01;03

Некоторые общие свойства нелинейного интеграла столкновений уравнения Больцмана

© А.Я. Эндер,[1] И.А. Эндер,[2] Л.А. Бакалейников[1]

[1] Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН,
194021 Санкт-Петербург, Россия
[2] Санкт-Петербургский государственный университет,
198504 Санкт-Петербург, Россия
e-mail: andrei.ender@mail.ioffe.ru

(Поступило в Редакцию 3 февраля 2010 г.)

Новый метод расчета матричных элементов интеграла столкновений в уравнении Больцмана позволяет по-новому посмотреть на многие проблемы кинетической теории газов. Рассматриваются нелинейные ядра интеграла столкновений и доказываются соотношения подобия, которые существенно упрощают задачу построения таких ядер.

Введение

В работах [1] и [2] выведены рекуррентные соотношения для нелинейных матричных элементов (МЭ) интеграла столкновений уравнения Больцмана. С помощью таких рекуррентов строятся любые МЭ, если известны простейшие — линейные изотропные — МЭ. С одной стороны, это дает новый импульс моментному методу решения уравнения Больцмана, предложенному еще Барнеттом [3], и позволяет строить этим методом функцию распределения (ФР) по скоростям в области больших скоростей. С другой стороны, по заданным МЭ можно строить ядра разложения интеграла столкновений по сферическим гармоникам [4–6].

Впервые ядро интеграла столкновений было построено Гильбертом [7]. Правда, это было сделано только для модели твердых шаров и линеаризованного интеграла столкновений. В [8] построено разложение этого ядра по сферическим гармоникам, или, точнее, построены ядра для системы интегро-дифференциальных уравнений при разложении ФР по сферическим гармоникам. В дальнейшем эти результаты были переоткрыты в [9]. Такое разложение и такие ядра [8,9] были с успехом использованы Лойялкой при решении ряда граничных задач кинетической теории газов и расчета пристеночных скачков [10,11].

1. Постановка задачи

Рассмотрим нелинейное уравнение Больцмана

$$\frac{Df}{Dt} = n_0^2 \hat{I}(f,f), \tag{1}$$

где f — нормированная на единицу функция распределения по скоростям, а n_0 — плотность частиц. Дифференциальный оператор левой части при отсутствии внешних сил имеет вид

$$\frac{Df}{Dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right) n_0(\mathbf{r},t) f(\mathbf{v},\mathbf{r},t), \tag{2}$$

а пятикратный интеграл столкновений $\hat{I}(f,f)$ представляется в форме

$$\hat{I}(f,f) = \int \left[f(\mathbf{v}_1)f(\mathbf{v}_2) - f(\mathbf{v})f(\mathbf{v}')\right] g\sigma(g,\theta)d\mathbf{v}'d\mathbf{k}. \tag{3}$$

Здесь $\mathbf{v}_1 = (\mathbf{v}+\mathbf{v}'+\hat{\mathbf{k}}g)/2$, $\mathbf{v}_2 = (\mathbf{v}+\mathbf{v}'-\hat{\mathbf{k}}g)/2$, $\mathbf{g} = \mathbf{v}-\mathbf{v}'$ — вектор относительной скорости, а $\hat{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, связанный с углом рассеяния θ так, что $\cos\theta = (\hat{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{g})/|\mathbf{g}|$. Величина $\sigma(g,\theta)$ представляет собой дифференциальное сечение рассеяния.

Отметим, что основная трудность решения уравнения Больцмана связана именно с расчетом интеграла столкновений $\hat{I}(f,f)$.

В моментном методе Барнетта [1,3] разложение ФР проводится по сферическим полиномам Эрмита (функциям Барнетта):

$$f(\mathbf{c},\mathbf{r},t) = M_T(c)\sum C^i_{rlm}(\mathbf{r},t)H^i_{rlm}(\mathbf{c}),$$

$$\mathbf{c} = \sqrt{\frac{2m}{2kT}}\,(\mathbf{v}-\mathbf{u}), \tag{4}$$

$$M_T(c) = M_T(\mathbf{v}) = \left(\frac{m}{2kT\pi}\right)^{3/2} e^{-c^2},$$

$$H_j = Y^i_{lm}(\Theta,\varphi)c^l S^{(r)}_{l+1/2}(c^2), \quad i = 0, 1; \tag{5}$$

$$Y^0_{lm}(\Theta,\varphi) = P^m_l(\cos\Theta)\cos m\varphi,$$

$$Y^1_{lm}(\Theta,\varphi) = P^m_l(\cos\Theta)\sin m\varphi, \quad 0 \le m \le l. \tag{6}$$

Здесь индекс j состоит из четырех индексов (r,l,m,i); M_T — весовой максвеллиан с температурой T и средней скоростью $\mathbf{u}$; $Y^i_{lm}(\Theta,\varphi)$ — вещественные сферические гармоники, $P^m_l(\cos\Theta)$ — присоединенные полиномы Лежандра, а $S^{(r)}_{l+1/2}(c^2)$ — полиномы Сонина (Лагерра).

Для сходимости (4) ФР должна удовлетворять условию

$$\int f^2 \exp(c^2) d\mathbf{c} < \infty, \tag{7}$$

которое называется критерием Греда. Ограничение, связанное с критерием Греда, возникает при разложении по полиномам Сонина, а не на стадии разложения по сферическим гармоникам, поскольку именно полиномы Сонина ортогональны с максвелловским весом.

В моментном методе уравнение (1) заменяется бесконечной системой моментных уравнений для коэффициентов C_j:

$$\frac{D_M(C_j)}{Dt} = \sum_{j_1, j_2} K^j_{j_1, j_2} C_{j_1} C_{j_2}. \tag{8}$$

Явный вид дифференциального оператора моментной системы $D_M(C_j)/Dt$ можно найти в [12]. В (8) $K^j_{j_1, j_2}$ — это нелинейные матричные элементы интеграла столкновений $\hat{I}$. Они определяются следующим образом:

$$K^j_{j_1, j_2} = \int H_j \hat{I}(M_T H_{j_1}, M_T H_{j_2}) d\mathbf{v}/g_j,$$

$$g_j = \int M_T(c) H_j^2 d\mathbf{v}. \tag{9}$$

Нормировочный множитель g_j имеет вид

$$g_j = y^i_{lm} \sigma_{r,l}, \quad y^i_{lm} = \pi^m_l d^i_m, \tag{10}$$

$$d^i_m = \pi(1 + \delta_{m0})(1 - \delta_{i1}\delta_{m0}),$$

$$\pi^m_l = \int_{-1}^{1} \left(P^m_l(x)\right)^2 dx = \frac{2(l+m)!}{(2l+1)(l-m)!}, \tag{11}$$

$$\sigma_{r,l} = \int_0^\infty \frac{1}{\pi^{3/2}} e^{-c^2} \left(S^{(r)}_{l+1/2}(c^2) c^l\right)^2 c^2 dc = \frac{\Gamma(r + l + 3/2)}{2\pi^{3/2} r!}, \tag{12}$$

Именно матричные элементы (9) благодаря полученным в [1] рекуррентным соотношениям теперь могут вычисляться при очень больших индексах.

