01;03

О толщине пограничного слоя, связанного с осциллирующей свободной поверхностью заряженной капли вязкой жидкости

© С.О. Ширяева, А.И. Григорьев, А.Р. Паранин

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
150000 Ярославль, Россия
e-mail: shir@uniyar.ac.ru

(Поступило в Редакцию 3 ноября 2009 г. В окончательной редакции 25 февраля 2010 г.)

Проведен аналитический расчет капиллярных осцилляций заряженной капли вязкой жидкости в рамках теории пограничного слоя в линейном по амплитуде осцилляций приближении с последовательной оценкой относительной погрешности замены точного решения приближенным. Показано, что для обеспечения точности расчета в рамках теории пограничного слоя порядка единиц процентов толщина пограничного слоя в окрестности свободной поверхности капли должна в несколько раз превышать значение, при котором интенсивность вихревого движения, порождаемого осциллирующей поверхностью, убывает в e раз. С ростом вязкости жидкости толщина пограничного слоя увеличивается.

Введение

Классические представления о пограничном слое вблизи свободной поверхности вязкой жидкости, совершающей периодические движения, были сформированы в середине прошлого века Лонгет-Хиггинсом [1]. При решении задачи о расчете волнового движения на плоской свободной поверхности бесконечно глубокой маловязкой жидкости с коэффициентом кинематической вязкости ν в линейном приближении по амплитуде волны с волновым числом k и частотой ω получено, что вихревая компонента поля скоростей убывает с глубиной (при $z \le 0$) по закону $\sim \exp(z\,\mathrm{Re}q)$ [1,2], где

$$q = \sqrt{k^2 + (-2\nu k^2 \pm i\omega)/\nu}.$$

Для маловязкой жидкости ($\nu \to 0$) несложно показать, что $\mathrm{Re}q \approx \sqrt{\omega/2\nu}$, и закон убывания амплитуды вихревой компоненты поля скоростей с глубиной принимает вид: $\sim \exp\left(\sqrt{\omega/2\nu}\,z\right)$.

Величину, обратную $\mathrm{Re}q$, определяющую глубину слоя жидкости, на котором амплитуда волны уменьшается в e раз, а именно $\sqrt{2\nu/\omega}$, предложено в [1] считать толщиной пограничного слоя, связанного с волновым движением на свободной поверхности маловязкой жидкости. Такой способ введения пограничного слоя не позволяет контролировать точность расчетов, проводимых в рамках теории пограничного слоя, поэтому в нижеследующих рассуждениях толщину пограничного слоя δ будем оценивать с точностью до постоянного численного множителя G в виде

$$\delta = G\sqrt{\nu/\omega},$$

как это было предложено в [3], с последующим выбором величины G так, чтобы удовлетворить необходимым требованиям по точности расчета. Именно такой подход был использован [4–6] при расчетах волнового движения на поверхности маловязкой жидкости в плоской и цилиндрической геометрии.

Теория пограничного слоя с определением его толщины в рамках представлений Лонгет-Хиггинса была использована для расчета осцилляций заряженной капли в [7], но основное внимание в этой работе было уделено исследованию временной эволюции пограничного слоя от начального момента времени.

Следует отметить, что теория пограничного слоя у свободной поверхности маловязкой жидкости до недавнего времени практически не развивалась. Причина такого положения дел в том, что для глубокой жидкости потери энергии волнового течения за счет вязкого затухания в тонком пограничном слое, где сосредоточено вихревое течение, пренебрежимо малы по сравнению с затуханием во всем объеме жидкости, охваченном потенциальным течением [8]. Тем не менее в задачах исследования осцилляций капель маловязких жидкостей, когда объем всей капли сравним по величине с объемом приповерхностного слоя, в котором существует вихревое движение, учет затухания в пограничном слое может быть весьма существен для расчета временной эволюции осцилляций.

В настоящей работе предполагается на основе сравнения точного решения с решением, полученным в рамках теории пограничного слоя, найти адекватную оценку для толщины пограничного слоя в окрестности свободной поверхности осциллирующей заряженной капли вязкой жидкости.

1. Формулировка задачи о расчете осцилляций заряженной капли вязкой жидкости и ее точное решение

Пусть имеется сферическая капля радиусом R_0 вязкой несжимаемой электропроводной жидкости с массовой плотностью ρ, коэффициентом кинематической вязкости ν и коэффициентом поверхностного натяжения σ, несущая электрический заряд Q. Примем, что капля совершает осцилляции вследствие создания в начальный момент времени виртуальной осесимметричной деформации равновесной сферической формы капли так, что ее форма в произвольный момент времени t определится соотношением

$$F(r,\vartheta,t) = r - R_0 - \xi(\vartheta,t) = 0; \qquad |\xi| \ll 1,$$

где $\xi = \xi(\vartheta,t)$ — отклонение свободной поверхности жидкости от равновесной в поле сил тяжести формы $r = R_0$. Зададимся целью исследовать аналитическим путем в линейном по амплитуде начальной деформации приближении временну́ю эволюцию формы капли. Все рассмотрение проведем в сферической системе координат с началом в центре масс невозмущенной сферической капли.

