оказывается, что после такого увеличения локальная окрестность любого узла будет в точности совпадать либо с разбиением $P3a$, либо с разбиением $P3b$. Все различия окажутся за пределами поля зрения, в пределе — бесконечно далеко, при этом рассматриваемая в многократно увеличенном масштабе область вокруг выделенного узла будет по-прежнему содержать бесконечно большое число узлов.

Утверждение 2. В разбиении Пенроуза существует только два типа локально неэквивалентных узлов.

Еще раз подчеркнем, это утверждение справедливо не для стандартного разбиения Пенроуза из плиток конечного размера, а для идеализированного бесконечно измельченного разбиения. Утверждение иллюстрирует рис. 2, *a*. Для любого ромба одна вершина из четырех соответствует одному типу, а три другие — второму. В разбиении Пенроуза можно выделить два типа кластеров из трех ромбов, по форме напоминающих проекции

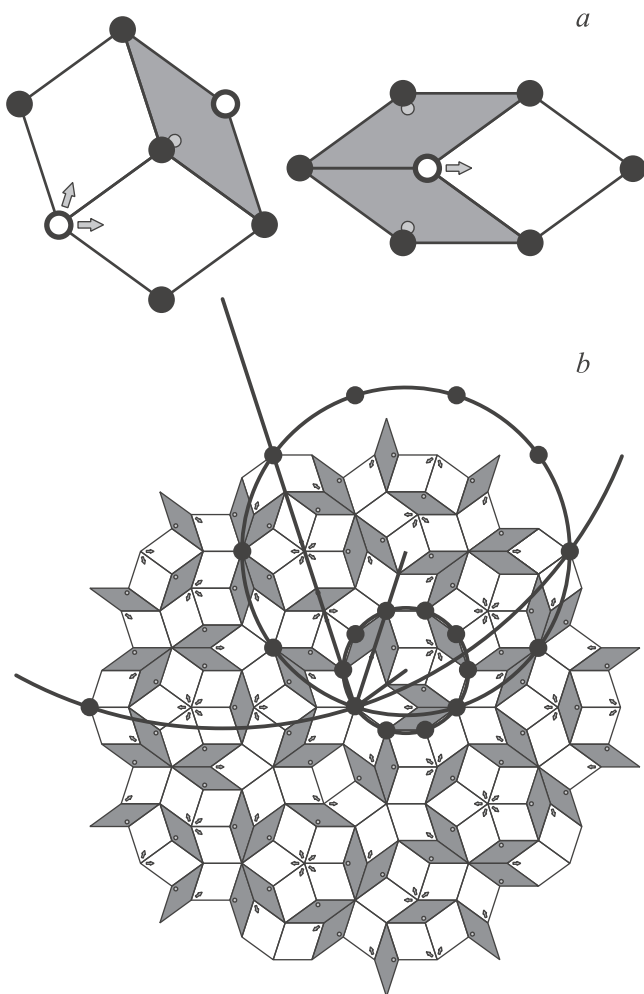


Рис. 2. Два типа локально неэквивалентных узлов в разбиении Пенроуза: расположение локально неэквивалентных узлов в основных кластерах (*a*) и группирование эквивалентных узлов вдоль соответственных окружностей (*b*).

куба. Это либо кластер из двух широких и одного узкого ромба, либо аналогичный вытянутый кластер из одного широкого и двух узких ромбов. Любой ромб всегда входит в состав либо одного, либо двух взаимно перекрывающихся кластеров указанных типов. Два типа локально эквивалентных узлов для этих кластеров изображены на рис. 2, *a* как узлы белого и черного цвета.

Локально эквивалентные узлы одного типа группируются вдоль соответственных окружностей, диаметры которых различаются в τ^n число раз (рис. 2, *b*). Это свойство наводит на мысль об аналогии с круговым свойством дробно-линейных преобразований (преобразований Мёбиуса) в теории функций комплексного переменного [17]. Дробно-линейное преобразование переводит произвольную окружность, лежащую в комплексной плоскости, в эквивалентную ей окружность, при этом прямые рассматриваются как окружности бесконечного радиуса. Кроме того, всякое дробно-линейное преобразование, сохраняющее некоторую окружность вместе с ограниченной ею областью, необходимо должно быть либо эллиптическим, либо параболическим, либо гиперболическим, но не локсодромным. И наоборот: если ни одна из окружностей не преобразуется сама в себя, то такое преобразование с необходимостью должно быть локсодромным.

Для трехмерного случая, который будет рассмотрен нами в отдельной работе, имеет место аналогичная картина. В трехмерном икосаэдрическом разбиении также существует только два типа локально неэквивалентных узлов. Эквивалентные узлы группируются на поверхностях соответственных сфер. Разбиение Пенроуза получается из икосаэдрического при проецировании различных срезов трехмерного икосаэдрического разбиения вдоль оси пятого порядка. Центральная часть разбиения $P3a$ отвечает проекции триконтаэдра, в то время как центральная часть разбиения $P3b$ — проекции звезды ромбоэдров. Имеет место прямая и однозначная связь между двумя типами неэквивалентных узлов разбиения Пенроуза и соответствующими типами узлов трехмерного икосаэдрического разбиения.

Рассмотрим преобразования разбиений $P3a$ и $P3b$ в масштабе $1:\tau^2$, так как в этом случае применение операций инфляции/дефляции отображает эти разбиения на себя. Если измельчение разбиения устремить к бесконечности, то операции подобия становятся истинными теоретико-групповыми операциями симметрии квазикристаллических разбиений (рис. 3). Если провести аналогию с пространственными группами, для которых общий элемент записывается в виде $\{R|t\}$, где R — поворотная часть элемента симметрии, а t — вектор трансляции, то для аперриодических кристаллов общий элемент запишется в виде $\{MR|t\}$, где R — как и ранее, унитарная матрица поворота, а M — коэффициент подобия. Элемент MR суть поворотная гомотетия. Как и в случае несимморфных пространственных групп, сами по себе повороты R , так же как и несобственные

