01;03

О некоторых закономерностях реализации сфероидальных осцилляций и электростатической неустойчивости заряженной капли

© С.О. Ширяева, А.И. Григорьев, Д.О. Корниенко

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
150000 Ярославль, Россия
e-mail: shir@uniyar.ac.ru

(Поступило в Редакцию 8 октября 2009 г. В окончательной редакции 25 февраля 2010 г.)

Исследованы закономерности и последовательность возбуждения мод осцилляций заряженной капли сфероидальной формы, поверхность которой в начальный момент времени деформирована. Показано, что за счет взаимодействия сфероидальной деформации с модами осцилляций кроме мод, определяющих начальную деформацию, также возбуждаются по две соседние моды. Если заряд капли близок к критическому для начала реализации электростатической неустойчивости так, что виртуальная начальная деформация конечной амплитуды делает основную моду неустойчивой, то ее амплитуда начинает нарастать экспоненциально со временем, так же как и ближайшая к ней мода, связанная с ней взаимодействием через деформацию. Если заряд капли равен критическому, или немного его превышает, то амплитуды всех мод, связанных с основной взаимодействием через деформацию, теряют устойчивость практически одновременно с основной. Это приводит к качественному изменению картины реализации неустойчивости заряженной капли по отношению к собственному заряду, существовавшей до сих пор. Суперпозиция на вершинах сфероидальной капли высоких мод осцилляций приводит к образованию на них динамических (т.е. осциллирующих во времени) эмиссионных выступов, с вершин которых будет сбрасываться избыточный заряд.

Введение

Исследование физического механизма реализации неустойчивости заряженной капли по отношению к собственному заряду представляет значительный интерес в связи с многочисленными академическими, техническими и технологическими приложениями в технике и технологии (см., например, [1–4] и приведенные там ссылки). Первое корректное аналитическое исследование осцилляций и устойчивости заряженной капли было проведено Рэлеем еще в 19 в. [5]. Тем не менее многие вопросы, касающиеся устойчивости заряженной капли, остаются малоисследованными. Сказанное в первую очередь относится к исследованию осцилляций и устойчивости заряженных капель с формами, отличными от сферической [6–10]. Хорошо известно [1–4,9,10], что внешние силовые поля (электростатические, аэродинамические, поля неинерциальных сил) приводят к отклонению равновесной формы капли от сферической. Тем не менее к настоящему времени вопрос о взаимодействии начальной деформации капли с модами осцилляций исследован весьма слабо, хотя известно, что деформационные поправки к частотам осцилляций приводят к снижению критических условий реализации неустойчивости капли по отношению к внешним силовым воздействиям [6–8,10–13]. Анализу этой проблемы и посвящено настоящее рассмотрение.

1. Формулировка задачи

Будем решать задачу об исследовании временно́й эволюции амплитуд мод капиллярных осцилляций капли радиуса R_0 идеальной несжимаемой идеально проводящей жидкости, имеющей заряд Q, находящейся в идеальной несжимаемой диэлектрической среде. Примем, что в начальный момент времени $(t = 0)$ виртуальным образом капле придана форма деформированного вытянутого сфероида. Уравнение поверхности вытянутого сфероида в сферических координатах с началом в центре масс невозмущенной капли имеет вид

$$r(\vartheta) = R_0 \frac{(1-e^2)^{1/6}}{\sqrt{1-e^2\cos^2(\vartheta)}},$$

где e — эксцентриситет сфероида, который будем принимать малым: $e^2 \ll 1$. Деформацию сфероидальной капли в начальный момент времени запишем в виде

$$\xi(\vartheta, t) = \sum_{j=\Xi} \xi_j P_j(\mu). \tag{1}$$

В (1) суммирование ведется по j — номерам мод, определяющих начальную деформацию сфероидальной капли. Номера этих мод составляют множество Ξ; ξ_j — амплитуды соответствующих мод; $R \gg |\xi|$; $e^2 \gg (|\xi|/R_0)$.