В одномерных пространственных проблемах ФР по скоростям осесимметрична, и она разлагается по сферическим полиномам Эрмита с двумя индексами r и l: $H_{rl} = S^r_{l+1/2} P_l(\cos\Theta)$, т.е. от четырех чисел в индексе j переходим к двум. При этом осесимметричные МЭ $K^{r,l}_{r_1,l_1,r_2,l_2}$ существенно упрощаются:

$$K^{r,l}_{r_1,l_1,r_2,l_2} = K^{r,l,0,0}_{r_1,l_1,0,0,r_2 l_2,0,0}.$$

Очень важным для дальнейшего оказался тот факт (см. [1]), что трехмерные МЭ пропорциональны соответствующим осесимметричным МЭ

$$K^{r,l,m,i}_{r_1,l_1,m_1,i_1,r_2,l_2,m_2,i_2} = \check{Z}^{lmi}_{l_1 m_1 i_1, l_2 m_2 i_2} K^{r,l}_{r_1,l_1,r_2,l_2}, \tag{13}$$

где $\check{Z}^{lmi}_{l_1 m_1 i_1, l_2 m_2 i_2}$ — не зависящие от сечения рассеяния универсальные числовые коэффициенты, легко выражающиеся через коэффициенты Клебша–Гордана (см. [1], стр. 190–191). Можно показать, что

$$\check{Z}^{lmi}_{l_1 m_1 i_1, l_2 m_2 i_2} = \frac{\int Y^i_{l,m}(\Theta,\varphi) Y^{i_1}_{l_1,m_1}(\Theta,\varphi) Y^{i_2}_{l_2,m_2}(\Theta,\varphi) d\Omega}{\int_{-1}^{1} P_l(x) P_{l_1}(x) P_{l_2}(x) dx} \, \frac{y^0_{l0}}{y^i_{lm}}. \tag{14}$$

Существенно, что числа $\check{Z}^{lmi}_{l_1 m_1 i_1, l_2 m_2 i_2}$ могут отличаться от нуля, только если $|l_l - l_2| \le l \le l_1 + l_2$, $l + l_1 + l_2$ — четное число, $m = |m_1 \pm m_2|$ и $i + i_1 + i_2$ — четное число (обобщенная теорема Гекке [13]). В [1] показано, что для линейных МЭ, когда j_1 или j_2 равны нулю, $\check{Z} = 1$ и соответственно либо $(l_2, m_2, i_2) = (l, m, i)$, либо $(l_1, m_1, i_1) = (l, m, i)$.

При разложении ФР можно остановиться на этапе разложения по сферическим гармоникам, не проводя разложения по полиномам Сонина. При таком разложении не возникает ограничений, связанных с критерием Грэда, и ФР представляется в виде

$$f(\mathbf{v}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{l} \sum_{i=0}^{1} f^i_{l,m}(v) Y^i_{l,m}(\Theta,\varphi). \tag{15}$$

В работе [4] показано, что интеграл столкновений можно записать в виде

$$\hat{I}(f, f) = \int G(\mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) f(\mathbf{v}_1) f(\mathbf{v}_2) d\mathbf{v}_1 d\mathbf{v}_2. \tag{16}$$

Интегрирования проводятся по всему пространству скоростей, а ядро $G(\mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ имеет форму

$$G(\mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = M_T(c) \times \sum_{j, j_1, j_2} H_j(\mathbf{c}) K^j_{j_1, j_2} H_{j_1}(\mathbf{c}_1) H_{j_2}(\mathbf{c}_2)/(g_{j_1} g_{j_2}). \tag{17}$$

Здесь векторы $\mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ связаны с векторами $\mathbf{c}, \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2$, согласно формуле (4).

Используя свойство (13) и тот факт, что коэффициенты $\check{Z}$ не зависят от индексов r, r_1, r_2, получаем более простое представление ядра

$$G(\mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \sum_{l,m,i} \sum_{l_1,m_1,i_1} \sum_{l_2 m_2, i_2} Y^i_{lm}(\Theta,\varphi) \check{Z}^{lmi}_{l_1 m_1 i_1, l_2 m_2 i_2} \times G^l_{l_1,l_2}(v, v_1, v_2) \frac{Y^{i_1}_{l_1 m_1}(\Theta_1,\varphi_1) Y^{i_2}_{l_2 m_2}(\Theta_2,\varphi_2)}{y^{i_1}_{l_1,m_1} y^{i_2}_{l_2 m_2}}, \tag{18}$$

где

$$G^l_{l_1,l_2}(v, v_1, v_2) = M_T(c) \sum_{r,r_1,r_2} c^l S^r_{l+1/2}(c^2) K^{rl}_{r_1 l_1, r_2 l_2} \times \frac{c_1^{l_1} S^{r_l}_{l_1+1/2}(c_1^2)}{\sigma_{r_1 l_1}} \, \frac{c_2^{l_2} S^{r_2}_{l_2+1/2}(c_2^2)}{\sigma_{r_2 l_2}}. \tag{19}$$

Отметим, что теперь для построения ядра $G(\mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ достаточно знания „осесимметричных“ ядер $G^l_{l,l_2}(v, v_1, v_2)$, которые в свою очередь выражаются через осесимметричные МЭ $K^{rl}_{r_1 l_1, r_2 l_2}$. Подчеркнем, что нелинейные ядра $G^l_{l_1,l_2}$ зависят только от скорости.

Умножим обе части уравнения Больцмана (1) на функцию $Y^i_{lm}(\Theta,\varphi)/y^i_{lm}$ и проинтегрируем по Θ и φ. Если затем в интеграле столкновений (16) с ядром в виде (18) выполнить интегрирования по угловым переменным Θ_1,φ_1 и Θ_2,φ_2, то можно получить следующую систему уравнений для проекций ФР на сферические гармоники

$$\frac{\tilde{D}}{\tilde{D}t}\left(n_0 f^i_{lm}(v)\right) = n_0^2 \sum_{\substack{l_1,m_1,i_1\\ l_2,m_2,i_2}} \check{Z}^{lmi}_{l_1 m_1 i_1, l_2 m_2 i_2}$$

$$\times \int_0^\infty \int_0^\infty G^l_{l_1,l_2}(v,v_1,v_2) f^{i_1}_{l_1 m_1}(v_1) f^{i_2}_{l_2 m_2}(v_2) v_1^2 v_2^2 dv_1 dv_2. \tag{20}$$

В настоящей статье не будем касаться вида дифференциального оператора $\tilde{D}/\tilde{D}t$. В соотношении (20) суммирования проводятся по индексам, удовлетворяющим обобщенной теореме Гекке [13].

Зная нелинейные ядра, можно определить линейные ядра первого и второго типов

$$L^{(1)}(\mathbf{v},\mathbf{v}_1) = \int G(\mathbf{v},\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2) M_T(\mathbf{v}_2) d\mathbf{v}_2,$$

$$L^{(2)}(\mathbf{v},\mathbf{v}_2) = \int G(\mathbf{v},\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2) M_T(\mathbf{v}_1) d\mathbf{v}_1. \tag{21}$$

Максвеллиан в этих формулах зависит только от модуля скорости, и при интегрировании по углам в сумме (18) остаются только те ядра $G^l_{l_1,l_2}(v,v_1,v_2)$, у которых $l_2=0$ или $l_1=0$. Если воспользоваться теоремой Гекке, то получим

$$L^{(1)}_l(v,v_1) = \int_0^\infty G^l_{l,0}(v,v_1,v_2) M_T(c_2) v_2^2 dv_2, \tag{22}$$

$$L^{(2)}_l(v,v_2) = \int_0^\infty G^l_{0,l}(v,v_1,v_2) M_T(c_1) v_1^2 dv_1. \tag{23}$$

Если в формуле (19) температура максвеллиана была произвольной, то в (22), (23) температура имеет вполне определенный физический смысл. При линеаризации уравнения Больцмана линейный оператор применяется к отклонению ФР от равновесной. В линейной задаче о релаксации примеси на равновесном фоне газа другого сорта температура максвеллиана равна температуре равновесного фона. Температуру максвеллиана, около которого проводится разложение ФР, для краткости будем называть „фоновой“.