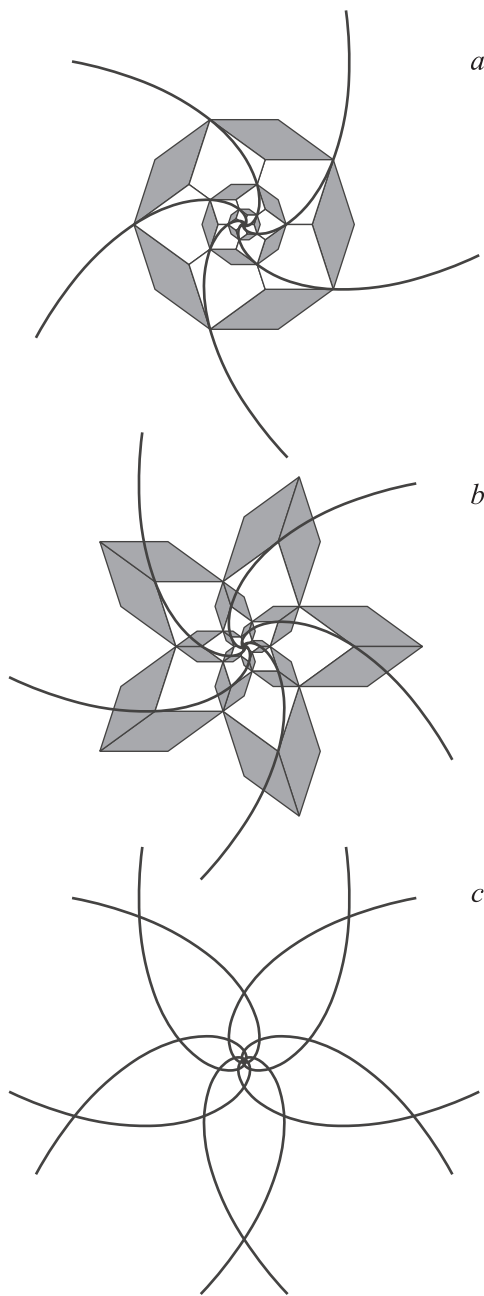


Рис. 3. Поворотная гомотетия как операция симметрии разбиений Пенроуза $P3a$ (a), $P3b$ (b) и логарифмические спирали как геодезические преобразования подобия (c).

трансляции t , по отдельности могут и не входить в число элементов симметрии апериодического кристалла.

На рис. 3, c изображены геодезические для поворотной гомотетии — два семейства логарифмических спиралей, раскручивающихся по и против часовой стрелки. На рис. 3, a, b изображена только половина спиралей, чтобы подчеркнуть факт их попарной эквивалентности. Логарифмические спирали, раскручивающиеся против часовой стрелки в разбиении $P3a$, соответствуют аналогичным пяти спиральям, раскручивающимся по часовой стрелке в разбиении $P3b$.

Напомним значения используемых терминов. Гомотетией (гомогенной дилатацией) с центром O и масштабным множителем τ называют преобразование плоскости (в общем случае аффинного пространства), такое, что радиус-вектор, проведенный из центра преобразования в некоторую точку, увеличивается в τ раз. Поворотной гомотетией называют композицию гомотетии и поворота, имеющих общий центр (порядок, в котором берется композиция, несуществен). Геодезическая (геодезическая линия) — обобщение понятия „прямая“ в искривленных пространствах. В метрических пространствах геодезическая определяется как локально кратчайшая с равномерной параметризацией (часто с натуральным параметром). В нашем случае равномерная параметризация может быть выбрана по степеням золотого сечения τ .

Обратим внимание на изоморфизм указанных элементов симметрии с конформными (псевдоконформными) преобразованиями комплексной плоскости. В такой трактовке генераторы групп симметрии разбиений, изображенных на рис. 3, a, b, могут быть записаны в виде аналитических функций, осуществляющих конформное отображение комплексной плоскости на себя: $w(z) = \tau^{-2} e^{i2\pi/10} z$. Особо отметим, что поворотная часть элемента симметрии в данном случае представляет собой ось десятого порядка. Имеет место аналогия с несимморфными пространственными группами. Если, например, рассматривать макроскопические свойства (или дифракционную картину) кристалла с винтовой осью, то симметрия, проявляемая таким кристаллом в его макроскопических свойствах, будет характеризоваться поворотной осью соответствующего порядка. Аналогичным образом, несмотря на то что само по себе разбиение Пенроуза характеризуется поворотной осью всего лишь пятого порядка, дифракционная картина от него должна содержать ось десятого порядка.

Рассмотрим теперь, как из того же самого прообраза может быть получено любое другое разбиение того же класса локальной эквивалентности, в общем случае не обладающее глобальной осью пятого порядка (рис. 4).

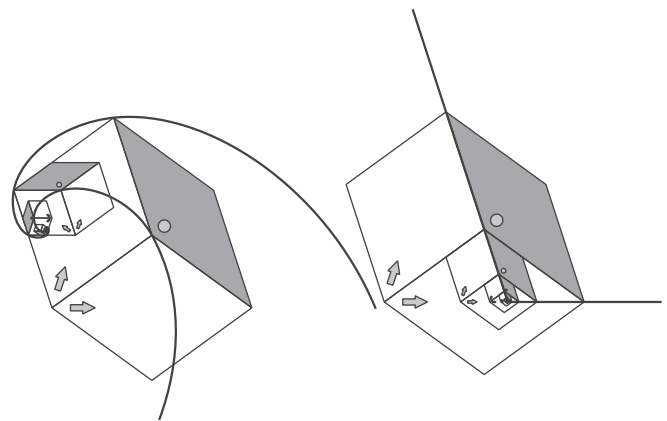


Рис. 4. Генерация локально изоморфных разбиений Пенроуза общего вида при помощи операций подобия.

В качестве прообраза возьмем характерную фигуру из двух широких и одного узкого ромба — ту же, что использовалась для генерации разбиения $P3a$ (рис. 3, а). Положение начала координат оставим прежним — в точке, где сходятся две вершины широких ромбов. Чтобы осуществить операцию подобия общего вида, следует переместить начало координат в соответствующую точку, определяемую правилами инфляции/дефляции, осуществить поворот и масштабирование относительно центра сдвинутой системы координат, после чего вернуть начало координат обратно. Иными словами, элемент симметрии общего вида есть результат сопряжения поворотной гомотетии MR посредством трансляции t : $g = tMRt^{-1}$. Особая точка этого преобразования расположена не в начале координат, ее положение можно определить как предел соответствующей последовательности при многократном применении генератора группы.

Утверждение 3. Операциями симметрии аперидических кристаллов являются операции подобия.