Движения жидкости в капле и среде, а также электрическое поле собственного заряда капли во внешней среде будем считать потенциальными с потенциалами скоростей $\psi_1(\mathbf{r}, t)$, $\psi_2(\mathbf{r})$ и $\Phi(\mathbf{r}, t)$ соответственно. Математическая формулировка задачи будет иметь вид

$$\Delta\psi_i(\mathbf{r}, t) = 0, \quad i = 1, 2, \quad \Delta\Phi(\mathbf{r}, t) = 0,$$

$$r \to \infty: \qquad |\nabla\psi_2| \to 0; \quad |\nabla\Phi(\mathbf{r}, t)| \to 0;$$

$$r \to 0: \qquad |\nabla\psi_1| \to 0;$$

$$r=r(\vartheta)+\xi(\vartheta,t):\quad \Phi(\mathbf{r},t)=\text{const}\equiv\Phi_0;$$

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial n_1}=-\frac{\partial\psi_2}{\partial n_2}\equiv\frac{\partial\psi}{\partial n};\qquad \frac{\partial\xi}{\partial t}=\frac{\partial\psi}{\partial n};$$

$$-\rho_1\frac{\partial\psi_1}{\partial t}+\rho_2\frac{\partial\psi_2}{\partial t}+P_E=P_\sigma,$$

а также начальные условия:

$$t=0:\qquad \xi(\vartheta,t)=\sum_{j=\Xi}\xi_jP_j(\mu),\quad \partial_t\xi(\vartheta,t)=0,$$

где ρ_1 и ρ_2 — плотность жидкости и окружающей среды; $P_E\equiv\big(-\nabla\Phi(\mathbf{r},t)\big)^2/8\pi$ — давление электростатических сил на границу раздела сред, возникающее вследствие наличия заряда на капле; $\Phi(\mathbf{r},t)$ — потенциал электростатического поля собственного заряда капли; $P_\sigma\equiv\sigma\,\mathrm{div}\mathbf{n}$ — давление сил поверхностного натяжения (лапласовское давление); $\mathbf{n}_m$ — внешняя нормаль к границе раздела m-й среды; Ξ — множество номеров мод, определяющих начальную деформацию сфероидальной капли. Оператор ∂_t означает взятие первой производной по времени.

Все рассмотрение проведем в сферической системе координат с началом в центре масс капли в безразмерных переменных, в которых $R_0=\rho_1=\sigma=1$. Решение задачи будем искать в линейном по $|\xi|$ и квадратичном по e^2 приближении.

2. Процедура решения

Неизвестные функции $\xi(\vartheta,t)$, $\psi_1(\mathbf{r},t)$, $\psi_2(\mathbf{r},t)$ и $\Phi(\mathbf{r},t)$ будем искать в виде разложений по полиномам Лежандра:

$$\xi(\vartheta,t)=\sum_{n=2}^{\infty}M_n(t)P_n(\mu);\quad \psi_1(\mathbf{r},t)=\sum_{n=2}^{\infty}C_n^{(1)}(t)r^nP_n(\mu);$$

$$\mu\equiv\cos(\vartheta);\quad \psi_2(\mathbf{r},t)=\sum_{n=2}^{\infty}C_n^{(2)}(t)r^{-(n+1)}P_n(\mu);$$

$$\Phi(\mathbf{r},t)=\sum_{n=2}^{\infty}B_n(t)r^{-(n+1)}P_n(\mu).\tag{2}$$

Подставив проекты решений (2) в граничные условия задачи, получим систему связанных дифференциальных уравнений для отыскания временно́й зависимости неизвестных коэффициентов $M_n(t)$, как это проделано в работе [14], где выписаны также аналитические выражения для электростатического и капиллярного давлений для сфероидальной капли:

$$\partial_{tt}M_n(t)+[x_n(n)+y_n(n)e^2+z_n(n)e^4]M_n(t)$$
$$=l_{n\pm4}(n)e^4\partial_{tt}M_{n\pm4}+[p_{n\pm2}(n)e^2+l_{n\pm2}(n)e^4]\partial_{tt}M_{n\pm2}(t)$$
$$+z_{n\pm4}(n)e^4M_{n\pm4}(t)+[y_{n\pm2}(n)e^2+z_{n\pm2}(n)e^4]M_{n\pm2}(t).\tag{3}$$