Математическая формулировка задачи расчета линейных осцилляций заряженной капли имеет вид

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{dt} + \frac{1}{\rho}\nabla P - \nu\Delta\mathbf{U} = 0; \quad \operatorname{div}\mathbf{U} = 0; \quad \Delta\Phi = 0;$$

$$r = R_0: \qquad U_r \approx \frac{\partial\xi}{\partial t}; \quad \frac{\partial U_\vartheta}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial U_r}{\partial\vartheta} - \frac{U_\vartheta}{r} = 0;$$

$$-P + 2\nu\frac{\partial}{\partial r}U_r - \frac{1}{8\pi}(\nabla\Phi)^2 + \sigma\operatorname{div}\mathbf{n} = 0; \quad \Phi = \Phi_S;$$

$$r \to 0: \qquad U_r \to 0; \qquad U_\vartheta \to 0;$$

$$r \to \infty: \qquad \nabla\Phi = 0;$$

$$t = 0: \qquad \xi(\vartheta) \equiv \sum_{l\in\Xi} Z_l P_l(\eta); \quad \eta \equiv \cos\vartheta;$$

$$\sum_{l\in\Xi}\frac{Z_l}{R_0} = \varepsilon; \quad \mathbf{U} = 0.$$

Здесь

$$\mathbf{U}(\mathbf{r},t) = U_r(\mathbf{r},t)\mathbf{e}_r(\mathbf{r}) + U_\vartheta(\mathbf{r},t)\mathbf{e}_\vartheta(\mathbf{r})$$

— поле скоростей течения жидкости в капле, связанного с осцилляциями ее свободной поверхности; $P(\mathbf{r},t)$ — гидродинамическое давление в капле; $\Phi(\mathbf{r},t)$ — потенциал электрического поля собственного заряда капли; $\Phi_S(t)$ — постоянное вдоль поверхности идеально проводящей капли значение электростатического потенциала; Z_l — амплитуда начальной деформации l-й моды; ε — безразмерный малый параметр, определяющий суммарную амплитуду деформации капли; $P_l(\eta)$ — полином Лежандра порядка l; Ξ — множество номеров мод, суперпозиция которых определяет начальную деформацию капли. Поле скоростей течения жидкости на основе теоремы Гельмгольца удобно представить в виде суперпозиции потенциальной $U_r^{(p)}$, $U_\vartheta^{(p)}$ и вихревой $U_r^{(e)}$, $U_\vartheta^{(e)}$ компонент

$$\begin{pmatrix} U_r(\mathbf{r},t) \\ U_\vartheta(\mathbf{r},t) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} U_r^{(p)}(\mathbf{r},t) \\ U_\vartheta^{(p)}(\mathbf{r},t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} U_r^{(e)}(\mathbf{r},t) \\ U_\vartheta^{(e)}(\mathbf{r},t) \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Сформулированная задача дополняется естественными условиями сохранения объема и электрического заряда капли, а также неподвижности при осцилляциях ее центра масс.

Решение сформулированной векторной задачи будем искать в безразмерных переменных, в которых $\rho = R_0 = \sigma = 1$, методом скаляризации, детально описанным в [9–11]. В основе метода лежит упомянутая выше теорема Гельмгольца о разделении произвольного векторного поля на суперпозицию потенциального и вихревого. В анализируемой ситуации осесимметричных осцилляций сферической капли будем иметь [9–11]:

$$\mathbf{U}(\mathbf{r},t) = \nabla\varphi(\mathbf{r},t) + \nabla\times(\nabla\times\mathbf{r})\psi(\mathbf{r},t),$$

где $\varphi(\mathbf{r},t)$ — гидродинамический потенциал; $\psi(\mathbf{r},t)$ — скалярная функция, через которую выражается вихревая часть течения. Компоненты поля скоростей течения жидкости в капле выражаются через скалярные функции $\varphi(\mathbf{r},t)$ и $\psi(\mathbf{r},t)$ с помощью соотношений

$$U_r^{(p)} = \frac{\partial\varphi}{\partial r}; \quad U_\vartheta^{(p)} = \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta};$$

$$U_r^{(e)} = -\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}\sin\vartheta\right);$$

$$U_\vartheta^{(e)} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}\right). \tag{2}$$

Решение изначально сформулированной векторной краевой задачи сводится к решению двух скалярных задач для отыскания функций $\varphi(\mathbf{r},t)$ и $\psi(\mathbf{r},t)$. В математическую формулировку задачи вместо уравнений Навье–Стокса и неразрывности войдут уравнения для отыскания функций $\varphi(\mathbf{r},t)$, $\psi(\mathbf{r},t)$ и гидродинамического давления [9–11]:

$$\Delta\varphi = 0; \qquad \Delta\psi(\mathbf{r},t) - \frac{1}{\nu}\frac{\partial\psi(\mathbf{r},t)}{\partial t} = 0;$$

$$P(\mathbf{U},t) = -\frac{\partial\varphi(\mathbf{r},t)}{\partial t}. \tag{3}$$

Граничные условия не изменятся, хотя их можно переписать в терминах новых искомых функций.