На самоподобие квазикристаллических разбиений неоднократно указывалось многими авторами, но под этим всегда понимались не истинные операции симметрии, а правила замены при инфляции/дефляции, а именно то, что определенные характерные мотивы разбиения повторяются в уменьшенном или увеличенном масштабе в некоторых локальных областях. На возможность применения операций подобия к разбиению в целом, вероятнее всего, ранее внимания не обращалось. Связано это с двумя широко распространенными самоограничениями. В частности, в [18] отмечается, что „операции подобия, самоподобие, были рассмотрены Шубниковым, но получили мало внимания вследствие того, что они — совершенно очевидно — несовместимы с атомистичностью“.

Считается, что если допустить подобие как операцию симметрии некоторой структуры, то многократное применение этой операции приведет к противоречию с тем, что ближайшее межатомное расстояние не может быть сколь угодно малым. Но, с другой стороны, конечный кристалл также целиком не совмещается сам с собой при применении операций трансляционной симметрии. Строго говоря, трансляции являются групповыми операциями только для бесконечного кристалла, но не для реального, так как при сдвиге часть приповерхностных атомов отображается за пределы кристалла, и только введение граничных условий Борна–Кармана (отождествление противоположных граней макрокристалла) позволяет эту проблему обойти. Аналогично если в качестве идеализации ввести в рассмотрение понятие идеального бесконечного аперидического разбиения, в котором бесконечно много раз применены как операции инфляции, так и операции дефляции, то конечному квазикристаллу будет соответствовать некоторая его часть, рассмотренная в диапазоне масштабов от определенной минимальной до некоторой максимальной величины. Таким образом, приходим к заключению, что существование нижней границы в множестве межатомных расстояний

не следует считать непреодолимым препятствием на пути использования симметрии подобия.

Еще одна проблема связана с тем, что, согласно общепринятой точке зрения, симметрия подобия сводится к нескольким хорошо изученным и несложным случаям. Приведем, в частности, цитату из [19]. „В симметрии подобия две подобные фигуры принимаются равными. При этом по мере удаления от особой точки или особой оси фигуры пропорционально возрастают расстояния в равных частях фигур, операции симметрии автоматически учитывают это возрастание. Соответствующие группы оказываются изоморфными спиральным группам G_1^{3c} . На чем основывается это заключение? Если взять операцию подобия в качестве генератора группы, то получившийся объект будет иметь одну особую точку (или ось), которую еще называют неподвижной точкой преобразования. Если попытаться составить композицию из двух операций подобия с двумя различными неподвижными точками, то, действуя многократно первой операцией на неподвижную точку второго преобразования и соответственно второй операцией на неподвижную точку первого, мы должны получить бесконечное множество „неподвижных“ точек, преобразующихся друг в друга. Эта ситуация отвергается как невозможная исходя из чисто интуитивных соображений: неподвижной точкой на плоскости может быть только одна. Возьмем на себя смелость в очередной раз отказаться от общепринятой точки зрения: композиция преобразований подобия с различными особыми точками возможна, при этом множество особых точек будет представлять собой фрактальную „пыль“. Иными словами, симметрия подобия отнюдь не сводится только лишь к спиральным группам. Удивительный факт, но рецепт для такого утверждения был известен уже более ста лет назад. Клейн в своей лекции „Математический характер пространственной интуиции“ в 1894 г., касаясь особенностей структуры группы Клейна, отмечал: „Вопрос заключается в том, что будет позициями предельных точек. Не составит особого труда найти ответ на этот вопрос из чисто логических соображений; но воображение, кажется, категорически отказывается от него, когда мы пытаемся сформировать ментальный образ результата“ (цитируется по [20]). Для собственно разрывных групп Клейн использовал эпитет „исключительно невообразимые“.¹ Напомним, что группа Клейна — это дискретная подгруппа группы дробно-линейных преобразований расширенной комплексной плоскости, являющаяся собственно разрывной.

На рис. 5 представлены композиции отображений подобия с различными неподвижными точками в соответствии с правилами группового умножения. Для генерации разбиений выбраны уже описанные кластеры из трех ромбов. Слева изображен прообраз, используемый для генерации разбиения $P3a$, справа — для генерации $P3b$. Кластеры уменьшаются и отображаются несколькими

¹ „Äußerst unvorstellbar“ (нем.).

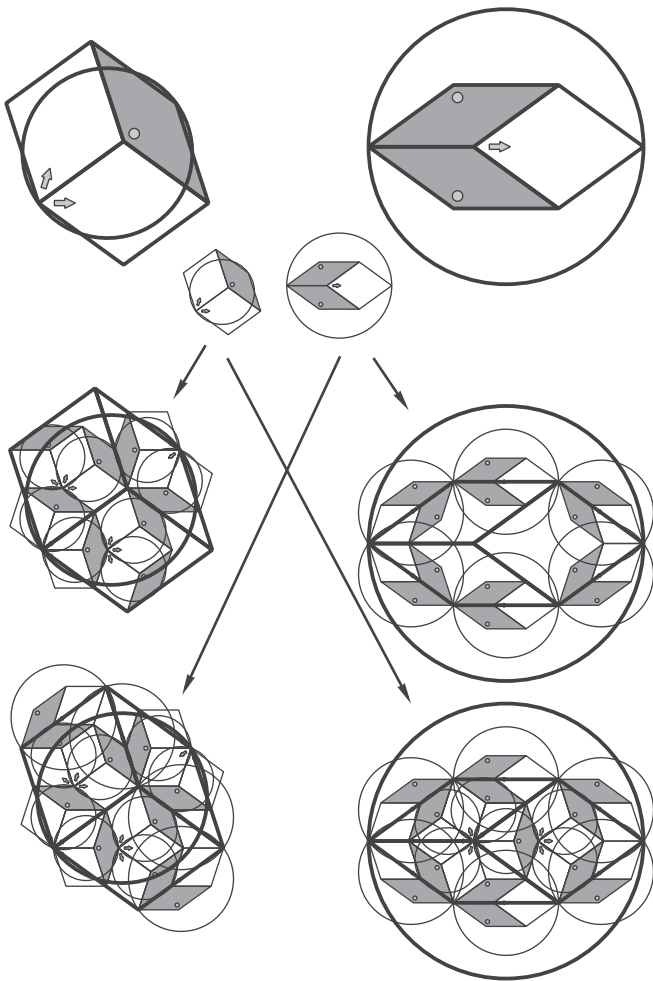


Рис. 5. Композиция отображений подобия с различными неподвижными точками. Произвольные окружности переводятся вновь в окружности, диаметры которых различаются в τ^n раз (прямые можно рассматривать как окружности бесконечного радиуса). Любой узел разбиения отображается в точку, лежащую на соответственной окружности. Кластеры, генерирующие разбиение $P3a$ (изображены слева), отображаются внутрь себя в масштабе $1 : \tau^2$. Аналогичным образом отображаются внутрь себя кластеры, генерирующие разбиение $P3b$ (изображены справа). Кластеры из локальной окрестности южного полюса римановой сферы (см. рис. 6) или левого водоворота (см. рис. 8, *b*) отображаются внутрь локальной окрестности северного полюса (правого водоворота) в масштабе $1 : \tau$, и наоборот (стрелки, соединяющие левую и правую части). Операции генерируют группу с собственно разрывной структурой (см. [20], гл. 4).