Коэффициенты $x_n(n), y_n(n), z_n(n), l_n(n), p_n(n)$, зависящие от номеров мод, отношения плотностей $\rho\equiv\rho_2/\rho_1$ и зарядового параметра $W\equiv Q^2/4\pi$, называемого параметром Рэлея, определены в „Приложении“.

Уравнение (3) будем решать методом последовательных приближений. Для этого последовательно найдем решения уравнения (3) в нулевом, линейном и квадратичном приближении по e^2, каждый раз используя уже полученные решения для выписывания функций неоднородностей, стоящие в правой части (3).

В нулевом приближении по e^2 получим дифференциальное уравнение

$$\partial_{tt}M_n^{(0)}(t)+x_n(n)M_n(t)=0,$$

решение которого легко выписывается в виде

$$M_n^{(0)}(t)=A_n^0\exp(i\omega_n^{(0)}t),\tag{4}$$

где $\omega_n^{(0)}$ — частота осцилляций n-й моды, определяемая выражением

$$\omega_n^{(0)}=\sqrt{x_n(n)}.\tag{4a}$$

В первом приближении по e^2 с учетом (4) получим неоднородное дифференциальное уравнение:

$$\partial_{tt}M_n^{(1)}+[x_n(n)+y_n(n)e^2]M_n^{(1)}$$
$$=[e^2p_{n\pm2}(n)]\partial_{tt}M_{n\pm2}(t)+[e^2y_{n\pm2}(n)]M_{n\pm2}(t).\tag{5}$$

Решение неоднородного уравнения (5) есть сумма решений соответствующего однородного уравнения и частного решения неоднородного:

$$M_n^{(1)}(t)=A_n^{(1)}\exp(i\omega_n^{(1)}t)$$
$$+e^2\frac{[p_{n\pm2}(n)(\omega_{n\pm2}^{(0)})^2+y_{n\pm2}(n)]}{(\omega_n^{(0)})^2-(\omega_{n\pm2}^{(0)})^2}A_{n\pm2}^{(0)}\exp(i\omega_{n\pm2}^{(0)}t);\tag{6}$$

$$\omega_n^{(1)}=\sqrt{x_n(n)+y_n(n)e^2}.\tag{6a}$$

В квадратичном приближении по e^2 с учетом (4) и (6) получим дифференциальное уравнение:

$$\partial_{tt}M_n^{(2)}(t)+[x_n(n)+y_n(n)e^2+z_n(n)e^4]M_n^{(2)}(t)$$
$$=l_{n\pm4}(n)e^4\partial_{tt}M_{n\pm4}+[p_{n\pm2}(n)e^2+l_{n\pm2}(n)e^4]\partial_{tt}M_{n\pm2}(t)$$
$$+z_{n\pm4}(n)e^4M_{n\pm4}(t)+[y_{n\pm2}(n)e^2+z_{n\pm2}(n)e^4]M_{n\pm2}(t),$$