Нелинейные ядра $G^l_{l_1,l_2}(v,v_1,v_2)$ несимметричны относительно перестановок $v_1 \rightleftarrows v_2$ или $l_1 \rightleftarrows l_2$, поэтому линейные ядра (22) и (23) не равны. Способ интегрирования в (22) и (23) однозначно определен и согласуется с определением МЭ первого $K^j_{j_1,0}$ и второго K^j_{0,j_2} типов [1].

Рассмотрим вклад от $G^l_{l_1,l_2}(v,v_1,v_2)$ в интеграл столкновений

$$\left(\frac{df_l}{dt}\right)_{\text{col}} = \int C^l_{l_1,l_2}(v,v_1,v_2) f_{l_1}(v_1) f_{l_2}(v_2) v_1^2 v_2^2 dv_1 dv_2. \tag{24}$$

Здесь четко определено правило интегрирования в нелинейных операторах с несимметричными ядрами $G^l_{l_1,l_2}(v,v_1,v_2)$: индексу l_1 (первому нижнему индексу) соответствует скорость v_1 (второй аргумент y функции G), а индексу l_2 (второму нижнему индексу) — скорость v_2 (третий аргумент). Именно такой порядок дает правильный способ определения линейных ядер (22) и (23).

Следует отметить, что формулы разложения ядер по полиномам Сонина, аналогичные (19), использовались нами при построении линейных ядер для псевдомаксвелловских молекул [5] и твердых шаров [6]. В этих работах исследовалась часть ядра, соответствующая приходному члену интеграла столкновений. При вычислении таких ядер для оценки остатка ряда использовалась асимптотика МЭ и полиномов Сонина при больших значениях индексов.

Следующим шагом в этом направлении является построение нелинейных ядер $G^l_{l_1,l_2}$ по формуле (19). Для решения этой задачи прежде всего необходимо изучить некоторые общие свойства таких ядер. Этому вопросу и посвящена данная статья.

2. Инвариантность ядра при изменении температуры базисного максвеллиана

Каждое ядро $G^l_{l_1,l_2}$ при фиксированных l,l_1,l_2 зависит только от абсолютных значений скорости v,v_1,v_2. При заданном сечении рассеяния каждое из этих ядер является универсальной функцией указанных трех переменных. Очевидно, что такие ядра могут быть построены в любом температурном базисе и переходу от одного базиса к другому соответствует только изменение единицы измерения скорости, т. е. масштаба. Математическое доказательство этого факта, основанное на представлении ядра через полиномы Сонина (19) и на связи нелинейных МЭ в двух произвольных базисах [1], можно найти в Приложении.

Отметим, что температура базисного максвеллиана T является главным параметром при представлении ядра в виде суммы (19). Ядра, построенные по (19) в базисе с температурой T_0, обозначим $G^l_{l_1,l_2;T_0}(c,c_1,c_2)$.

Если для нелинейного ядра переход от базиса с температурой T_0 к базису с другой температурой T_1 приведет только к изменению масштаба, то об ядре линейного интеграла столкновений этого сказать нельзя. Здесь переход к новому температурному базису приводит не только к изменению масштаба, но и к изменению самого ядра, так как в новом базисе максвеллиан, на котором происходит рассеяние рассматриваемых частиц, представляется в виде ряда по полиномам Сонина

$$M_{T_0}(c) = M_{T_1}(w) \sum_{k=0}^{\infty} \left(1 - \frac{T_0}{T_1}\right)^k S_{1/2}^k(w^2),$$

$$w = \sqrt{\frac{T_0}{T_1}}\, c. \tag{25}$$

Если в (23) подставить выражение нелинейного ядра (19) в базисе с температурой, совпадающей с температурой „фонового" максвеллиана, и учесть ортогональность полиномов Сонина, то можно уменьшить число суммирований и выразить ядра через линейные МЭ:

$$L_l^{(1)}(v, v_1) = M_{T_0}(c) \times \sum_{r, r_1} c^l S_{l+1/2}^r(c^2) K_{r_1 l, 00}^{rl}(T_0)\, \frac{c_1^l S_{l+1/2}^{r_l}(c_1^2)}{\sigma_{r_1 l}},$$

$$L_l^{(2)}(v, v_2) = M_{T_0}(c) \times \sum_{r, r_2} c^l S_{l+1/2}^r(c^2) K_{00, r_2 l}^{rl}(T_0)\, \frac{c_1^l S_{l+1/2}^{r_2}(c_1^2)}{\sigma_{r_2 l}}. \tag{26}$$

Однако выразить линейные ядра через линейные МЭ можно только в одном базисе. В любом другом базисе, температура которого не будет совпадать с „фоновой", в соответствии с (25) сокращения числа суммирований не произойдет.

Если рассмотреть линейные ядра при различных температурах „фонового" максвеллиана, то получим множество линейных ядер, которые можно назвать линейными ядрами в разных базисах. Эти ядра получаются при интегрировании универсального нелинейного ядра с разными „фоновыми" максвеллианами. Поскольку при таком интегрировании основной вклад дает нелинейное ядро в окрестности тепловых скоростей, то при разных температурах, вообще говоря, будут получаться различные линейные ядра.

Рассмотрим нелинейные ядра в двух базисах, средняя скорость у которых совпадает, а температуры различаются; обозначим эти температуры T_0 и T_1. Сохраним обозначения для безразмерных скоростей: c в базисе T_0, и w в базисе T_1. Обозначим

$$\frac{T_1}{T_0} = \varkappa^2. \tag{27}$$

Тогда фиксированным скоростям $v_i(v, v_1, v_2)$ соответствуют такие c_i и w_i, что

$$\frac{c_i}{w_i} = \varkappa. \tag{28}$$

Из универсальности ядра следует, что ядра в базисах T_0 и T_1 в точках, связанных соотношением (28), равны

$$G_{l_1, l_2; T_0}^l(c, c_1, c_2) = G_{l_1, l_2; T_1}^l(w, w_1, w_2). \tag{29}$$

Именно это свойство и доказано в Приложении.

В [5] и [6] строились линейные ядра с помощью сумм (26) и было установлено, что при больших значениях скорости c_i возникает проблема вычисления ядер. Это связано со сложностью асимптотики по r полиномов Сонина при больших значениях аргументов. При построении нелинейных ядер в случае больших значений c, c_1, c_2 эту сложность можно обойти, если использовать свойство (28), (29). Пусть строится ядро для точки, в которой $c^2 + c_1^2 + c_2^2 \gg 1$. Перейдем в базис T_1 и выберем $\varkappa$ так, чтобы $w^2 + w_1^2 + w_2^2 \approx 1$. Теперь аргументы всех полиномов Сонина в (19) невелики и проблем со сходимостью не должно возникнуть. Далее, построив ядро $G_{l_1, l_2; T_1}^l(w, w_1, w_2)$ в базисе T_1, с помощью (29) найдем ядро $G_{l_1, l_2; T_0}^l(c, c_1, c_2)$; в точках $c_i = \varkappa w_i$. Следует подчеркнуть, что при вычислении ядра в новом базисе T_1 необходимо знать МЭ в этом базисе. В некоторых случаях зависимость МЭ от температуры известна аналитически и тогда этот вопрос решается просто. Это верно, например, для степенных потенциалов (см. следующий раздел). В общем случае для построения МЭ в каждом из базисов необходимо вычислить в этом базисе Ω-интегралы, а затем, воспользовавшись рекуррентными соотношениями для коэффициентов разложения МЭ по Ω-интегралам [1], построить все необходимые МЭ.