способами внутрь себя в масштабе $1 : \tau^2$. Такая процедура там не менее не покрывает исходные области полностью. Для полного покрытия необходимо взять прообраз разбиения $P3a$ и в масштабе $1 : \tau$ несколькими способами отобразить внутрь разбиения $P3b$ и, наоборот, прообраз $P3b$ отобразить внутрь $P3a$. Если оба разбиения (вопреки общепринятой точке зрения) — две области одного и того же разбиения, то вся сово-

купность отображений на рис. 5 будет образовывать группу.

Покажем, что вопреки общепринятой точке зрения разбиения Пенроуза $P3a$ и $P3b$ суть одно разбиение. Применим метод, основанный на повороте римановой сферы [20]. Для его наглядной иллюстрации можно воспользоваться работами знаменитого датского графика Эшера „Сферические спирали“ (на которой изображены локсодромы) и „Водовороты“ (которую можно трактовать как отображение локсодром на комплексную плоскость посредством стереографической проекции).

Выберем в качестве прообраза широкий ромб. Две его противоположные вершины принципиально различаются по своей локальной симметрии. Совместим одну из неэквивалентных вершин (например, помеченную стрелкой) с нулем комплексной плоскости, поместим туда ось пятого порядка и бесконечно много раз применим операции подобия. Получится разбиение $P3a$, при этом пять эквивалентных копий противоположной вершины исходного ромба окажутся бесконечно далеко от первой вершины. Совместим теперь с нулем комплексной плоскости вторую вершину и повторим ту же процедуру. Получится разбиение $P3b$ с центром во второй вершине, при этом пять копий первой вершины исходного ромба окажутся удаленными на бесконечность. Вся внутренняя область (достаточно больших, но конечных размеров), соответствующая первоначальному ромбу, для обоих разбиений полностью совпадает. Расширенная комплексная плоскость (пополненная бесконечно удаленной точкой) как топологическое пространство имеет одну-единственную бесконечно удаленную точку (в отличие от евклидовой плоскости). Пять копий противоположной вершины, будучи перемещенными в бесконечно удаленную точку, совпадут и будут являть собой вновь одну единственную первоначальную вершину исходного прообраза. Отмеченное выше наилучшим образом иллюстрируется при помощи сферы Римана.

Осуществим взаимно однозначное и обратимое отображение римановой сферы, хорошо известное как стереографическая проекция на комплексную плоскость (рис. 6). Начало координат комплексной плоскости соответствует южному полюсу римановой сферы, бесконечно удаленная точка — ее северному полюсу. Поместим в начало координат комплексной плоскости центр разбиения $P3a$ и осуществим отображение разбиения Пенроуза на сферу посредством обратной стереографической проекции. Получим некое симметричное разбиение на сфере. Через южный полюс этого разбиения проходит ось пятого порядка. Совершенно очевидно, что эта ось проходит также и через северный полюс римановой сферы, т.е. на комплексной плоскости должна существовать вторая ось пятого порядка, проходящая через бесконечно удаленную точку. Представляется вполне естественным поместить центр второго разбиения Пенроуза ($P3b$) в точку, соответствующую северному полюсу сферы Римана. Этот не вполне очевидный вывод

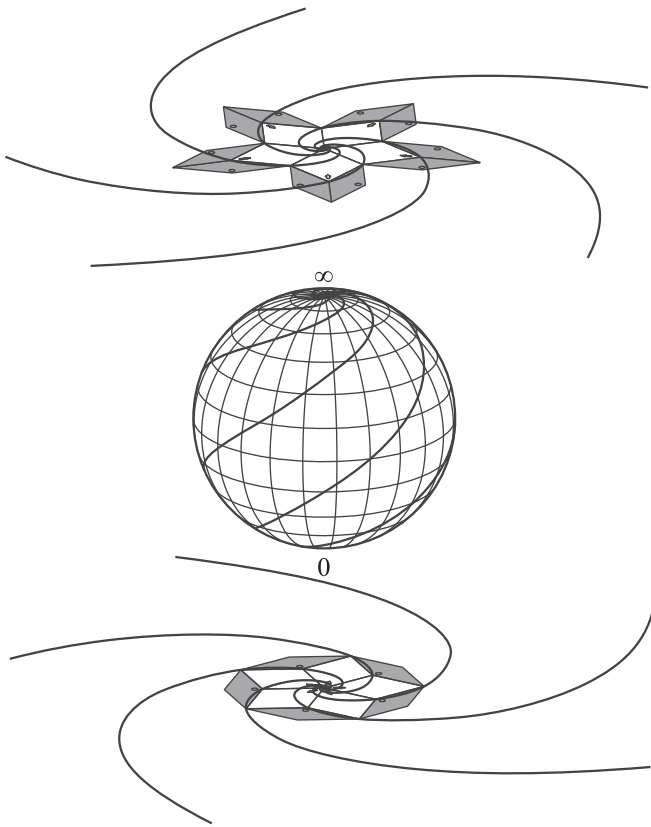


Рис. 6. Обратная стереографическая проекция локально изоморфных разбиений Пенроуза $P3a$ и $P3b$ на сферу Римана. При проецировании из северного полюса римановой сферы на комплексную плоскость, касающуюся южного полюса, получится разбиение $P3a$. При проецировании из южного полюса на плоскость, касающуюся северного, получится разбиение $P3b$. Логарифмические спирали в локально изоморфных разбиениях соответствуют локсодромам на римановой сфере.

получается благодаря использованию принципа перенесения Клейна.