решение которого находится аналогично предыдущему случаю и имеет вид:

$$M_n^{(2)}(t) = A_n^{(2)} \exp(i\omega_n^{(2)} t) + e^2 A_{n\pm2}^{(1)} \Big\{ e^2 \big[-p_{n\pm2}(n)(\omega_{n\pm2}^{(1)})^2 + y_{n\pm2}(n) \big] + e^4 \big[-l_{n\pm2}(n)(\omega_{n\pm2}^{(1)})^2 + z_{n\pm2}(n) \big] \Big\}$$

$$\times \big\{ (\omega_n^{(1)})^2 - (\omega_{n\pm2}^{(1)})^2 \big\}^{-1} \exp(i\omega_{n\pm2}^{(1)} t)$$

$$+ e^4 \frac{A_{n\pm4}^{(0)}}{(\omega_n^{(2)})^2 - (\omega_{n\pm4}^{(0)})^2} \Big\{ z_{n\pm4}(n) - l_{n\pm4}(n)(\omega_{n\pm4}^{(0)})^2$$

$$+ \frac{p_{n+2}(n+2) y_{n+2}(n)(\omega_{n\pm4}^{(0)})^2}{(\omega_{n\pm2}^{(0)})^2 - (\omega_{n\pm4}^{(0)})^2} - \frac{p_{n+2}(n+2) p_{n+2}(n)(\omega_{n\pm4}^{(0)})^4}{(\omega_{n\pm2}^{(0)})^2 - (\omega_{n\pm4}^{(0)})^2}$$

$$+ \frac{\big(p_{n+2}(n)(\omega_{n\pm4}^{(0)})^2 - y_{n\pm2}(n)\big)}{(\omega_{n\pm2}^{(0)})^2 - (\omega_{n\pm4}^{(0)})^2} p_{n\pm2}(n\pm2)(\omega_{n\pm4}^{(0)})^2$$

$$+ y_{n\pm2}(n\pm2) \Big\} \exp(i\omega_{n\pm4}^{(0)} t + e^4 \frac{A_n^{(0)}}{(\omega_n^{(2)})^2 - (\omega_n^{(0)})^2}$$

$$\times \Big\{ \frac{p_{n\pm2}(n\mp2) y_{n\mp2}(n)(\omega_n^{(0)})^2}{(\omega_{n\mp2}^{(0)})^2 - (\omega_n^{(0)})^2}$$

$$- \frac{p_{n\pm2}(n\mp2) p_{n\mp2}(n)(\omega_n^{(0)})^4}{(\omega_{n\mp2}^{(0)})^2 - (\omega_n^{(0)})^2} + \frac{y_{n\mp2}(n) y_{n\pm2}(n\mp2)}{\pm(\omega_{n\mp2}^{(0)})^2 \mp (\omega_n^{(0)})^2}$$

$$- \frac{p_{n\pm2}(n) y_{n\mp2}(n\pm2)(\omega_n^{(0)})^2}{\pm(\omega_n^{(0)})^2 \mp (\omega_{n+2}^{(0)})^2} \Big\} \exp(i\omega_n^{(0)} t), \tag{7}$$

$$(\omega_n^{(2)})^2 = x_n(n) + y_n(n) e^2 + z_n(n) e^4. \tag{7a}$$

Поскольку возмущение поверхности $\xi(\vartheta, t)$ описывается выражением (2), то решение (7) является искомой функцией времени с неизвестными константами $A_n^{(2)}$, $A_{n\pm2}^{(1)}$ и $A_{n\pm4}^{(0)}$, которые можно определить из начальных условий (1). Так как A_n в общем случае комплексная величина, то ее целесообразно представить в экспоненциальном виде:

$$A_n^{(2)} = a_n^{(2)} \exp(ib_n^{(2)}), \quad A_n^{(1)} = a_n^{(1)} \exp(ib_n^{(1)}),$$
$$A_n^{(0)} = a_n^{(0)} \exp(ib_n^{(0)}), \tag{8}$$

где $a_n^{(m)}$ и $b_n^{(m)}$ — вещественные. Неизвестные константы $a_n^{(m)}$ и $b_n^{(m)}$ будет искать последовательно в нулевом, первом и квадратичном приближении по e^2.