Не останавливаясь на процедуре отыскания функций $\varphi(\mathbf{r},t)$ и $\psi(\mathbf{r},t)$, подробно описанной в [9–11], приведем сразу окончательные выражения:

$$\xi(\vartheta,t) = \sum_{l\in\Xi} Z_l P_l(\eta)\exp(st);$$

$$\varphi(\mathbf{r},t) = \sum_{l\in\Xi} Z_l \frac{\nu x^2}{l}\left(1 + \frac{2(l^2-1)}{x^2 - 2x\,\frac{i_{l+1}(x)}{i_l(x)}}\right) r^l P_l(\eta)\exp(st);$$

$$\psi(\mathbf{r},t) = -\sum_{l\in\Xi} Z_l \frac{\nu x^2}{l}\,\frac{2(l-1)}{\left(x^2 - 2x\,\frac{i_{l+1}(x)}{i_l(x)}\right)}\frac{i_l(xr)}{i_l(x)} P_l(\eta)\exp(st). \tag{4}$$

Здесь $i_l(x)$ — модифицированные сферические функции Бесселя первого рода [12]; $s \equiv \nu x^2$ — комплексная частота, являющаяся решением дисперсионного уравнения:

$$x^4 + x^2 2(l-1)(2l+1) + l(l-1)(l+2)\frac{\chi_l}{\nu^2}$$
$$+ 2(l+1)(l-1)^2 \frac{x^2}{1 - \frac{x i_l(x)}{2 i_{l+1}(x)}} = 0;$$

$$x \equiv \sqrt{\frac{s}{\nu}}; \qquad \chi_l \equiv 1 - \frac{Q^2}{4\pi(l+2)} \equiv 1 - W_l.$$

Безразмерный параметр W_l характеризует устойчивость l-й моды осцилляций капли: l-я мода теряет устойчивость при $W_l \geq 1$ (это соотношение принято называть критерием Рэлея, а сам параметр W_l — параметром Рэлея) [13]. Следует иметь в виду, что как только станет неустойчивой основная мода ($l = 2$), капля начинает вытягиваться в сфероид, при этом потеряют устойчивость моды, связанные со 2-й модой взаимодействием, а критические условия неустойчивости всех остальных мод будут снижаться с ростом сфероидальной деформации [14,15].

По найденным функциям $\varphi(\mathbf{r}, t)$ и $\psi(\mathbf{r}, t)$, определенным соотношениями (4), поле скоростей течения жидкости в капле легко находится простым дифференцированием и сложением, согласно (1), (2).

Из рис. 1, на котором приведена зависимость амплитуды ротора поля скоростей

$$\mathbf{\Omega} \equiv \operatorname{rot}\mathbf{U} \equiv \frac{1}{r}\left\{\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(r\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}\right)\right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial\vartheta}\left[\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}\sin\vartheta\right)\right]\right\}\mathbf{n}_\varphi,$$

от радиальной переменной, видно, что вихревое течение, порождаемое осцилляциями свободной поверхности, достаточно быстро затухает по мере удаления от поверхности. Этот факт дает основание говорить о разделении

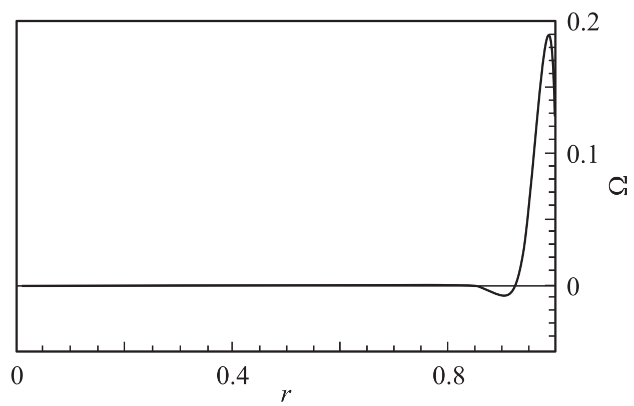

Рис. 1. Зависимость амплитуды ротора поля скоростей Ω точного решения от безразмерной радиальной переменной, построенная при $l = 1$, $Z_2 = 0.1$, $W = 0$, $\nu = 0.01$, $\vartheta = 3\pi/4$.

всего поля скоростей на две компоненты: потенциальную, охватывающую весь объем, и приповерхностную вихревую, быстро затухающую с глубиной.

Теория пограничного слоя разработана для маловязких жидкостей, следовательно, в контексте проводимого анализа функции $\varphi(\mathbf{r}, t)$ и $\psi(\mathbf{r}, t)$, а также дисперсионное уравнение задачи нам нужны для нижеследующих построений в пределе малой вязкости $\nu \to 0$, в котором они принимают более простой вид (см. [10], стр. 38–39, где соответствующий асимптотический переход при $x \to \infty$) для отношения $x i_l(x)/2 i_{l+1}(x)$ описан детально; см. также [12], стр. 199, формула 9.7.1 и стр. 261, формула 10.2.2):