Перейдем теперь к векторным переменным: $\mathbf{c}, \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2$ в базисе T_0 и $\mathbf{w}, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ — в базисе T_1. Из (18) и (19) следует, что

$$G_{T_0}(\mathbf{c}, \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2) = G_{T_1}(\mathbf{w}, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2), \tag{30}$$

если векторы связаны соотношениями

$$\mathbf{c} = \varkappa \mathbf{w}, \quad \mathbf{c}_1 = \varkappa \mathbf{w}_1, \quad \mathbf{c}_2 = \varkappa \mathbf{w}_2. \tag{31}$$

Таким образом, основное свойство нелинейных ядер, вытекающее из инвариантности интеграла столкновений при изменении температуры базиса, есть (30), (31) или более детальное соотношение (28), (29).

В следующем разделе будет показано, как использовать свойство (29), (28) в случае степенных потенциалов.

3. Степенные потенциалы

В случае степенной зависимости потенциала взаимодействия сталкивающихся частиц V от расстояния r ($V \propto 1/r^\kappa$) сечение рассеяния представляется в виде

$$g\sigma(g, z) = g^\gamma F_\gamma(z), \quad z = \sin^2(\theta/2), \quad \gamma = (\kappa - 4)/\kappa. \tag{32}$$

Здесь θ — угол рассеяния, а g — относительная скорость. Для степенных потенциалов зависимость сечения от угла и скорости расщепляется и зависимость от скорости оказывается степенной. Можно рассмотреть модели квазистепенного потенциала, когда угловая зависимость сечения рассеяния выбирается произвольной, но не зависящей от g, а зависимость сечения от g полагается степенной. Частный случай таких моделей — псевдостепенные потенциалы, когда рассеяние полагается изотропным $F_\gamma(z) = \text{const}$. Для этих моделей матричные элементы степенным образом зависят от температуры, причем для фиксированного значения κ все матричные элементы зависят от температуры одинаково, а именно как T^μ, где $\mu = \gamma/2$ [1]. Отметим, что для модели твердых шаров $\mu = 0.5$, а для максвелловских молекул — $\mu = 0$. Итак, для степенных (и квазистепенных) потенциалов имеет место соотношение

$$k^{rl}_{r_1 l_1 r_2 l_2}(T_1) = \left(\frac{T_1}{T_0}\right)^\mu K^{rl}_{r_1 l_1 r_2 l_2}(T_0). \tag{33}$$

Покажем, что в случае степенных потенциалов значения ядер $G^l_{l_1,l_2;T}(c, c_1, c_2)$ и $G^l_{l_1,l_2;T}(sc, sc_1, sc_2)$, где s — произвольная константа, связаны очень простым соотношением. Представим функцию $G^l_{l_1,l_2;T_0}(c, c_1, c_2)$ в виде

$$G^l_{l_1,l_2;T_0}(c, c_1, c_2) = \left(\frac{m}{2kT_0\pi}\right)^{3/2} U_{T_0}(c, c_1, c_2), \tag{34}$$

где

$$U_{T_0}(c, c_1, c_2) = e^{-c^2} \sum_{r,r_1,r_2} c^l S^r_{l+1/2}(c^2) K^{rl}_{r_1 l_1, r_2 l_2}(T_0)$$
$$\times \frac{c_1^{l_1} S^{r_l}_{l_1+1/2}(c_1^2)}{\sigma_{r_1 l_1}} \frac{c_2^{l_2} S^{r_2}_{l_2+1/2}(c_2^2)}{\sigma_{r_2 l_2}}, \tag{35}$$

и для краткости индексы l, l_1, l_2 у функции U опущены.

Для отношения ядер в точках, связанных (28), имеем в соответствии с (29)

$$1 = \frac{G^l_{l_1,l_2;T_0}(c, c_1, c_2)}{G^l_{l_1,l_2;T_1}(w, w_1, w_2)} = \left(\frac{T_1}{T_0}\right)^{3/2} \frac{U_{T_0}(c, c_1, c_2)}{U_{T_1}(w, w_1, w_2)}. \tag{36}$$

По определению функции U имеем в базисе T_1

$$U_{T_1}(w, w_1, w_2) = e^{-w^2} \sum_{r,r_1,r_2} w^l S^r_{l+1/2}(w^2) K^{rl}_{r_1 l_1, r_2 l_2}(T_1)$$
$$\times \frac{w_1^{l_1} S^{r_l}_{l_1+1/2}(w_1^2)}{\sigma_{r_1 l_1}} \frac{w_2^{l_2} S^{r_2}_{l_2+1/2}(w_2^2)}{\sigma_{r_2 l_2}}$$

или с учетом (33)

$$U_{T_1}(w, w_1, w_2) = \left(\frac{T_1}{T_0}\right)^\mu e^{-w^2} \sum_{r,r_1,r_2} w^l S^r_{l+1/2}(w^2)$$
$$\times K^{rl}_{r_1 l_1, r_2 l_2}(T_0) \frac{w_1^{l_1} S^{r_l}_{l_1+1/2}(w_1^2)}{\sigma_{r_1 l_1}} \frac{w_2^{l_2} S^{r_2}_{l_2+1/2}(w_2^2)}{\sigma_{r_2 l_2}}. \tag{37}$$

Подчеркнем, что поскольку МЭ, стоящие в правой части (37), вычисляются в базисе T_0, то и все стоящее там выражение, за исключением $(T_1/T_0)^\mu$, в соответствии с (35) представляет собой функцию U опять в базисе T_0, но уже в другой точке w_i. Значения w_i и c_i связаны, согласно (28), соотношением $w_i = c_i/\varkappa$.

Из (36) и (37) получаем

$$\frac{U_{T_0}(c, c_1, c_2)}{U_{T_0}\left(\frac{c}{\varkappa}, \frac{c_1}{\varkappa}, \frac{c_2}{\varkappa}\right)} = \left(\frac{T_1}{T_0}\right)^{-3/2+\mu}. \tag{38}$$

Перейдем от $\varkappa$ к параметру подобия $s = 1/\varkappa$ и выразим отношение температур через этот параметр в соответствии с (27). Учтем также, что при фиксированной температуре базиса отношение ядер в двух разных точках равно отношению функций U в этих точках (34). Тогда получим

$$G^l_{l_1,l_2;T}(sc, sc_1, sc_2) = s^{-3+2\mu} G^l_{l_1,l_2;T}(c, c_1, c_2). \tag{39}$$

Здесь из-за произвольности отношения T_1/T_0 следует, что параметр s принимает любые значения $(0 < s < \infty)$, а в силу произвольности температуры базиса T_0 соотношение выполнено в любом базисе.

Таким образом, нелинейное ядро при изменении всех скоростей на один и тот же коэффициент преобразуется очень просто: оно умножается на некоторый коэффициент, сохраняя исходную зависимость от отношений скоростей. Если ядро $G^l_{l_1,l_2;T}(c, c_1, c_2)$ задано на некоторой поверхности в пространстве (c, c_1, c_2), то оно легко находится на подобной ей поверхности, получаемой из исходной при умножении всех координат на параметр s. Равенство (39) будем называть соотношением подобия для ядра $G^l_{l_1,l_2;T}(c, c_1, c_2)$.