В нулевом приближении в решении нулевого порядка (6), с учетом (8) будем иметь

$$t = 0: \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(0)} \exp(ib_n^{(0)}) P_n(\mu) = \sum_{j=\Xi} \xi_j P_j(\mu),$$

с учетом свойства ортогональности полиномов Лежандра, выделив вещественную часть, можно записать

$$a_n^{(0)} \cos(b_n^{(0)}) = \xi_j \delta_{nj}, \tag{9}$$

где δ_{nj} — символ Кронекера.

Используя теперь второе граничное условие (1), опять, выделив вещественную часть, получим

$$\omega_n^{(0)} a_n^{(0)} \sin(b_n^{(0)}) = 0,$$

откуда

$$b_n^{(0)} = 0. \tag{10}$$

С учетом (10) можно записать выражение для определения константы $a_n^{(0}$ из (9):

$$a_n^{(0)} = \xi_j \delta_{nj}. \tag{11}$$

Аналогичным образом с учетом начальных условий (1), в решениях (6) и (7) получим в первом приближении по e^2:

$$b_n^{(1)} = 0;$$

$$a_n^{(1)} = \left(\delta_{n,j} - e^2 \frac{p_{n\pm2}(n)(\omega_{n\pm2}^{(0)})^2 + y_{n\pm2}(n)}{(\omega_n^{(0)})^2 - (\omega_{n\pm2}^{(0)})^2} \delta_{n\pm2,j} \right) \xi_j; \tag{12}$$

в квадратичном приближении по e^2:

$$b_n^{(2)} = 0,$$

$$a_n^{(2)} = \xi_j \Big\{ \delta_{nj} \Big\{ 1 + e^4 \Big[\big[p_{n\pm2}(n\mp2)(\omega_n^{(0)})^2 + y_{n\pm2}(n\mp2) \big] \big[\mp p_{n\mp2}(n)(\omega_{n\mp}^{(1)})^2 \pm y_{n\mp2}(n) \big]$$

$$\times \Big(\big[(\omega_n^{(0)})^2 + (\omega_{n\mp2}^{(0)})^2 \big] \big[(\omega_n^{(1)})^2 + (\omega_n^{(2)})^2 \big] \Big)^{-1}$$

$$- \frac{1}{(\omega_n^{(2)})^2 - (\omega_n^{(0)})^2} \Big(\pm \frac{p_{n\pm2}(n\mp2) p_{n\mp2}(n)(\omega_n^{(0)})^4}{(\omega_n^{(2)})^2 - (\omega_{n\mp2}^{(0)})^2}$$

$$\pm \frac{p_{n\mp2}(n) y_{n\mp2}(n\mp2)(\omega_n^{(0)})^2}{(\omega_n^{(0)})^2 - (\omega_{n\mp2}^{(0)})^2}$$

$$\pm \frac{p_{n\mp2}(n\mp2) y_{n\mp2}(n)(\omega_n^{(0)})^2}{(\omega_n^{(0)})^2 - (\omega_{n\pm2}^{(0)})^2} \pm \frac{y_{n\pm2}(n) y_{n\mp2}(n\pm2)}{(\omega_n^{(0)})^2 - (\omega_{n\pm2}^{(0)})^2} \Big) \Big] \Big\}$$

$$+ \delta_{n\pm2,j} \Big\{ -e^2 \Big[\frac{-p_{n\pm2}(n)(\omega_{n\pm2}^{(1)})^2 + y_{n\pm2}(n)}{(\omega_n^{(2)})^2 - (\omega_{n\pm2}^{(1)})^2} \Big]$$

$$- e^4 \Big[\frac{-l_{n\pm2}(n)(\omega_{n\pm2}^{(1)})^2 + z_{n\pm2}(n)}{(\omega_n^{(2)})^2 - (\omega_{n\pm2}^{(1)})^2} \Big] \Big\} + \delta_{n\pm4,j} e^4$$