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \sum_{l\in\Xi} Z_l \frac{\nu}{l}(1 + 2(l^2-1)) r^l P_l(\eta)\exp(st);$$

$$\psi(\mathbf{r}, t) = -\sum_{l\in\Xi} Z_l \nu \frac{2(l-1)}{l}\frac{i_l(xr)}{i_l(x)} P_l(\eta)\exp(st); \quad (4a)$$

$$\nu^2 x^4 + 2(l-1)(2l+1)\nu^2 x^2 + l(l-1)(l+2)\chi_l = 0. \quad (5)$$

2. Формулировка и решение модельной задачи

На основании представлений о строении реального течения маловязкой жидкости в приповерхностном (пограничном) ее слое [3–7] (см. рис. 1) сформулируем модельную задачу, которой будем аппроксимировать приведенное выше точное решение (4a). Для этого будем исходить из предположения, что потенциальное течение охватывает весь объем капли и обращается в нуль в центре капли, а вихревая часть течения сосредоточена только в пограничном приповерхностном слое толщиной δ, и ротор скорости течения Ω обращается в нуль на нижней границе этого слоя

$$r \to 0: \qquad U_r^{(p)} \to 0, \qquad U_\vartheta^{(p)} \to 0;$$

$$r = 1 - \delta: \qquad \Omega = 0.$$

Остальные граничные условия оставим прежними, как и решаемые уравнения (3), для отыскания функций $\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{t})$, $\psi(\mathbf{r}, t)$ и $P(\mathbf{r}, t)$.

Уравнения для потенциальной составляющей течения будем решать во всей области $0 \leq r \leq 1$, а для вихревой составляющей только в узком приповерхностном слое: $(1-\delta) \leq r \leq 1$. Толщину пограничного слоя будем считать определенной с точностью до постоянного множителя G и считать малой по сравнению с радиусом капли ($\delta \ll 1$).

Решение модельной задачи имеет вид

$$\varphi = \sum_{l\in\Xi} Z_l \frac{\nu}{l}\left(1 + 2(l^2-1)\right) r^l P_l(\eta)\exp(st);$$

$$\psi = -\sum_{l\in\Xi} Z_l \nu \frac{2(l-1)}{l}\frac{i_l(xr)k_l(x\mu) - k_l(xr)i_k(x\mu)}{i_l(x)k_l(x\mu) - k_l(x)i_l(x\mu)}$$
$$\times P_l(\eta)\exp(st); \qquad \mu \equiv 1 - \delta; \quad (6)$$

где значения частоты мод s (выраженные через x) удовлетворяют дисперсионному уравнению

$$\frac{k_l(x\mu)}{k_l(x)}\left(x^4+2(l-1)(2l+1)x^2+\frac{x^2 2(l-1)^2(l+1)}{\left(1-\frac{x}{2}\,\frac{i_l(x)}{i_{l+1}(x)}\right)}\right.$$

$$\left.+\,l(l-1)(l+2)\frac{\chi_l}{\nu^2}\right)-\frac{i_l(x\mu)}{i_l(x)}\left(x^4+2(l-1)(2l+1)x^2\right.$$

$$\left.+\,\frac{x^2 2(l-1)^2(l+1)}{\left(1+\frac{x}{2}\,\frac{k_l(x)}{k_{l+1}(x)}\right)}+l(l-1)(l+2)\frac{\chi_l}{\nu^2}\right)=0. \qquad (7)$$

Здесь $k_l(x)$ — модифицированные сферические функции Бесселя второго рода [12]. Совершая переход $\delta \to 1$, несложно убедиться, что решение модельной задачи (6) и ее дисперсионное уравнение (7) в пределе малой вязкости совпадают с решением точной задачи (4a) и ее дисперсионным уравнением (5).

3. Упрощение модельной задачи в рамках теории пограничного слоя и ее решение

Математическая формулировка модельной задачи в пределе малой вязкости может быть упрощена с помощью построений, аналогичных тем, что используются в классической теории пограничного слоя.

Будем исходить из того, что течение жидкости в капле состоит из главной, потенциальной, и добавочной, в пограничном слое, вихревой частей. Вихревая часть течения является малой, исчезающей в пределе $\nu \to 0$, добавкой к основной потенциальной части течения. Для потенциальной части движения характерный линейный масштаб, на котором изменяются компоненты скорости, одинаков во всех направлениях $\sim R_0$. Для вихревой части течения характерный линейный масштаб, на котором изменяются компоненты скорости в направлении, перпендикулярном пограничному слою, равен толщине слоя δ, а вдоль слоя — определяется характерным линейным размером $\sim R_0$. На основании сказанного введем правила оценки производных от искомых величин по пространственным координатам. Для оценки величин производных от φ, $U_\vartheta^{(p)}$, $U_r^{(p)}$ по пространственным переменным будем пользоваться следующим формальным правилом сравнения (в размерном виде):

$$\frac{\partial}{\partial r}\to\frac{1}{R_0};\qquad \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\to\frac{1}{R_0\pi}.$$

Для величин в пограничном слое Ω, ψ, $U_\vartheta^{(e)}$, $U_r^{(e)}$ правило оценки производных будет несколько иным (в размерном виде):

$$\frac{\partial}{\partial r}\to\frac{1}{\delta};\qquad \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\to\frac{1}{R_0\pi}.$$