Из формулы (18) следует аналогичное соотношение для ядра от векторных переменных

$$G(s\mathbf{v}, s\mathbf{v}_1, s\mathbf{v}_2) = s^{-3+2\mu} G(\mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2). \tag{40}$$

Возвращаясь к ядрам $G^l_{l_1,l_2;T}(c, c_1, c_2)$, рассмотрим ядро на поверхности сферы в пространстве (c, c_1, c_2). Обозначим

$$Al = \sqrt{c^2 + c_1^2 + c_2^2}. \tag{41}$$

На сфере радиуса Al ядро задано на участке поверхности, определяемой условием $c \geq 0$, $c_1 \geq 0$, $c_2 \geq 0$. Для точки на поверхности удобно использовать относительные координаты, например c/Al, c_1/Al, c_2/Al, или угловые переменные $\omega, \omega_1, \omega_2$:

$$\cos\omega = \frac{c}{Al}, \quad \cos\omega_1 = \frac{c_1}{Al}, \quad \cos\omega_2 = \frac{c_2}{Al}. \tag{42}$$

Из (41) следует, что $\cos\omega^2 + \cos\omega_1^2 + \cos\omega_2^2 = 1$, и точка на поверхности задается двумя координатами, например ω и ω_1. Из соотношения (39) следует, что

$$G^l_{l_1,l_2;T}(c, c_1, c_2) = Al^{-3+2\mu}\Psi(\omega, \omega_1),$$
$$0 \leq \omega \leq \pi/2, \quad 0 \leq \omega_1 \leq \pi/2. \tag{43}$$

Конечно, могут быть использованы и другие координаты точки на поверхности. Здесь у функции Ψ опущены индексы l, l_1, l_2 и μ.

Итак, благодаря соотношениям подобия для степенных потенциалов зависимость G от трех переменных c, c_1, c_2 расщепляется на простую зависимость от Al и зависимость Ψ от двух переменных. Искать по формуле (19) следует именно Ψ. При этом для определенных значений ω и ω_1 можно выбирать Al так, чтобы аргументы у полиномов Сонина были не очень велики и сходимость при вычислении сумм была наилучшей. После построения $\Psi(\omega, \omega_1)$ с использованием (43) легко находится ядро для любых, сколь угодно больших значений скорости c. Теперь, проинтегрировав нелинейное ядро G с максвеллианом, легко найдем линейное ядро при любых скоростях, т. е. легко решим проблему построения линейного ядра в области больших скоростей.

Отметим, что в случае степенных потенциалов имеется дополнительное упрощение при определении линейных ядер. Рассмотрим для конкретности линейное ядро первого рода (26). Представим входящие в (26) МЭ в виде

$$K^{rl}_{r_1 l,00}(T) = a(T)\tilde{K}^{rl}_{r_1 l,00}, \tag{44}$$

где $\tilde{K}^{rl}_{r_1 l,00}$ безразмерные МЭ, а $a(T)$ — размерная величина, которая, согласно (33), имеет вполне определенную зависимость от температуры $a(T) \propto T^{\mu}$. Средняя частота столкновений определяется через $a(T)$ следующим образом $\nu(T) = n_0 a(T)$. Существенно, что в случае степенных потенциалов множество $K^{rl}_{r_1 l,00}$ представляет собой набор числовых коэффициентов, которые не изменяются при переходе от одного базиса к другому.

При обезрамеривании уравнения Больцмана следует использовать безразмерную ФР — поделив на $n_0(m/2kT)^{3/2}$ и безразмерное время. Переходу к безразмерному времени соответствует деление обеих частей уравнения на $\nu(T)$. В результате справа выделяется безразмерное ядро $\tilde{L}$, которое определяется следующим образом:

$$\tilde{L}^{(1)}_l(c, c_1) = \tilde{M}(c) \sum_{r, r_1} c^l S^r_{l+1/2}(c^2) \tilde{K}^{rl}_{r_1 l,00} \frac{c_1^l S^{r_1}_{l+1/2}(c_1^2)}{\sigma_{r_1 l}},$$

$$\tilde{M}(c) = \left(\frac{1}{\pi}\right)^{3/2} e^{-c^2}. \tag{45}$$

Здесь $\tilde{M}(c)$ — безразмерный максвеллиан.

Аналогичным образом получаем для линейного ядра соответствующее „фоновой“ температуре T_1:

$$\tilde{L}^{(1)}_l(w, w_1) - \tilde{M}(w) \times \sum_{r, r_1} w^l S^r_{l+1/2}(w^2) \tilde{K}^{rl}_{r_1 l,00} \frac{w_1^l S^{r_l}_{l+1/2}(w_1^2)}{\sigma_{r_1 l}}. \tag{46}$$

Сравнив (45) и (46), видим, что ядра с разными „фоновыми“ температурами равны, если

$$w = c, \quad w_1 = c_1. \tag{47}$$

Это позволяет для любого степенного потенциала построить безразмерное линейное ядро в любом базисе, все остальные ядра равны ему. Именно такие безразмерные ядра рассматривались в литературе. Так, в случае модели твердых шаров получены аналитические формулы для ядра от векторных скоростей в [7], а для изотропных ядер в [8]. С использованием формулы (45) такие ядра изучались в [5] (максвелловские молекулы) и [6] (твердые шары).

Понятно, что все это справедливо и для нелинейных ядер. Таким образом, в случае степенных потенциалов как линейные, так и нелинейные ядра являются универсальными функциями безразмерных скоростей, а для нелинейных ядер выполнены еще и соотношения подобия.

В ряде случаев (изотропное сечение рассеяния, обрезанные потенциалы взаимодействия) ядра $G^l_{l_1,l_2}(v, v_1, v_2)$ могут быть представлены в виде разности приходной части (*gain term*) и уходной части (*loss term*) интеграла столкновений (3), т. е.

$$\hat{I}(f, f) = \hat{I}^+(f, f) - \hat{I}^-(f, f)$$

$$= \iint \big(G^+(\mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) - G^-(\mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)\big) f(\mathbf{v}_1) f(\mathbf{v}_2) d\mathbf{v}_1 d\mathbf{v}_2. \tag{48}$$

Нетрудно показать, что для степенных потенциалов соотношения подобия (39) и (40) выполняются по отдельности для приходного и уходного ядер.

4. Общие свойства ядра оператора $\hat{I}^-(f, f)$

Из соотношения (3) очевидно, что оператор $\hat{I}^-(f, f)$ может быть записан в виде

$$\hat{I}^-(f, f) = f(\mathbf{v}) \hat{I}^-_0(f), \tag{49}$$

где линейный оператор $\hat{I}^-_0(f)$ имеет вид

$$\hat{I}^-_0(f) = \int f(\mathbf{v}') g \Sigma(g) d\mathbf{v}, \quad g = |\mathbf{v} - \mathbf{v}'|.$$

Здесь $\Sigma(g)$ — полное сечение рассеяния.

Сравнив (48) и (49), можно сделать вывод, что в уходном члене должна появиться δ-функция, но остается вопрос — от какого аргумента? Выше говорилось о несимметрии нелинейного ядра относительно перестановки второго и третьего аргументов. Особенно сильно проявляется эта несимметрия именно в уходном члене. Легче всего ответить на поставленный вопрос, рассмотрев смесь частиц двух сортов с ФР: f_a и f_b.