Геодезические поворотной гомотетии, представляющие собой на комплексной плоскости логарифмические спирали, на сферу Римана отобразятся в виде семейства локсодром. Термин „локсодрома“ пришел из картографии. Локсодрому описывает, например, на поверхности Земли корабль, стремящийся сохранить один и тот же азимутальный угол при движении. Локсодромы раскручиваются из южного полюса, пересекают экватор и снова скручиваются вокруг северного полюса.

Мы приходим к выводу, что если осуществить стереографическую проекцию из северного полюса римановой сферы на комплексную плоскость, касающуюся южного полюса, то получится разбиение $P3a$. Если проецирование осуществлять из южного полюса на плоскость, касающуюся северного, то получится разбиение $P3b$. Логарифмические спирали, раскручивающиеся по и против часовой стрелки в двух этих разбиениях, плавно переходят друг в друга, поскольку являются отображениями одного и того же семейства локсодром.

Преобразуем теперь логарифмические спирали в двойные (см. [20], гл. 3). Для этого осуществим отображение комплексной плоскости на себя посредством конформного преобразования $S: w(z) = \frac{z-1}{z+1}$. Это преобразование переводит начало координат в точку $(-1, 0)$, а бесконечно удаленную точку — в точку с координатами $(1, 0)$. На стереографической проекции это действие соответствует повороту сферы Римана таким образом, чтобы ее северный и южный полюсы оказались на экваторе (рис. 7). Иными словами, мы вновь используем принцип перенесения Клейна. Само разбиение при этом не меняется, мы тем самым просто устанавливаем изоморфизм, для которого элементы симметрии получаются путем сопряжения исходных элементов посредством указанного выше дробно-линейного преобразования: $g' = SgS^{-1}$. При таком преобразовании локсодромы отображаются в линии, показанные на рис. 8, a , разбиение $P3a$ отображается в локальную окрестность точки $(-1, 0)$, а разбиение $P3b$ — в локальную окрестность $(1, 0)$. Оба разбиения совместимы друг с другом и одновременно присутствуют на комплексной плоскости в одной и той же области конечных размеров. Они не могут быть отделены друг от друга, так как взаимно перекрываются. Они являют собой одно и то же бесконечно измельченное разбиение, меняющее свой кажущийся внешний вид (но отнюдь не свою суть) при

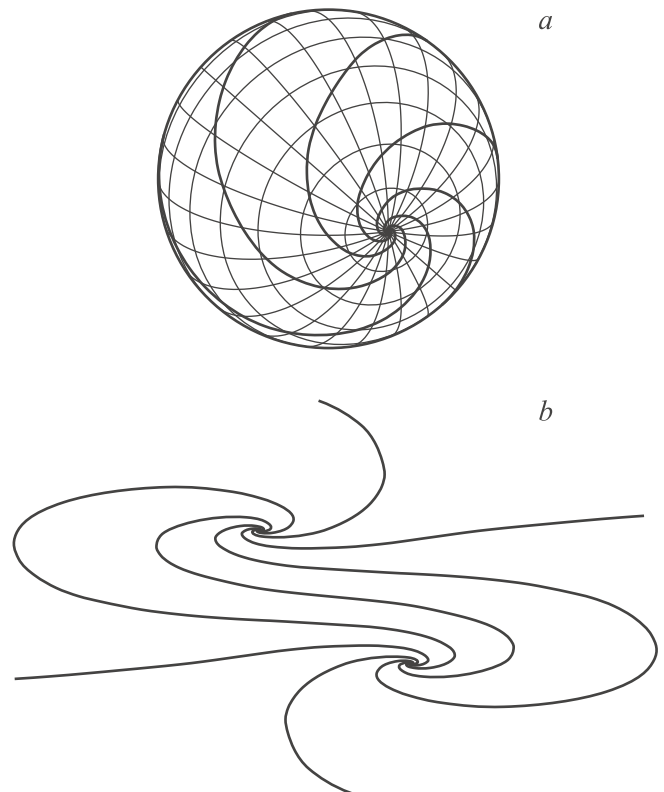


Рис. 7. Преобразование логарифмических спиралей в двойные: поворот сферы Римана (a) и стереографическая проекция семейства локсодром на комплексную плоскость (b).

смене масштаба рассмотрения в τ раз. На рис. 8, *b* представлены оба семейства встречных логарифмических спиралей после всех описанных преобразований. Этот узор обладает полной симметрией разбиения Пенроуза, и на него могут быть одновременно отображены оба локально изоморфных разбиения.

Выпишем в общем виде элементы симметрии узора, представленного на рис. 8, *b*, как отображения комплексной плоскости на себя

$$g_0 : w(z) = \tau e^{i\varphi} z;$$

$$m : m = Rm_0R^{-1}, \text{ где } R : w(z) = e^{i\varphi} z, m_0 : w(z) = z^*;$$

$$g : g = tg_0t^{-1}, \quad g = tmt^{-1}z, \quad \text{где } t : w(z) = z + t;$$

$$g' : g' = SgS^{-1}, \quad \text{где } S : w(z) = \frac{z-1}{z+1}.$$

Первая строка соответствует поворотной гомотетии. Вторая строка учитывает возможность существования зеркальной симметрии. Комплексное сопряжение вводит зеркальное отражение относительно действительной оси. Линию зеркальной симметрии можно развернуть так, чтобы она проходила через начало координат под соответствующим углом. Третья строка соответствует операциям подобия, особые точки которых не совпадают с началом координат. Посредством сопряжения с дробно-линейным преобразованием (четвертая строка) осуществляется конформное преобразование комплексной плоскости, так что центры разбиений *P3a* и *P3b* оказываются расположенными симметрично относительно мнимой оси. Все указанные здесь преобразования являются конформными (псевдоконформными). Поэтому любая их композиция также является конформным (псевдоконформным) преобразованием. Таким образом, эти отображения и все их возможные комбинации являются (дискретной) подгруппой полной группы всех возможных конформных преобразований комплексной плоскости и, следовательно, в свою очередь образуют группу. Этот вывод позволяет исключить последние сомнения в допустимости композиции операций подобия с различными неподвижными точками.

Проанализируем полученный результат. Исключим временно зеркальное отражение из числа рассматриваемых элементов симметрии (его введение приведет только дополнительно к необходимости учета несобственных движений). Тогда любой элемент симметрии аperiodического разбиения (конформно отображенного на комплексную плоскость, как это показано на рис. 8, *b*) может быть записан в виде комбинации четырех базовых операций.