Далее, пользуясь малостью толщины пограничного слоя $\delta \ll R_0$, будем упрощать формулировку модельной задачи, пренебрегая в суммах вида $\Xi = A + B$ слагаемым B, если

$$\frac{B}{A}\approx O\left(\frac{\delta^2}{R_0^2}\right).$$

После упрощения граничных условий на основе сделанных выше предположений гидродинамическая часть модельной задачи (электростатическая часть останется без изменений) принимает вид

$$0\le r\le 1:\qquad \Delta\varphi=0;$$

$$1-\delta\le r\le 1:\qquad \partial_t\psi-\nu\Delta\psi=0;$$

$$r=1-\delta:\qquad \Omega\approx\frac{\partial}{\partial\vartheta}\psi=0;$$

$$r=1:\qquad \frac{\partial\xi}{\partial t}-\left(U_r^{(p)}+U_r^{(e)}\right)=0;$$

$$2\frac{\partial}{\partial r}U_\vartheta^{(p)}+r\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\frac{1}{r}U_\vartheta^{(e)}\right)=0;$$

$$-P+2\nu\frac{\partial}{\partial r}\left(U_r^{(p)}\right)-\frac{1}{8\pi}(\nabla\Phi)^2+\operatorname{div}\mathbf{n}=0;$$

$$r=0:\qquad U_r^{(p)}\to 0;\qquad U_\vartheta^{(p)}\to 0.$$

Решение упрощенной модельной задачи имеет вид

$$\varphi=\sum_{l\in\Xi}Z_l\frac{\nu}{l}\left(1+2(l^2-1)\right)r^lP_l(\eta)\exp(st);$$

$$\psi\approx-\sum_{l\in\Xi}Z_l\nu\,\frac{2(l-1)}{l}\,\frac{k_l(xr)i_l(x\mu)-i_l(xr)k_l(x\mu)}{k_l(x)i_l(x\mu)-i_l(x)k_l(x\mu)}$$

$$\times P_l(\eta)\exp(st); \qquad (8)$$

$$\frac{k_l(x\mu)}{k_l(x)}\left[x^4+x^2 2l(l-1)-2\left(x\,\frac{i_{l+1}(x)}{i_l(x)}-\frac{x^2}{2}\right)\right.$$

$$\left.\times\left(f_l\frac{\chi}{\nu^2}+\frac{x^2(x^2+2l(l-1))}{(l-2)(l+1)}\right)-h_l\frac{\chi_l}{\nu^2}\right]$$

$$-\frac{i_l(x\mu)}{i_l(x)}\left[x^4+x^2 2l(l-1)-2\left(x\,\frac{k_{l+1}(x)}{k_l(x)}+\frac{x^2}{2}\right)\right.$$

$$\left.\left(f_l\frac{\chi}{\nu^2}+\frac{x^2(x^2+2l(l-1))}{(l-2)(l+1)}\right)-h_l\frac{\chi_l}{\nu^2}\right]=0;$$

$$f_l\equiv\frac{l(l-1)(l+2)}{(l-2)(l+1)};\qquad h_l\equiv\frac{l^2(l-1)(l+2)}{(l-2)}. \qquad (9)$$

В пределах малой вязкости решение (8) и дисперсионное уравнение (9) совпадают с решением точной задачи (4a) и ее дисперсионным уравнением (5), полученными в пределе малой вязкости.

4. Анализ полученных решений

Выпишем поля́ скоростей течения жидкости в капле в пределе малой вязкости для точной и модельной упрощенной задач исходя из выражения

$$\mathbf{U}(\mathbf{r},t)=U_r\mathbf{e}_r(\mathbf{r})+U_\vartheta\mathbf{e}_\vartheta(\mathbf{r})$$
$$\equiv(U_r^{(p)}+U_r^{(e)})\mathbf{e}_r+(U_\vartheta^{(p)}+U_\vartheta^{(e)})\mathbf{e}_\vartheta.$$

Для точной задачи, используя (1) и (4), несложно записать:

$$\begin{pmatrix}U_r^{(p)}(\mathbf{r},t)\\U_\vartheta^{(p)}(\mathbf{r},t)\end{pmatrix}=\sum_{l\in\Xi}Z_l\nu\left(1+2(l^2-1)\right)r^{l-1}$$
$$\times\begin{pmatrix}1\\ \frac{1}{l}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\end{pmatrix}P_l(\eta)\exp(st);$$

$$\begin{pmatrix}U_r^{(e)}(\mathbf{r},t)\\U_\vartheta^{(e)}(\mathbf{r},t)\end{pmatrix}=-\sum_{l\in\Xi}2Z_l(l-1)\frac{\nu}{lr}$$
$$\times\begin{pmatrix}l(l+1)\,\frac{i_l(xr)}{i_l(x)},\\ \left(\frac{i_l(xr)}{i_l(x)}+r\left(x\,\frac{i_{l+1}(xr)}{i_l(x)}+l\,\frac{i_l(xr)}{i_l(x)}\right)\right)\frac{\partial}{\partial\vartheta}\end{pmatrix}P_l(\eta)\exp(st). \tag{10}$$

