01

Заряды на поверхности чечевичной полости в двумерном однородном проводнике

© В.И. Баткин

Институт ядерной физики им. Г.И. Будкера СО РАН,
630090 Новосибирск, Россия
e-mail: V.I. Batkin@inp.nsk.su

(Поступило в Редакцию 19 января 2010 г.)

Аналитически определено значение линейной плотности заряда на дуговых сегментах чечевичной полости в однородном двумерном проводнике при однородном внешнем электрическом поле. Наличие особенности плотности тока на краях сегментов делает полученные соотношения полезным тестом для численных расчетных алгоритмов.

Точные соотношения в частных задачах электродинамики не только дают учебный материал, но также полезны для тестирования численных алгоритмов расчета.[1] В настоящей работе аналитически определяются значения линейной плотности заряда на дуговых сегментах чечевичной полости в однородном двумерном проводнике при однородном внешнем электрическом поле. Ценность этой задачи как модели для тестирования в том, что она содержит интегрируемую особенность плотности заряда на границах сегментов.

Поверхность цилиндра обладает замечательным свойством в двумерных задачах — условия однородны вдоль оси цилиндра. Поток от любой лежащей на его поверхности заряженной нити через сегмент цилиндра не зависит от положения нити:

$$\Psi = \frac{L}{4\pi\varepsilon_0}\,\sigma\varphi.$$

Здесь σ — линейная плотность заряда нити, φ — угловой размер дуги, на которую опирается сегмент, L — длина отрезка нити. Для геометрической фигуры, ограниченной двумя такими сегментами — проводника в диэлектрической среде или диэлектрической полости внутри проводника — этого свойства и теоремы Гаусса достаточно, чтобы определить полные заряды сегментов в однородом внешнем электрическом поле.

Конфигурация задачи отображена на рисунке. Вдоль оси Z, перпендикулярной плоскости рисунка, условия однородны. В среде с проводимостью λ_1 имеется полость, заполненная средой с проводимостью λ_2. Полость ограничена двумя цилиндрическими сегментами радиуса R_1 и R_2. Длина линии AB, соединяющей стыки сегментов, равна l. Создается электрическое поле, имеющее на большом расстоянии от полости напряженность E. Вектор $\mathbf{E}$ перпендикулярен оси Z и находится под углом α к линии AB, соединяющей стыки сегментов. Необходимо определить установившиеся значения линейной плотности зарядов сегментов границы полости σ_1, σ_2.

[1] Батыгин В.В., Топтыгин И.Н. Сборник задач по электродинамике / Под ред. М.М. Бредова. М.: НИЦ „Регулярная и хаотическая динамика“, 2002. 639 с.

Построим прямой параллелепипед с высотой h и параллелограммом $\mathrm{A_1CDB_1}$ в основании. Стороны параллелограмма $\mathrm{A_1C}$ и $\mathrm{B_1D}$ параллельны вектору $\mathbf{E}$, а сторона $\mathrm{A_1B_1}$ является продолжением линии AB, так что $\mathrm{A_1B_1} \gg \mathrm{AB}$, $\mathrm{A_1B_1} \gg R_1$, $\mathrm{A_1B_1} \gg R_2$. Боковые грани параллелепипеда перпендикулярны плоскости рисунка и на нем видны. Сегмент поверхности полости радиусом R_1 пересекает параллелепипед, а сегмент радиуса R_2 оказывается вне параллелепипеда.

Электрческое поле в проводящей среде создает ток. Ток в однородном проводнике пропорционален потоку напряженности электрического поля. Применительно к данной задаче условие непрерывности тока выглядит так:

$$\lambda_1\Psi_{\mathrm{CD}} + \lambda_1(\Psi_{\mathrm{AA_1}} + \Psi_{\mathrm{BB_1}}) + \lambda_2\Psi_{\mathrm{AB}} = 0. \tag{1}$$

Здесь Ψ_{AB} — поток напряженности электрического поля через прямоугольник высотой h, находящийся на боковой грани параллелепипеда и представленный в плоскости рисунка своей стороной AB. Аналогичный смысл имеют символы Ψ с другими индексами. Заряды на участках сегментов поверхности полости высотой h, находящихся внутри параллелепипеда, равны:

$$Q_1 = \sigma_1 h = \sigma h \quad \text{и} \quad Q_2 = \sigma_2 h - \sigma h. \tag{2}$$