Трансляция: $w(z) = z + t,$

поворот: $w(z) = e^{i\varphi} z,$

гомотетия: $w(z) = \tau z,$

инволюция Мёбиуса: $w(z) = 1/z.$

Базовые операции и все возможные их комбинации для всей совокупности произвольных значений параметров образуют группу дробно-линейных преобразований

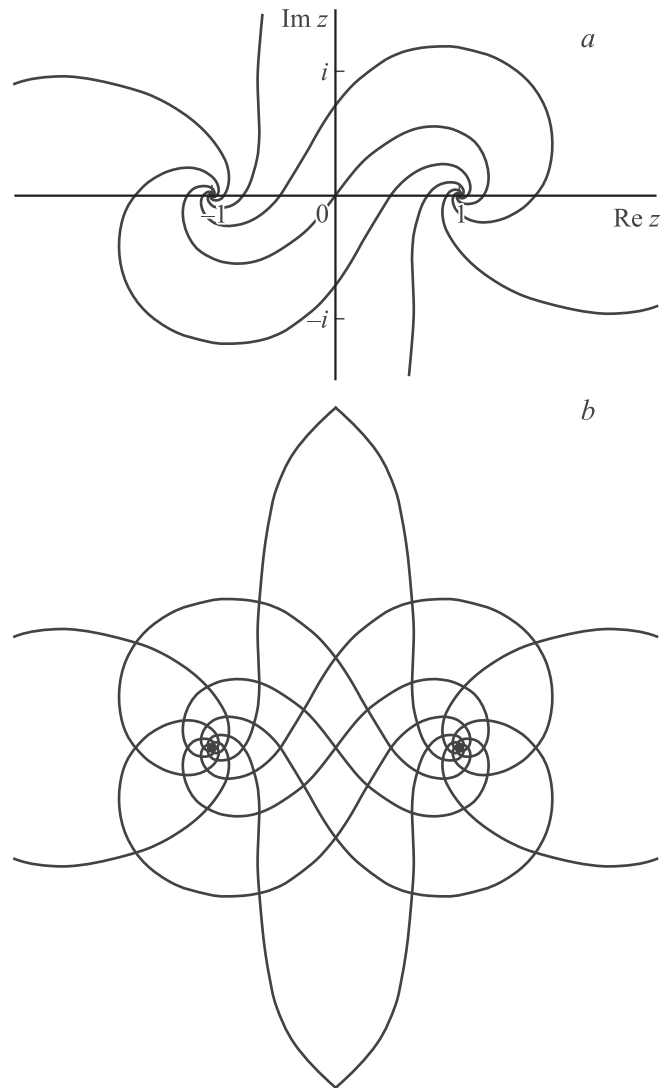


Рис. 8. Изоморфизм преобразований симметрии разбиения Пенроуза с дискретной подгруппой группы Мёбиуса: образы локсодром на комплексной плоскости (*a*) и геодезические разбиения Пенроуза после конформного преобразования (*b*).

комплексной плоскости. Следовательно, имеет место гомоморфизм между группой симметрии аperiodического разбиения плоскости и некоторой дискретной подгруппой полной группы преобразований Мёбиуса.² Для группы Мёбиуса имеет место следующий изоморфизм [21]: $Aut(Möb) = SL(2, \mathbb{C})/\{\pm 1\} = PSL(2, \mathbb{C}).$

Связь симметрии квазикристаллов с дробно-линейными функциями позволяет указать на несколько фундаментальных свойств аperiodических разбиений. Для этого достаточно переформулировать соответствующие свойства дробно-линейных функций [17]. Во-первых, при дробно-линейном преобразовании окружность переходит в окружность, т.е. имеет место инвариантность систем

² Эта гипотеза впервые высказана автором в докладе на конференции „Nanoparticles, Nanostructures, Nanocomposites“ (Санкт-Петербург, 2004).

соответственных окружностей. Подмеченная при рассмотрении рис. 2 аналогия не является случайной. Во-вторых, задавая три точки и их образы, мы полностью определим конкретное преобразование симметрии. Выбрав произвольным образом четвертую точку, мы элементарным способом получим координаты ее образа, поскольку ангармоническое отношение четырех точек является инвариантом преобразования. Это справедливо для любого преобразования симметрии апериодического кристалла.

Поясним, как эти замечательные свойства проявляются в разбиении Пенроуза для преобразований, отображающих произвольную точку пересечения двух локсодром в некоторую другую. Все точки пересечения локсодром на сфере Римана (так же как и их образы на комплексной плоскости) эквиваленты. Мы предлагаем читателю самостоятельно выбрать любую точку пересечения любых двух кривых на рис. 8, *b*. Помимо выбранной точки взять еще две — центры разбиений $P3a$ и $P3b$ (на рис. 8 соответствуют точкам -1 и 1 на действительной оси). Через эти три точки можно провести единственную окружность. Далее через первую точку провести еще одну окружность, ортогональную к первой. Нетрудно убедиться, что все точки пересечения всех конформно преобразованных локсодром на рис. 8, *b* ложатся в точности на два семейства соответственных окружностей, а именно, на семейство окружностей, проходящих через центры разбиений $P3a$ и $P3b$, и на семейство окружностей, им ортогональных. После такой процедуры связь симметрии апериодических кристаллов с движениями гиперболической плоскости и преобразованиями Мёбиуса становится очевидной (см. [21], § 20).

Для любого преобразования симметрии этого узора (рис. 8, *b*) имеется две неподвижные точки — центры „водоворотов“. Преобразования, которые переводят друг в друга окружности, проходящие через неподвижные точки, и оставляют на месте семейство окружностей, им ортогональных, суть преобразования эллиптического типа. Они поочередно меняют местами по пять узлов вдоль ортогональных окружностей вокруг каждого из центров и соответствуют поворотным осям пятого порядка исходного разбиения. Преобразования, которые оставляют на месте окружности, проходящие через неподвижные точки, и переводят друг в друга окружности, им ортогональные, суть преобразования гиперболического типа. Они передвигают узлы из локальной окрестности одного из центров к другому. В исходном разбиении они соответствуют симметрии подобия. Преобразования общего вида, переводящие произвольную точку пересечения двойных спиралей в любую другую, суть преобразования локсодромного типа.