$$\times \Big\{ -l_{n\pm4}(n) \big[(\omega_{n\pm2}^{(0)})^2 - (\omega_{n\pm4}^{(0)})^2 \big] \big[(\omega_{n\pm2}^{(1)})^2 - (\omega_n^{(2)})^2 \big] (\omega_{n\pm4}^{(0)})^2$$

$$+ \big[(\omega_{n\pm4}^{(0)})^2 - (\omega_{n\pm2}^{(1)})^2 \big] \big[p_{n\pm2}(n)(\omega_n^{(2)})^2 - y_{n\pm2}(n) \big]$$

$$\times \big[p_{n\pm2}(n\pm2)(\omega_{n\pm4}^{(0)})^2 + y_{n\pm2}(n\pm2) \big]$$

$$+ \big[(\omega_{n\pm2}^{(0)})^2 - (\omega_{n\pm4}^{(0)})^2 \big] \big[(\omega_{n\pm2}^{(1)})^2 - (\omega_{n\pm4}^{(2)})^2 \big] z_{n\pm4}(n) \Big\}$$

$$\times \Big\{ \big[(\omega_{n\pm2}^{(0)})^2 - (\omega_{n\pm4}^{(0)})^2 \big] \big[(\omega_{n\pm4}^{(0)})^2 - (\omega_n^{(2)})^2 \big]$$

$$\times \big[(\omega_{n\pm2}^{(1)})^2 - (\omega_n^{(2)})^2 \big] \Big\}^{-1} \Big\}. \tag{13}$$

Поскольку в (13) коэффициенты вещественны, то вещественная часть этого выражения выделяется при замене экспонент с мнимыми показателями на косинусы (частоты считаем вещественными):

$$\exp(i\omega_n^{(j)}t) \Rightarrow \cos(\omega_n^{(j)}t). \tag{14}$$

Чтобы получить окончательный вид функции $\xi(\vartheta, t)$, необходимо подставить полученные выражения (11), (12) в решение (13) дифференциального уравнения. Учтем дисперсионные уравнения (4a), (6a), (7a) и, перейдя от суммирования по n к суммированию по j, получим выражение для формы осциллирующей капли в произвольный момент времени в принятом порядке приближений (т.е. содержащее слагаемые $\sim |\xi|$, $\sim e^2|\xi|$, $\sim e^4|\xi|$):

$$\xi(\vartheta, t) = \sum_{j=\Xi} \xi_j \Bigg\{ \Bigg\{ \cos(\omega_j^{(2)}t) - e^2\big[\cos(\omega_j^{(0)}t) - \cos(\omega_j^{(1)}t)\big]$$

$$\times \Big\{ p_{j-2}(j)x_j(j)y_{j+2}(j-2)[x_j(j) - x_j(j+2)]$$

$$+ p_{j-2}(j+2)x_j(j)y_{j+2}(j)[-x_j(j-2) + x_j(j)]$$

$$+ p_{j+2}(j-2)x_j(j)[x_j(j) - x_j(j+2)]$$

$$+ [p_{j-2}(j)x_j(j) - y_{j-2}(j)] - x_j(j)y_{j+2}(j-2)y_{j-2}(j)$$

$$+ x_j(j+2)y_{j+2}(j-2)y_{j-2}(j) - x_j(j-2)y_{j+2}(j)$$

$$\times y_{j-2}(j+2) + x_j(j)y_{j+2}(j)y_{j-2}(j+2) + p_{j+2}(j)x_j(j)$$

$$\times [x_j(j-2) - x_j(j)][p_{j-2}(j+2)x_j(j) + y_{j-2}(j+2)]\Big\}$$

$$\times \Big\{ y_j(j)[x_j(j-2) - x_j(j)][x_j(j) - x_j(j+2)]\Big\}^{-1}$$

$$- \frac{e^4[\cos(\omega_{j\pm 2}^{(0)}t) - \cos(\omega_j^{(0)}t)]}{[x_j(j-2) - x_j(j)]^2}[p_{j\pm 2}(j\mp 2)x_j(j)$$