Для уходной части интеграла столкновений частиц сорта a на частицах сорта b имеем, с одной стороны,

$$\left(\frac{df_a(\mathbf{v}^a)}{dt}\right)^-_{a,b} = \int G^{-,a}_{a,b}(\mathbf{v}^a, \mathbf{v}^a_1, \mathbf{v}^b_2) f_a(\mathbf{v}^a_1) f_b(\mathbf{v}^b_2) d\mathbf{v}^a_1 d\mathbf{v}^b_2. \tag{50}$$

Здесь соответствие индексов (a, b) и аргументов $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ выбрано согласно правилу (24). С другой стороны,

$$\left(\frac{df_a(\mathbf{v}^\mathbf{a})}{dt}\right)^-_{a,b} = f_a(\mathbf{v}^a)\int g\Sigma_{ab}(g)f_b(\mathbf{v}_2^b)d\mathbf{v}_2^b. \quad (51)$$

Из (50) и (51) видим, что δ-функция действует в точке, соответствующей положению второго аргумента в ядре G^-, т.е.

$$G^{-,a}_{a,b}(\mathbf{v}^\mathbf{a}, \mathbf{v}_1^a, \mathbf{v}_2^b) = \delta(\mathbf{v}_1^a - \mathbf{v})(L_G)_{a,b}(\mathbf{v}^a, \mathbf{v}_2^b), \quad (52)$$

где $(L_G)_{a,b}$ — ядро некоторого линейного оператора.

Рассмотрим нелинейный матричный элемент от уходной части интеграла столкновений $K^{-,j}_{j_1,j_2}$ и покажем, что он выражается через линейные МЭ второго типа. При определении матричных элементов в [1] было выбрано соответствие между индексами и аргументами, которое совпадает с правилом (24). При этом уходная часть интеграла столкновений от двух полиномов Эрмита определялась следующим образом:

$$\hat{I}^-\big[M_T(c_1)H_{j_1}(\mathbf{c}_1), M_T(c_2)H_{j_2}(\mathbf{c}_2)\big]$$
$$= M_T(c)H_{j_1}(\mathbf{c})\hat{I}_0^-\big[M_T(c_2)H_{j_2}(\mathbf{c}_2)\big]. \quad (53)$$

В результате для МЭ уходной части интеграла столкновений имеем

$$K^{-j}_{j_1,j_2} = \int H_j(\mathbf{c})M_T(c)H_{j_1}(\mathbf{c})\hat{I}_0^-\big(M_T(c_2)H_{j_2}(\mathbf{c}_2)\big)d\mathbf{v}/g_j. \quad (54)$$

Здесь индекс j соответствует паре чисел r и l, а H_j представляют собой произведения полиномов Лежандра на полиномы Сонина.

В рассматриваемом случае под знаком интеграла в (54) стоит произведение полиномов $H_jH_{j_1}$ от одного и того же аргумента $\mathbf{c}$. Такое произведение можно разложить в ряд по полиномам Эрмита с коэффициентами R_{j',j,j_1}

$$M_T(c)H_j(\mathbf{c})H_{j_1}(\mathbf{c}) = M_T(c)\sum_{j'} R_{j',j,j_1}H_{j'}(\mathbf{c}),$$

$$R_{j',j,j_1} = \int M_T(c')H_j(\mathbf{c}')H_{j_1}(\mathbf{c}')H_{j'}(\mathbf{c}')d\mathbf{v}'/g_{j'}. \quad (55)$$

Подставив (55) в (54) и учитывая (53), получим

$$K^{-,j}_{j_1,j_2} = \sum_{j'} R_{j',j,j_1}$$
$$\times \int H_{j'}(\mathbf{c})M_T(c)\hat{I}_0^-\big(M_T(c_2)H_{j_2}(\mathbf{c}_2)\big)d\mathbf{v}/g_j$$
$$= \sum_{j'} R_{j',j,j_1}\frac{g_{j'}}{g_j}$$
$$\times \int H_{j'}(\mathbf{c})\hat{I}^-\big(M_T(c_1)(\mathbf{c}_1), M_T(c_2)H_{j_2}(\mathbf{c}_2)\big)d\mathbf{v}/g_{j'}$$
$$= \sum_{j'} B^j_{j',j_1}K^{-,j'}_{0,j_2}, \quad (56)$$

где

$$B^j_{j',j_1} = \frac{g_{j'}}{g_j}R_{j',j,j_1}$$
$$= \frac{1}{g_j}\int M_T(c')H_j(\mathbf{c}')H_{j_1}(\mathbf{c}')H_{j'}(\mathbf{c}')d\mathbf{v}'. \quad (57)$$

Итак, не только показано, что нелинейный уходный МЭ выразился через линейные уходные МЭ второго типа, но и получен явный вид коэффициентов разложения B^j_{j',j_1}. Эти коэффициенты оказались универсальными, не зависящими от потенциала взаимодействия частиц.

Обозначим $c^lS^r_{l+1/2}(c^2) = s^r_l(c)$ и подставим представление уходного МЭ (56) в выражение для ядра (19), воспользовавшись теоремой Гекке для линейных МЭ $(l' = l_2)$

$$G^{-,l}_{l_1,l_2}(v, v_1, v_2) = M_T(c)$$
$$\times \sum_{r,r_1,r_2,r'} s^r_l(c)B^{rl}_{r'l_2,r_1l_1}K^{-,r'l_2}_{0,0,r_2l_2}\frac{s^{r_1}_{l_1}(c_1)}{\sigma_{r_1l_1}}\frac{s^{r_2}_{l_2}(c_2)}{\sigma_{r_2l_2}}. \quad (58)$$

Запишем $B^{rl}_{r'l_2,r_1l_1}$ в виде

$$B^{rl}_{r'l_2,r_1l_1} = C^l_{l_1l_2}b^{rl}_{r'l_2,r_1l_1}, \quad (59)$$

где

$$C^l_{l_1l_2} = \int_{-1}^{1} P_l(x)P_{l_1}(x)P_{l_2}(x)dx/\pi^0_l, \quad (60)$$

$$b^{rl}_{r'l_2,r_1l_1} = \int_0^\infty M_T(c')s^r_l(c')s^{r'}_{l_2}(c')s^{r_1}_{l_1}(c')v'^2dv'/\sigma_{rl}, \quad (61)$$

а π^0_l и σ_{rl} — нормировочные множители (10).

Подставим (59) в (58) и, воспользовавшись (61), поменяем местами порядки суммирования и интегрирования. Тогда, дважды пользуясь свойством полноты полиномов Сонина

$$M_T(c)\sum_r s^r_l(c)\frac{s^r_l(c')}{\sigma_{rl}} = \frac{\delta(v-v')}{v^2},$$

получим

$$G^{-,l}_{l_1,l_2}(v, v_1, v_2)$$
$$= C^l_{l_1l_2}\sum_{r',r_2}\int s^{r'}_{l_2}(c')\frac{d(v-v_1)}{v_1^2}\delta(v-v')dv'K^{-,r'l_2}_{0,0,r_2l_2}\frac{s^{r_2}_{l_2}(c_2)}{\sigma_{r_2l_2}}$$
$$= \frac{\delta(v-v_1)}{v_1^2}C^l_{l_1l_2}L^{l_2}_G(v, v_2), \quad (62)$$

где линейные ядра $L^l_G(v, v_2)$ определяются следующим образом:

$$L^l_G(v, v_2) = \sum_{r,r_2} c^lS^r_{l+1/2}(c^2)K^{-,rl}_{0,0,r_2l}\frac{c_2^lS^{r_2}_{l+1/2}(c_2^2)}{\sigma_{r_2l}}. \quad (63)$$