Имеется много примеров успешного использования неевклидовой геометрии при описании структуры и свойств конденсированных сред (см., например, [8]). В первую очередь следует обратить внимание на приближение искривленного пространства (curved space approach). Этот метод основан на процедуре, согласно

которой некоторые регулярные („кристаллические“) разбиения пространств с положительной или отрицательной кривизной отображаются на реальное пространство. Отображение сопровождается искажениями и геометрической фрустрацией, связанной с невозможностью одновременного удовлетворения предпочтительного локального порядка, наследуемого из искривленного пространства, и дальнего порядка в пространстве реальном. Не претендуя на полноту, назовем работы [22,23]. В частности, в обзоре Клемана [23] описываются двумерные гиперболические кристаллы, их симметрия, а также шаблоны для получения структур квазикристаллов. Подчеркнем, что при описании гиперболических кристаллов обычно ограничиваются рассмотрением групп Фукса (вероятно, потому, что они генерируют регулярное разбиение гиперболического пространства и лучше изучены).

Формально, в настоящей работе мы используем концептуально близкий подход — устанавливаем соответствие между двумя геометриями. Далее мы замечаем, что образы элементов симметрии апериодических разбиений являются движениями в криволинейном пространстве. Следовательно, они служат генераторами некоторой дискретной подгруппы полной группы движений криволинейного пространства (задача перечисления и классификации которых сегодня является решенной). Возвращаясь к рассмотрению элементов симметрии апериодических разбиений в реальном пространстве, мы таким способом устанавливаем „скрытую“ симметрию апериодических разбиений, которая обычно ускользает от внимания исследователей. Мы также вправе воспользоваться имеющейся классификацией дискретных подгрупп группы $PSL(2, \mathbb{C})$ для решения задачи о допустимых типах апериодических разбиений. Кроме того, в криволинейном пространстве образы разбиений обладают рядом замечательных свойств, в частности инвариантностью систем соответственных окружностей. Следовательно, для апериодических разбиений в реальном пространстве также должны существовать аналогичные инвариантные системы в соответствии с принципом перенесения Клейна.

Вероятно, нами впервые обращается внимание на взаимосвязь скрытой симметрии апериодических разбиений с локсодромией и группами преобразований Мёбиуса. Получающиеся в нашем рассмотрении группы симметрии заведомо не являются фуксовыми. Геометрическая фрустрация отсутствует, потому что эти группы сами по себе являются собственно разрывными. Нет необходимости вносить разрывы между локальными областями при отображении.

3. Классификация апериодических кристаллов

Мы отказались от ограничений классической кристаллографии. Что же взамен?

Классификация аперриодических кристаллов

Пространство представления	Тип кристаллов	Собственные функции	Примечание
E^3 $E^2 \times H^1$	Периодические Одномерные аперриодические	$\varphi(x, y, z)$ $\varphi(x, y)\psi(z)$	Пространственные группы Федорова Кристаллографические слои, уложенные в соответствии с последовательностью Фибоначчи
$E^1 \times H^2$	Двумерные аперриодические	$\psi(x, y)\varphi(z)$	Периодическая последовательность слоев аперриодических разбиений (в частности, разбиения Пенроуза); допустимы оси любого порядка
H^3	Трехмерные аперриодические	$\psi(x, y, z)$	Тетраэдрические, октаэдрические, икосаэдрические

Обозначим символом H^3 — трехмерное гиперболическое пространство, в частности его модель в верхнем полупространстве. $\text{Iso}(H^3)$ — его полная группа изометрий, $\text{Iso}^+(H^3)$ — группа изометрий, сохраняющих ориентацию, группа $\text{Iso}^+(H^3)$ изоморфна $PSL(2, \mathbb{C})$. Справедлива теорема (см. [24], гл. 2): группы из следующего списка и только они содержатся в $PSL(2, \mathbb{C})$ в качестве конечных подгрупп.

1. Циклические группы $Z/m\mathbb{Z}$ порядка m ,
2. Группы диэдра D_m порядка $2m$.
3. Группа тетраэдра порядка 12, изоморфная знакопеременной группе A_4 степени 4.
4. Группа октаэдра порядка 24, изоморфная симметрической группе S_4 степени 4.
5. Группа икосаэдра порядка 60, изоморфная знакопеременной группе A_5 .

Последние три группы в этом списке — это в точности группы преобразований симметрии правильных евклидовых многогранников, сохраняющих ориентацию. Первые два случая соответствуют изометриям подпространств меньшей размерности H^1 и H^2 .

Теорема о дискретных подгруппах гиперболического пространства позволяет провести полную классификацию возможных типов аперриодических кристаллов, а также сформулировать для них аналог теоремы Блоха. Собственными функциями операторов трансляции евклидова пространства являются волновые функции Блоха $\varphi(\mathbf{r})$. Для аперриодических кристаллов их следует заменить на собственные функции операторов трансвекции гиперболического пространства $\psi(\mathbf{r})$. Не вдаваясь в строгие математические рассуждения, поясним суть высказывания. Трансляции в евклидовом пространстве соответствует сдвиг вдоль прямой. Обобщением этого термина на случай произвольного векторного пространства является понятие трансвекции, она соответствует сдвигу вдоль геодезической. С конкретными иллюстрациями поворотов, трансляций и трансвекций в двумерном гиперболическом кристалле можно ознакомиться, например, в работе [23].

Утверждение 4. Задача классификации аперриодических разбиений сводится к задаче перечисления дискретных собственно разрывных подгрупп группы Мёбиуса. Допустимы типы кристаллов (периодических и аперриодических), представленные в таблице, и только они.

Обратим внимание на два нетривиальных следствия. Во-первых, для дискретных подгрупп плоскости Лобачевского допустимы оси вращения любого порядка, т.е. число таких подгрупп бесконечно. Этот вывод справедлив не только для квазикристаллов, но также для любого конструктивного фрактала на плоскости. Напротив, число различных типов трехмерных квазикристаллов весьма ограничено. Во-вторых, из приведенных рассуждений следует, что помимо хорошо известных икосаэдрических квазикристаллов, вероятно, возможны также тетраэдрические и октаэдрические аперриодические кристаллы, т.е. еще два типа трехмерных аперриодических кристаллов с кристаллографически разрешенными осями, и только они. Это утверждение согласуется с выводами работ [25,26], где на основе анализа групп аффинных преобразований также делается вывод об исключительной роли циклических и диэдральных групп, а также групп симметрии тетраэдра, октаэдра и икосаэдра при описании аперриодических разбиений.