Для модельной упрощенной задачи по (1), (2) и (8) получим:

$$\begin{pmatrix}U_r^{(p)}(\mathbf{r},t)\\U_\vartheta^{(p)}(\mathbf{r},t)\end{pmatrix}=\sum_{l\in\Xi}Z_l\nu\left(1+2(l^2-1)\right)$$
$$\times r^{l-1}\begin{pmatrix}1\\ \frac{1}{l}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\end{pmatrix}P_l(\eta)\exp(st);$$

$$\begin{pmatrix}U_r^{(e)}(\mathbf{r},t)\\U_\vartheta^{(e)}(\mathbf{r},t)\end{pmatrix}=-\sum_{l=0}^{\infty}Z_lL_l(x,\delta)$$
$$\times\begin{pmatrix}l(l+1)A_1,\\ \left[(1+lr)A_1-rxB_1\right]\frac{\partial}{\partial\vartheta}\end{pmatrix}P_l(\eta)\exp(st), \tag{11}$$

$$A_1=k_l(xr)i_l(x\mu)-i_l(xr)k_l(x\mu),$$
$$B_1=k_{l+1}(xr)i_l(x\mu)-i_{l+1}(xr)k_l(x\mu),$$
$$L_l(x,\delta)\equiv\frac{1}{lr}\,\frac{2(l-1)\nu}{k_l(x)i_l(x\mu)-i_l(x)(k_l(x\mu)}.$$

Частоту осцилляций s, в соотношениях (10), (11), выраженную через переменную x, будем определять из дисперсионного уравнения:

$$s^2+2(l-1)(2l+1)s\nu+l(l-1)(l+2)(1-W_l)=0, \tag{12}$$

к которому в пределе малой вязкости ($\nu\to0$) приводятся дисперсионные уравнения (5) для точной задачи и (9) для упрощенной модельной. Решения (12) в линейном по малой вязкости приближении легко выписываются в виде:

$$s_{1,2}=-(l-1)(2l+1)\nu\pm i\sqrt{l(l-1)(l+2)(1-W_l)}.$$

На рис. 2 приведены зависимости радиальной U_r и угловой U_ϑ составляющих поля скоростей от расстояния до поверхности в пределах пограничного слоя, построенные для ситуации, когда начальная деформация капли определяется одной основной модой. Для удобства сделан переход от переменной r $(1-\delta\le r\le1)$ к переменной z, которая в пределах пограничного слоя изменяется в диапазоне от -1 до 0:

$$z=\frac{r-1}{\delta}\Rightarrow r=1+\delta z.$$

Задаваясь целью отыскать величину множителя G, при которой решения упрощенной модельной задачи наилучшим образом аппроксимируют точное решение для поля скоростей течения жидкости в капле, несложно видеть, что расчеты, проведенные для $G=5$, дают по сравнению с расчетами, проведенными для меньших значений G, существенно меньшую относительную погрешность, исчисляющуюся единицами процентов.

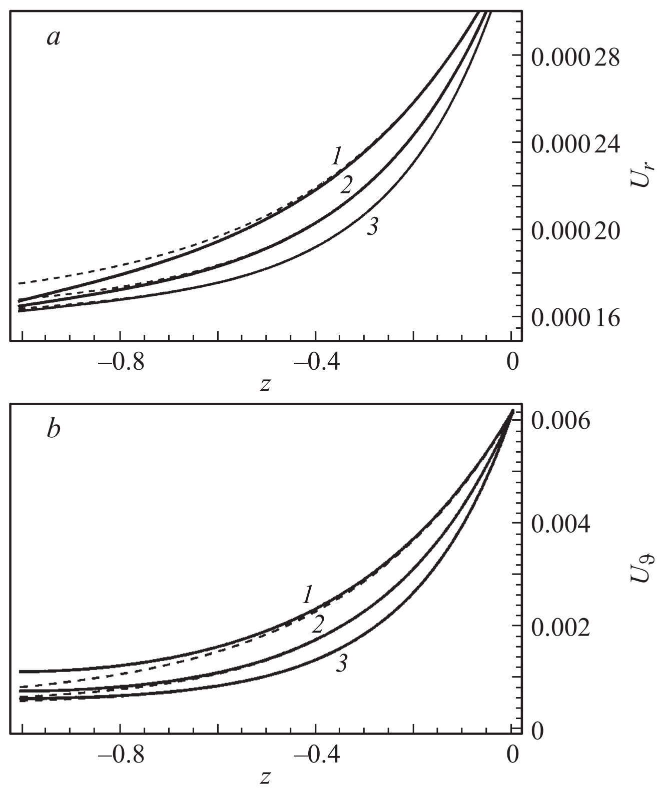

Рис. 2. Зависимости: a — радиальной компоненты поля скоростей U_r, b — угловой компоненты U_ϑ от расстояния до поверхности в пределах пограничного слоя, построенные при $l=2$, $W=0$, $Z_2=0.1$, $\nu=0.001$, $\vartheta=3\pi/4$. Кривые *1* — аппроксимация скоростей при $G=3$, *2* — 4, *3* — 5. При этом пунктир соответствует точному решению, а сплошные кривые — решению в теории пограничного слоя.

Для получения количественной оценки расхождения точного и приближенного решений определим относительные ошибки для обеих проекций поля скоростей на орты сферической системы координат соотношениями

$$\varepsilon_r = \left|\frac{U_{r0} - U_{r*}}{U_{r0}}\right|; \qquad \varepsilon_\vartheta = \left|\frac{U_{\vartheta 0} - U_{\vartheta *}}{U_{\vartheta 0}}\right|.$$

Здесь индекс „$*$“ соответствует решению, построенному в рамках теории пограничного слоя, а индекс „0“ — точному решению.