Теперь рассмотрим уходное ядро от векторных скоростей. Подставим (62) в (18), заметив, что, согласно (14) и (60), коэффициенты $\check{Z}^{lmi}_{l_1m_1i_1,l_2m_2i_2}$ можно представить в виде

$$\check{Z}^{lmi}_{l_1m_1i_1,l_2m_2i_2} = \frac{\int Y^i_{lm}(\Theta,\varphi)Y^{i_1}_{l_1m_1}(\Theta,\varphi)Y^{i_2}_{l_2m_2}(\Theta,\varphi)d\Omega/y^i_{lm}}{C^l_{l_1l_2}}. \tag{64}$$

Проведя выкладки, аналогичные приведенным выше, и пользуясь условием полноты для сферических гармоник

$$\sum_{lmi} \frac{Y^i_{lm}(\Theta,\varphi)Y^i_{lm}(\Theta',\varphi')}{y^i_{lm}} = \frac{\delta(\Theta-\Theta')}{\sin\Theta}\,\delta(\varphi-\varphi'), \tag{65}$$

получим

$$G^-(\mathbf{v},\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2) = \delta(\mathbf{v}-\mathbf{v}_1)L_G(\mathbf{v},\mathbf{v}_2), \tag{66}$$

$$L_G(\mathbf{v},\mathbf{v}_2) = \sum_{l,m,i} Y^i_{lm}(\Theta,\varphi)L^l_G(v,v_2)\,\frac{Y^i_{lm}(\Theta_2,\varphi_2)}{y^i_{l,m}}. \tag{67}$$

Покажем, что в случае степенных потенциалов ядра $L^l_G(v,v_2)$ и $L_G(\mathbf{v},\mathbf{v}_2)$ тоже обладают подобием. Учитывая, что равенства (39) и (40) справедливы не только для ядра G, а и для уходного ядра G^-, и принимая во внимание, что $\delta(sx) = s^{-1}\delta(x)$, получим

$$G^{-l}_{l_1,l_2}(sv,sv_1sv_2) = \frac{s^{-3}\delta(v-v_1)}{v_1^2}\,C^l_{l_1l_2}L^{l_2}_G(sv,sv_2)$$

$$= s^{-3+2\mu}\,\frac{\delta(v-v_1)}{v_1^2}\,C^l_{l_1l_2}L^{l_2}_G(v,v_2)$$

или

$$L^{l_2}_G(sv,sv_2) = s^{2\mu}L^{l_2}_G(v,v_2). \tag{68}$$

Соответственно из (67) получим

$$L_G(s\mathbf{v},s\mathbf{v}_2) = s^{2\mu}L_G(\mathbf{v},\mathbf{v}_2). \tag{69}$$

Понятно, что эти же свойства подобия сохраняются и при переходе к безразмерным скоростям c и безразмерным ядрам $\tilde{L}$ (см. предыдущий раздел (45) и (46)). Ниже будем рассматривать все функции и операторы безразмерными, сохранив прежние обозначения.

Для сравнения с известными результатами проведем линеаризацию интеграла столкновений, полагая $f(\mathbf{c}) = M(c)[1+\varphi(\mathbf{c})]$, где $\varphi(\mathbf{c})$ — малая добавка. При этом, используя (66), для уходной части интеграла столкновений получим

$$\hat{I} = \int A^-(\mathbf{c},\mathbf{c}_1)\varphi(\mathbf{c}_1)d\mathbf{c}_1 + k_H(c)\varphi(\mathbf{c}), \tag{70}$$

$$A^{-1}(\mathbf{c},\mathbf{c}_1) = M(c)M(c_1)L_G(\mathbf{c},\mathbf{c}_1),$$

$$k_H(c) = \int A^-(\mathbf{c},\mathbf{c}_1)d\mathbf{c}_1. \tag{71}$$

Используя (63) и (67) и учитывая изотропность максвеллиана, получим, что $k_H(c)$ в (71) можно записать в виде произведения $k(c)M(c)$, где

$$k(c) = \int L^0_G(c,c_1)M(c_1)c_1^2dc_1 = \sum_r S^r_{1/2}(c^2)K^{-r,0}_{0,0,00}. \tag{72}$$

Отсюда следует, что $k(c)$ зависит только от скалярной величины — модуля скорости $\mathbf{c}$ и определяется простейшими линейными изотропными МЭ.

Как уже отмечалось, аналитическое выражение для ядра линеаризованного интеграла столкновений для потенциала твердых шаров получено еще в [7], а его разложение по полиномам Лежандра в [8]. Если отделить в этом результате уходный интегральный опрератор, то для коэффициента в разложении интеграла столкновений по полиномам Лежандра получим

$$I^{-,l} = k_H(c)\varphi^l(c) + \int A^{-,l}(c,c_2)\varphi^l(c_2)c_2^2dc_2, \tag{73}$$

где $\varphi^l(c)$ — коэффициент в разложении ФР $\varphi(c)$ по полиномам Лежандра, и

$$A^{-,l}(c,c_1) = M(c)M(c_1)L^l_G(c,c_1).$$

При этом

$$L^l_G(c,c_1) = -\frac{4\pi}{2l+1}\left[\frac{mi^{2l-1}}{(2l-1)(cc_1)^{l-1}} - \frac{mi^{2l+3}}{(2l+3)(cc_1)^{l+1}}\right],$$

$$mi = min(c,c_1). \tag{74}$$

Здесь учтено, что ядра Гильберта–Гекке определены с противоположным знаком. Нетрудно проверить, что в (74)

$$L^l_G(sc,sc_1) = sL^l_G(c,c_1)$$

при любом l, что как раз и является соотношением подобия (68) для модели твердых шаров ($\mu = 0.5$). Отметим, что подобия не существует для уходной части ядер Гильберта–Гекке $A^{-,l}$, но оно имеет место для входящих в них ядер L^l_G.

Таким образом, соотношения подобия, которые выведены из общих соображений, проверены на частном случае модели твердых шаров. Получено аналитическое выражение для ядер L^l_G, а следовательно и в соответствии с (62) получено аналитическое представление уходного ядра для нелинейной задачи.

Заключение

С использованием представления ядер интеграла столкновений через МЭ установлен ряд их общих свойств. В частности, для степенных (и квазистепенных) потенциалов выполнены соотношения подобия, что существенно упрощает вычисление как самих нелинейных ядер, так и линейных ядер, которые получаются из них путем интегрирования с максвелловским распределением.

Для уходной части интеграла столкновений показано, что нелинейные ядра выражаются через линейные ядра L^l_G. В случае произвольных законов взаимодействия эти ядра выражаются через матричные элементы второго типа (63). Необходимо исследовать, как с помощью этих формул, учитывая соотношения подобия, можно построить ядра L^l_G. Решение этой задачи выходит за рамки данной статьи.

Приложение

В определении (19) ядер $G^l_{l_1,l_2}$ как функций v, v_1, v_2 использованы МЭ и безразмерные скорости, зависящие от выбранного температурного базиса. Для доказательства корректности определения необходимо показать, что так определенные ядра действительно не зависят от температуры базисного максвеллиана. С этой целью для произвольного целого l определим набор функций $\mathbf{H}^l = \{\tilde{M}(c)c^l S^r_{l+1/2}(c^2)\}$. Функции из $\mathbf{H}^l$ образуют базис для множества $\mathbb{F}$ зависящих только от модуля скорости ФР $f(v)$, рассматриваемых в температурном базисе T, т.е. для множества функций $\varphi(c) = \alpha^{-3/2} f(c/\sqrt{\alpha})$, где $\alpha = m/2kT$. Чтобы подчеркнуть зависимость функций из $\mathbf{H}^l$ от T, обозначим элементы базиса через $|l, r, T\rangle$.