Здесь использовано условие неизменности зарядов во времени. Полный поток напряженности электрического поля из полости и полный заряд ее поверхностей должен равняться нулю. Разделим поток Ψ_{AB} на три составляющие:

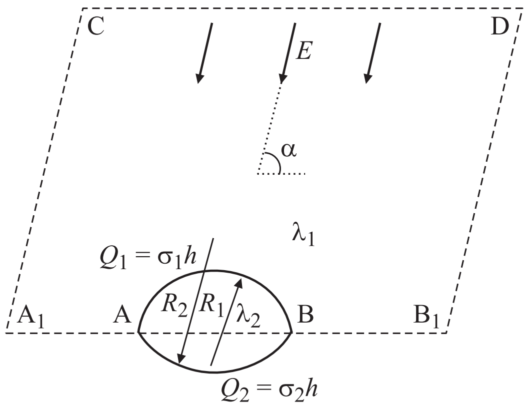
$$\Psi_{\mathrm{AB}} = \Psi^{E}_{\mathrm{AB}} + \Psi^{Q_1}_{\mathrm{AB}} + \Psi^{Q_2}_{\mathrm{AB}}.$$

Первое слагаемое — поток поля $\mathbf{E}$, второе и третье — потоки, созданные зарядами Q_1 и Q_2. Аналогично поступим с потоком через другие границы.

$$\lambda_1\Psi^{E}_{\mathrm{CD}} + \lambda_1(\Psi^{E}_{\mathrm{AA_1}} + \Psi^{E}_{\mathrm{BB_1}}) + \lambda_2\Psi^{E}_{\mathrm{AB}} = Elh(\lambda_2 - \lambda_1)\cos\alpha, \tag{3}$$

$$\Psi^{Q_1}_{\mathrm{A_1B_1}} = \frac{Q_1}{2\varepsilon_0} = \Psi^{Q_2}_{\mathrm{A_1B_1}}. \tag{4}$$

Поток от заряда Q_1 через границу AB равен потоку через дополнение поверхности, на котором он находится, до полного цилиндра. Поток от находящегося на



Конфигурация задачи: λ_1, λ_2 — проводимость сред; σ_1, σ_2 — плотность зарядов; R_1, R_2 — радиусы, ограничивающие полость, $\mathbf{E}$ — напряженность электрического поля.

поверхности длинного цилиндра заряда q через сегмент этого цилиндра с линейным углом φ равен

$$\Psi = \frac{q\varphi}{4\pi\varepsilon_0}. \tag{5}$$

Используя (5), находим:

$$\Psi_{\mathrm{AB}}^{Q_1} = \left(1 - \frac{\varphi_1}{2\pi}\right)\frac{Q_1}{2\varepsilon_0}; \quad \Psi_{\mathrm{AB}}^{Q_2} = \left(1 - \frac{\varphi_2}{2\pi}\right)\frac{Q_2}{2\varepsilon_0}. \tag{6}$$

Здесь φ_1, φ_2 — угловые размеры дуг, ограничивающих сечение полости (см. рисунок). Используя соотношение

$$\Psi_{\mathrm{AA_1}} + \Psi_{\mathrm{BB_1}} = \Psi_{\mathrm{A_1B_1}} - \Psi_{\mathrm{AB}},$$

подставим значения парциальных потоков (3), (4), (6) в формулу (1) и получим решение задачи:

$$\sigma_{1,2} = \pm\frac{\varepsilon_0 El\cos\alpha}{\frac{\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2} + \frac{1}{4\pi}(\varphi_1 - \varphi)}. \tag{7}$$

Угловые размеры дуг можно выразить через линейные параметры задачи:

$$\varphi_{1,2} = 2\arcsin(l/R_{1,2}),$$

если центр дуги находится с самой дугой по разные стороны линии AB,

$$\varphi_{1,2} = 2\pi - 2\arcsin(l/R_{1,2}), \quad R_{1,2} > 0,$$

или

$$\varphi_{1,2} = -2\pi - 2\arcsin(l/R_{1,2}), \quad R_{1,2} < 0,$$

если центр дуги находится с самой дугой по одну сторону линии AB.

В формуле (7) положительные значения радиусов отвечают выпуклой поверхности, отрицательные — вогнутой. При $\lambda_1 = 0$ формула (7) дает линейные плотности заряда на сегментах поверхности проводника во внешнем поле, при $\lambda_2 = 0$ она решает аналогичную задачу для диэлектрического включения в однородный проводник.