На рис. 3 приведены зависимости ε_r и ε_ϑ от введенной переменной z в пределах пограничного слоя для незаряженной капли. Несложно видеть, что при $G = 5$ погрешность расчета угловой составляющей поля скоростей ε_ϑ превышает погрешность расчета радиальной составляющей ε_r примерно в 2 раза. С увеличением заряда капли (параметра Рэлея W) толщина пограничного слоя медленно растет, но при приближении к критическому для реализации неустойчивости основной моды значению скорость роста толщины пограничного слоя увеличивается и вихревое движение охватывает весь объем капли, а толщина пограничного слоя стремится к радиусу капли, как это видно из рис. 4. Интересно отметить, что так же ведет себя и толщина пограничного слоя у плоской однородно заряженной поверхности электропроводной жидкости конечной толщины [5,16]. С физической и математической точки зрения такая тенденция вполне объяснима. В самом деле, при приближении параметра Рэлея для капли или параметра Тонкса–Френкеля для плоской поверхности к критическому для реализации электростатической неустойчивости свободной поверхности значению частота капиллярных волн (капиллярных осцилляций) стремится к нулю, а толщина пограничного слоя, обратно пропорциональная корню квадратному из частоты

$$\delta \approx \sqrt{\frac{\nu}{\omega}},$$

увеличивается.

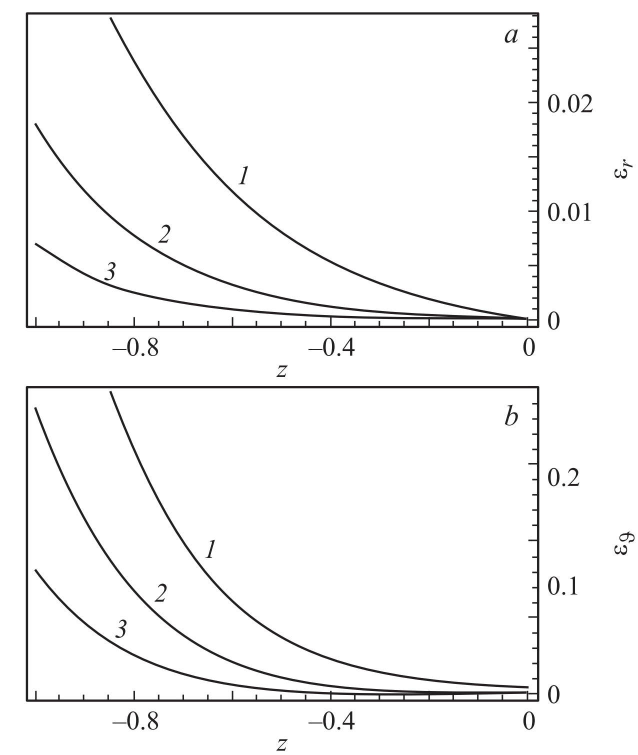

Рис. 3. Зависимости: a — относительной погрешности ε_r, b — ε_ϑ аппроксимации точного решения его приближением в рамках пограничного слоя для радиальной компоненты поля скоростей U_r от расстояния до поверхности в пределах пограничного слоя, построенные при $l = 2$, $W = 0$, $Z_2 = 0.1$, $\nu = 0.001$, $\vartheta = 3\pi/4$, для различных значений параметра G: *1* — 3; *2* — 4; *3* — 5.

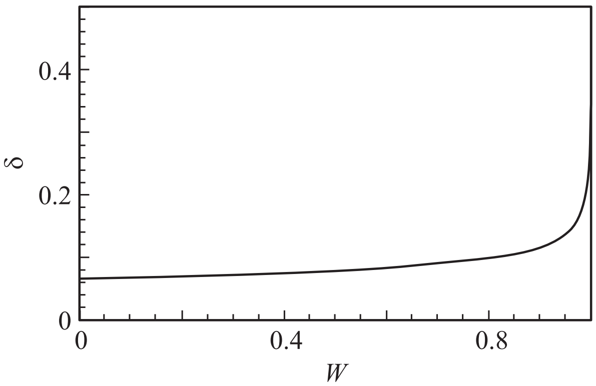

Рис. 4. Зависимость безразмерной толщины пограничного слоя δ от параметра Рэлея W, построенная при $l = 2$, $\nu = 0.001$, $G = 5$.

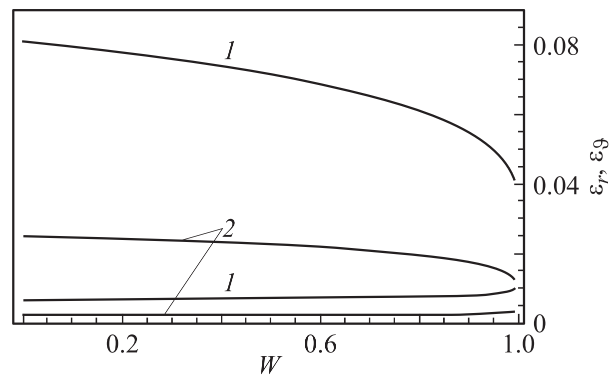

Рис. 5. Зависимости относительных погрешностей ε_r, ε_ϑ от величины параметра Рэлея. Жирные кривые — зависимости для ε_r, тонкие — для ε_ϑ, построенные при $l = 2$, $\nu = 0.001$, $G = 5$, $\vartheta = 3\pi/4$: *1* — $z = -1$, *2* — -0.8.