$$+ y_{j\pm 2}(j\mp 2)][p_{j\mp 2}(j)x_j(j\mp 2) - y_{j\mp 2}(j)]\Bigg\} P_n(\mu)$$

$$- \Bigg\{ e^2 - \frac{[\cos(\omega_j^{(1)}t) - \cos(\omega_{j\mp 2}^{(1)}t)]}{[x_j(j\mp 2) - x_j(j)]^2}$$

$$\times \Big\{ p_{j\pm 2}(j\mp 2)x_j(j\mp 2)x_j(j) - p_{j\pm 2}(j\mp 2)x_j(j)^2$$

$$- x_j(j\mp 2)y_{j\pm 2}(j\mp 2) + x_j(j)y_{j\pm 2}(j\mp 2)\Big\}$$

$$+ e^4\frac{[\cos(\omega_j^{(0)}t) - \cos(\omega_{j\mp 2}^{(0)}t)]}{[x_j(j\mp 2) - x_j(j)]^2}$$

$$\times \Big\{ l_{n\pm 2}(j\mp 2)x_j(j\mp 2)x_j(j) - l_{j\pm 2}(j\mp 2)x_j(j)^2$$

$$- p_{j\pm 2}(j\mp 2)x_j(j)y_j(j\mp 2) + p_{j+2}(j\mp 2)x_j(j\mp 2)$$

$$\times y_j(j) + y_j(j\mp 2)y_{j\pm 2}(j\mp 2) - y_j(j)y_{j\pm 2}(j\mp 2)$$

$$- x_j(j\mp 2)z_{j\pm 2}(j\mp 2) + x_j(j)z_{j\pm 2}(j\mp 2)\Big\}\Bigg\} P_{j\mp 2}(\mu)$$

$$+ e^4\Bigg\{ -[\cos(\omega_j^{(0)}t) - \cos(\omega_{j\pm 4}^{(0)}t)]\Big\{ l_{j\mp 4}(j\pm 4)x_j(j)$$

$$\times [x_j - x_j(j\pm 2)][x_j(j\pm 2) - x_j(j\pm 4)]$$

$$- [p_{\mp 2}(j\pm 2)x_j(j) + y_{j\mp 2}(j\pm 2)][p_{j\mp 2}(j\pm 4)$$

$$\times x_j(j\pm 4) + x_j(j\pm 2)y_{j\mp 2}(j\pm 4)]$$

$$+ [x_j(j) - x_j(j\pm 2)][x_j(j\pm 2) - x_j(j\pm 4)]z_{j\mp 4}(j\pm 4)\Big\}$$

$$\times \Big\{ [x_j(j) - x_j(j\pm 2)][x_j(j) - x_j(j\pm 4)]$$

$$\times [x_j(j\pm 2) - x_j(j\pm 4)]\Big\}^{-1} - [\cos(\omega_j^{(0)}t) - \cos(\omega_{j\pm 2}^{(1)}t)]$$

$$\times [p_{j\mp 2}(j\pm 2)x_j(j) + y_{j\mp 2}(j\pm 2)][p_{j\mp 2}(j\pm 4)x_j(j)$$

$$\times x_j(j\pm 2) + x_j(j\pm 4)y_{j\mp 2}(j\pm 4)]\Big\{ [x_j(j) - x_j(j\pm 2)]$$

$$\times [x_j(j) - x_j(j\pm 4)][x_j(j\pm 2) - x_j(j\pm 4)]\Big\}^{-1}$$

$$- [\cos(\omega_{j\pm 2}^{(1)}t) - \cos(\omega_{j\pm 4}^{(2)}t)]$$

$$\times [p_{j\mp 2}(j\pm 2)x_j(j) + y_{j\mp 2}(j\pm 2)][p_{j\mp 2}(j\pm 4)x_j(j\pm 2)$$

$$\times x_j(j\pm 4) + x_j(j)y_{j\mp 2}(j\pm 4)]\Big\{ [x_j(j) - x_j(j\pm 2)]$$

$$\times [x_j(j) - x_j(j\pm 4)][x_j(j\pm 2) - x_j(j\pm 4)]\Big\}^{-1}\Bigg\} P_{j\pm 4}(\mu). \tag{15}$$