Рассмотрим сопряженное к $\mathbb{F}$ пространство — пространство функционалов $\mathbb{F}^*$, действующих на функции из $\mathbb{F}$ по правилу $\psi_\rho(f) = \int \rho(v) f(v) v^2 dv$. В фиксированном температурном базисе этот функционал приобретает вид

$$\psi_g(\varphi) = \int g(c)\varphi(c)c^2 dc,$$

где $g(c) = \rho(c/\sqrt{\alpha})$. Сопряженный к $\mathbf{H}^l$ базис $\mathbf{H}^*_l$ состоит из функционалов ψ^k_l, таких что $\psi^k_l(|l, r, T\rangle) = \delta^k_r$. Легко видеть, что вследствие свойств ортогональности полиномов Сонина такими функционалами будут

$$\psi^k_l(\varphi) = \int c^l S^k_{l+1/2}(c^2)/\sigma_{k,l}\varphi(c)c^2 dc.$$

Обозначим элементы сопряженного базиса через $\langle l, k, T|$, а действие функционалов из $\mathbb{F}^*$ на функции из $\mathbb{F}$ — через $\langle\psi|f\rangle$.

Определим теперь в базисе T интегральный оператор $\hat{I}^l_{l_1,l_2;T}$, соответствующий правой части равенства (19) (определения ядра $C^l_{l_1,l_2}$). Во введенных обозначениях имеем

$$\hat{I}^l_{l_1,l_2;T} = \sum_{r,r_1,r_2} |l, r, T\rangle K^{r,l}_{r_1,l_1,r_2,l_2}(T)\langle l_1, r_1, T|\langle l_2, r_2, T|.$$

В [1] получены формулы, по которым преобразуются базисные функции $|l, r, T_0\rangle$ и МЭ при переходе от одного температурного базиса T_0 к другому T_1. В наших обозначениях они могут быть легко получены при использовании представления для единичного оператора

$$\hat{J}^l = \sum_r |l, r, T\rangle\langle l, r, T|$$

в базисе T в пространстве $\mathbb{F}$. Действительно,

$$|l, r, T_1\rangle = \sum_k |l, k, T_0\rangle\langle l, k, T_0|l, r, T_1\rangle = \sum_k D^l_{kr}(T_0, T_1)|l, k, T_0\rangle,$$

где $D^l_{kr}(T_0, T_1) = \langle l, k, T_0|l, r, T_1\rangle$. Заметим, что оператор $\hat{J}^l$ является единичным и в пространстве $\mathbb{F}^*$, поэтому

$$\langle l, r, T_1| = \sum_k \langle l, r, T_1|l, k, T_0\rangle\langle l, k, T_0| = \sum_k D^l_{rk}(T_1, T_0)\langle l, k, T_0|.$$

Согласно [1], МЭ преобразуются по формулам

$$K^{rl}_{r_1 l_1 r_2 l_2}(T_1) = \sum_{kk_1k_2} D^l_{rk}(T_1, T_0)K^{kl}_{k_1 l_1 k_2 l_2}(T_0)D^{l_1}_{k_1 r_1}(T_0, T_1)D^{l_2}_{k_2 r_2}(T_0, T_1)$$
$$= \sum_{kk_1k_2} \langle l, r, T_1|l, k, T_0\rangle \times K^{kl}_{k_1 l_1 k_2 l_2}(T_0)\langle l_1 k_1, T_0|l_1, r_1, T_1\rangle\langle l_2, k_2, T_0|l_2, r_2, T_1\rangle. \quad (75)$$

Запишем теперь интегральный оператор $\hat{I}^l_{l_1,l_2;T_1}$ в базисе T_1 и заменим МЭ по формулам (75)

$$\hat{I}^l_{l_1,l_2;T_1} = \sum_{r,r_1,r_2} |l, r, T_1\rangle K^{rl}_{r_1 l_1 r_2 l_2}(T_1)\langle l_1 r_1, T_1|\langle l_2 r_2, T_1| = \sum_{r,r_1,r_2}\sum_{kk_1k_2} |l, r, T_1\rangle\langle l, r, T_1|l, k, T_0\rangle K^{kl}_{k_1 l_1 k_2 l_2}(T_0),$$

$$\langle l_1 k_1, T_0|l_1, r_1, T_1\rangle\langle l_2, k_2, T_0|l_2, r_2, T_1\rangle\langle l_1, r_1, T_1|\langle l_2, r_2, T_1|.$$

Если учесть, что суммирования по r, r_1 и r_2 приводят к выделению трех единичных операторов, то найдем

$$\hat{I}^l_{l_1,l_2;T_1} = \sum_{k,k_1,k_2} |l, k, T_0\rangle K^{kl}_{k_1 l_1 k_2 l_2}(T_0)\langle l_1, k_1, T_0|\langle l_2, k_2, T_0| = \hat{I}^l_{l_1,l_2;T_0}. \quad (76)$$

Равенство (76) показывает, что интегральные операторы с ядрами, соответствующими формуле (19) в разных температурных базисах, совпадают. Это значит, что и ядра этих интегральных операторов совпадают, и следовательно, (19) определяет независящее от базиса ядро $G^l_{l_1 l_2}(v, v_1, v_2)$.

Работа поддержана грантом РФФИ № 09-08-01017-а и научной программой СПбНЦ РАН.

Список литературы

[1] *Эндер А.Я., Эндер И.А.* Интеграл столкновений уравнения Больцмана и моментный метод. СПб, 2003. 224 с.
[2] *Ender A.Ya., Ender I.A.* // Phys. Fluids. 1999. Vol. 11 (9). P. 2720–2730.
[3] *Burnett D.* // Proc. London Math. Soc. 1935. Vol. 40. P. 382–435.
[4] *Эндер А.Я., Эндер И.А.* // Сиб. журн. инд. мат. 2003. Т. 6. Вып. 2 (14). С. 156–164.
[5] *Бакалейников Л.А., Эндер А.Я., Эндер И.А.* // ЖТФ. 2006. Т. 76. Вып. 9. С. 6–15.
[6] *Бакалейников Л.А., Флегонтова Е.Ю., Эндер А.Я., Эндер И.А.* // ЖТФ. 2009. Т. 79. Вып. 9. С. 24–62.
[7] *Hilbert D.* // Math. Ann. 1912. Bd 72. S. 562–577.
[8] *Hecke E.* // Math. Zs. 1922. Bd 12. S. 274–286.
[9] *Pekeris C.L., Alterman Z., Finkelstein L., Frankoowski K.* // Phys. Fluids. 1962. Vol. 5. N 12. P. 1608–1616.
[10] *Tompson R.V., Loyalka S.K.* // Phys. Fluids. 1987. Vol. 30. P. 2073–2075.
[11] *Loyalka S.K.* // Phys. Fluids. 1989. Vol. 1. N 2. P. 403–408.
[12] *Эндер А.Я., Эндер И.А.* // Аэродинамика / Под ред. Р.Н. Мирошина. СПб: НИИХ СпбГУ, 2003. С. 179–203.
[13] *Эндер А.Я., Эндер И.А.* // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 2. С. 6–12.