На рис. 5 приведены зависимости ε_r и ε_ϑ от величины параметра Рэлея W, рассчитанные для различных расстояний от поверхности капли. Несложно видеть, что погрешности ε_ϑ с ростом W уменьшаются, а ε_r весьма медленно увеличиваются. Поскольку кривые с индексом „1“ относятся к нижней границе пограничного слоя, а кривые с индексом „2“ — к уровню $z = 0.8$, то наглядно видно, что с ростом расстояния от поверхности

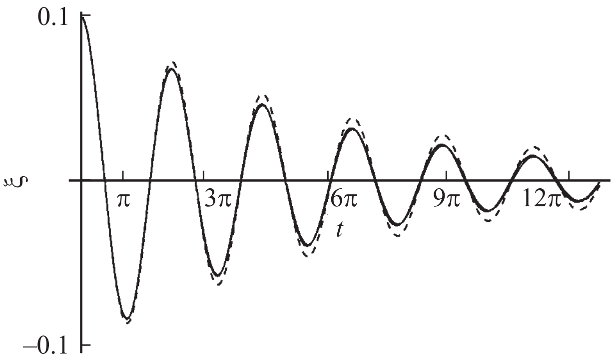

Рис. 6. Временны́е зависимости амплитуды отклонения свободной поверхности, построенные по точному решению (сплошная кривая) и по упрощенному модельному при $l = 2$, $Z_2 = 0.1$, $W = 0$, $\nu = 0.001$ и значениях $G = 1$ (штриховая кривая) и 5 (кривая сливается с результатом расчета по точному решению).

капли увеличиваются и абсолютные значения погрешностей ε_r и ε_ϑ, и расхождения между ними.

На рис. 6 приведены временны́е зависимости амплитуды осцилляций свободной поверхности капли для точного решения и приближенных, построенных при $G = 1$ и 5. Результат приближенного расчета с $G = 5$ практически совпадает с результатом расчета по точному решению (имеющееся различие не превышает толщины линий).

Заключение

В аналитических расчетах капиллярных осцилляций заряженной капли маловязкой жидкости, проведенных в рамках теории пограничного слоя в первом порядке малости по амплитудам осцилляций, проанализированы зависимости толщины пограничного слоя от физических параметров задачи. Выяснилось, что для выполнения расчетов с погрешностью по отношению к точному решению, не превышающей единиц процентов, толщина пограничного слоя должна примерно в четыре раза превышать толщину, на которой интенсивность вихревого движения, порождаемого свободной поверхностью капли, уменьшается в 2.714 раз (в e раз). С увеличением вязкости жидкости толщина пограничного слоя растет.

Работа выполнена при поддержке грантов: Рособразования № 2.1.1/3776 и РФФИ № 09-01-00084.

Список литературы

[1] *Longuet-Higgins M.S.* // Royal. Soc. London. Trans. Ser. A. 1953. Vol. 245. N 903. P. 535–581.
[2] *Левич В.Г.* Физико-химическая гидродинамика. М.: Физматгиз, 1959. 699 с.
[3] *Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И.* // ЖТФ. 2007. Т. 77. Вып. 8. С. 19–28.
[4] *Ширяева С.О.* // ЖТФ. 2008. Т. 78. Вып. 12. С. 12–20.
[5] *Григорьев А.И., Пожарицкий Д.М., Ширяева С.О.* // ЖТФ. 2009. Т. 79. Вып. 5. С. 8–17.
[6] *Григорьев А.И., Пожарицкий Д.М., Ширяева С.О.* // Изв. РАН. МЖГ. 2009. № 5. С. 15–26.
[7] *Жаров А.Н., Ширяева С.О., Жарова И.Г.* // ЖТФ. 2008. Т. 78. Вып. 8. С. 54–63.
[8] *Бэтчелор Дж.К.* Введение в динамику жидкости. М.–Ижевск: Изд-во НИЦ РХД, 2004. 768 с.
[9] *Григорьев А.И., Лазарянц А.Э.* // ЖТФ. 1993. Т. 63. Вып. 10. С. 12–19.
[10] *Ширяева С.О., Лазарянц А.Э., Григорьев А.И.* и др. Метод скаляризации векторных краевых задач. Препринт ИМ РАН № 27. Ярославль, 1994. 126 с.
[11] *Ширяева С.О., Григорьев А.И.* Заряженная капля в грозовом облаке. Ярославль: Изд-во ЯрГУ им. П.Г. Демидова. 2008. 535 с.
[12] Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовиц, И. Стиган. М.: Наука, 1979. 832 с.
[13] Rayleigh (Strutt J.W.) // Phil. Mag. 1882. Vol. 14. P. 184–186.
[14] *Григорьев А.И.* // ЖТФ. 1985. Вып. 7. С. 1272–1278.
[15] *Ширяева С.О., Корниенко Д.О., Волкова М.В.* // ЭОМ. 2009. № 4. С. 20–29.
[16] *Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И.* // ЖТФ. 2008. Т. 78. Вып. 3. С. 21–28.