В настоящее время 18-я проблема Гильберта — построение пространства из конгруэнтных многогранников — считается полностью решенной. Обычно эта проблема рассматривается в контексте перечисления конечного числа существенно различных типов групп движений с фундаментальной областью. Иными словами, считается, что задача заполнения евклидова пространства конгруэнтными многогранниками сводится к перечислению дискретных подгрупп полной непрерывной группы движений этого пространства. Подзадачей 18-й проблемы является утверждение Кеплера о плотнейших упаковках. В настоящее время принята несколько странная для точных наук формулировка, что утверждение Кеплера следует считать „скорее всего доказанным“. Исключительно громоздкое доказательство опирается на компьютерный алгоритм перебора конечного числа систем Делоне и их оптимизации методами линейного программирования и с трудом поддается проверке.

Напомним формулировку второй части 18-й проблемы в терминах самого Гильберта [27]. „Существуют ли также полиэдры, которые не появляются как фундаментальные области групп движений, но с помощью которых при надлежащем подборе конгруэнтных копий тем не менее возможно заполнение всего пространства“? Доказано, что такие альтернативные способы заполнения пространства существуют (см. комментарий

Делоне в сборнике [28]). Переформулируем проблему. Существуют ли такие группы G , которые не являются дискретными подгруппами группы жестких движений евклидова пространства (E^2 или E^3), но с помощью которых возможно заполнить евклидово пространство таким образом, чтобы имело место однозначное соответствие между правилами его заполнения и операциями умножения группы неевклидовых движений G ? Надеемся, что приведенные в настоящей статье рассуждения убедили читателя в положительном ответе на этот вопрос. Тогда утверждение об окончательном решении 18-й проблемы представляется преждевременным.

4. Заключение

Резюмируем сделанные выводы. Все разбиения, принадлежащие одному и тому же классу локальной эквивалентности, имеют одну и ту же группу симметрии. Операциями симметрии апериодических кристаллов являются операции подобия. Композиция операций подобия с различными особыми точками возможна; следовательно, симметрия подобия отнюдь не сводится лишь к спиральным группам симметрии. Сохраняющие ориентацию преобразования симметрии апериодических кристаллов изоморфны некоторой дискретной подгруппе группы Мёбиуса — проективной специальной линейной группы $PSL(2, \mathbb{C})$, т.е. дискретной подгруппе группы движений пространства Лобачевского. Учет возможных зеркальных отражений позволяет построить полную группу симметрии апериодического кристалла.

Список литературы

- [1] D. Shechtman, I. Blech, D. Gratias, J.W. Cahn. Phys. Rev. Lett. **53**, 20, 1951 (1984).
- [2] M. Senechal. Quasicrystals and geometry. Cambridge University Press (1995). 286 p.
- [3] Quasicrystals / Ed. T. Fujiwara, Y. Ishii. Elsevier (2008). 359 p.
- [4] W. Steurer, S. Deloudi. Crystallography of quasicrystals. Concepts, methods and structures. Springer (2009). 384 p.
- [5] M. Senechal. AMS Notices. **53**, 8, 886 (2006).
- [6] R. Lifshitz. Found. Phys. **33**, 12, 1703 (2003).
- [7] D.A. Rabson, N.D. Mermin, D.S. Rokhsar, D.C. Wright. Rev. Mod. Phys. **63**, 699 (1991).
- [8] S. Hyde, S. Andersson, K. Larsson, Z. Blum, T. Landh, S. Lidin, B.W. Ninham. The language of shape. The role of curvature in condensed matter physics, chemistry and biology. Elsevier (1997). 383 p.
- [9] E. Abe, Y. Yan, S.J.R. Pennycook. Nature Mater. **3**, 11, 759 (2004).
- [10] В.Е. Дмитриенко, В.А. Чижиков. Кристаллография **51**, 4, 593 (2006).
- [11] E.A. Lord, A.L. Mackay, S. Ranganathan. New geometries for new materials. Cambridge University Press (2006). 235 p.
- [12] V.Ya. Shevchenko, A.E. Madison, A.L. Mackay. Acta Cryst. A **63**, 2, 172 (2007).
- [13] Ф. Клейн. В сб.: Об основаниях геометрии. Сборник классических работ по геометрии Лобачевского и развитию ее идей / Под ред А.П. Нордена. ГИТТЛ, М. (1956). С. 399.
- [14] D. Levine, P.J. Steinhardt. Phys. Rev. B **34**, 2, 596 (1986).
- [15] J.E.S. Socolar, P.J. Steinhardt. Phys. Rev. B **34**, 2, 617 (1986).
- [16] H.C. Jeong, P.J. Steinhardt. Phys. Rev. B **55**, 6, 3520 (1997).
- [17] И.И. Привалов. Введение в теорию функций комплексного переменного. Наука, М. (1984). 432 с.
- [18] A.L. Mackay. J. Mol. Struct. (Theochem) **336**, 2/3, 293 (1995).
- [19] Современная кристаллография. В 4-х т. / Под ред. Б.К. Вайнштейна. Т. 1. Б.К. Вайнштейн. Симметрия кристаллов. Методы структурной кристаллографии. Наука, М. (1979). 384 с.
- [20] D. Mumford, C. Series, D. Wright. Indra's pearls. The vision of Felix Klein. Cambridge Univ. Press (2002). 395 p.
- [21] Б.А. Дубровин, С.П. Новиков, А.Т. Фоменко. Современная геометрия. Методы и приложения. Т. 2. Геометрия и топология многообразий. Эдиториал УРСС, М. (2001). 296 с.
- [22] J.F. Sadoc, N. Rivier. Phil. Mag. **55**, 5, 537 (1987).
- [23] M. Kleman. Adv. Phys. **38**, 6, 605 (1989).
- [24] Ф. Груневальд, Й. Меннике, Ю. Эльстродт. Группы, действующие на гиперболическом пространстве: гармонический анализ и теория чисел. МЦНМО, М. (2003). 640 с.
- [25] Б.А. Долгих. Фундамент. и прикл. матем. **13**, 2, 117 (2007).
- [26] В.А. Артамонов, С. Санчес. Сиб. матем. журн. **52**, 6, 1221 (2011).
- [27] D. Hilbert. Bull. AMS **8**, 10, 437 (1902).
- [28] Проблемы Гильберта / Под ред. П.С. Александрова. Исфара, Челябинск (2000). 238 с.