Несложно видеть, что кроме мод, определяющих начальную деформацию капли, за счет взаимодействия начальной деформации с осцилляциями дополнительно возбуждаются и моды с номерами $j \pm 2$, $j \pm 4$. Такое взаимодействие порождено именно деформацией сферической формы и при $e^2 = 0$ моды с номерами $j \pm 2$; $j \pm 4$ не возбуждаются, а моды, определяющие начальную деформацию, совершают гармонические осцилляции:

$$\xi(\vartheta, t) = \sum_{j=\Xi} \xi_j \cos(\omega_j^{(0)}t)P_j(\mu).$$

3. Рассмотрение для конкретного начального условия

Рассмотрим ситуацию, когда в начальный момент времени виртуально возбуждена одна основная $(j = 2)$ мода капиллярных осцилляций:

$$\xi = \xi_2^{(0)}P_2(\cos\vartheta).$$

В этом случае выражение (15) примет вид:

$$\xi(\vartheta, t) = \xi_2(t)P_2(\mu) + \xi_4(t)P_4(\mu) + \xi_6(t)P_6(\mu), \tag{16}$$

в котором зависимости амплитуд осцилляций от времени определятся выражениями:

$$\xi_2(t)=\xi_2^0\Big\{\cos(\omega_2^{(2)}t)+[\cos(\omega_2^{(0)}t)-\cos(\omega_2^{(1)}t)]$$

$$\times\Big\{e^2\{32[41\,804\rho^2+73\,630\rho+13\,695]$$

$$+2W^2[6164\rho^2+5093\rho-7575]$$

$$-32W[11\,608\rho^2+15\,179\rho-4695]\}$$

$$\times\{105[-20(4\rho+9)+W(8\rho+27)][-8(13\rho+20)$$

$$+W(16\rho+25)]\}^{-1}-e^4[\cos(\omega_0^{(0)}t)-\cos(\omega_2^{(0)}t)]$$

$$\times\left[\frac{2(3W-8)}{45(W-4)}\right]-e^4[\cos(\omega_4^{(0)}t)-\cos(\omega_2^{(0)}t)]$$

$$\times\{-8[-896\rho+3W(48\rho+5)-540]$$

$$\times[5W(4\rho+7)-3(52\rho+85)]\}$$

$$\times\{735[-8(13\rho+20)+W(16\rho+25)]^2\}^{-1}\Big\};$$

$$\xi_4(t)=\xi_2^0e^2\Big\{[\cos(\omega_2^{(1)}t)-\cos(\omega_4^{(1)}t)]$$

$$\times\frac{2(104W\rho-45W-96\rho+660)}{35(16W\rho+25W-104\rho-160)}$$

$$+e^2[\cos(\omega_2^{(0)}t)-\cos(\omega_4^{(0)}t)]$$

$$\times\{-4W[478\,208\rho^2+2\,833\,702\rho+2\,314\,035]$$

$$+4W^2[70\,528\rho^2+341\,152\rho+269\,355]$$

$$+480[9342\rho^2+52\,291\rho+39\,890]\}$$

$$\times\{4851[W(16\rho+25)-8(13\rho+20)]\}^{-1}\Big\};$$

$$\xi_6(t)=\xi_2^0e^4\Big\{[\cos(\omega_2^{(0)}t)-\cos(\omega_6^{(0)}t)]$$

$$\times\{-1225[W(4173W^2-99\,154W+891\,800]$$

$$+70\rho[W(196\,705W^2-5\,049\,746W+46\,699\,240)$$

$$-133\,950\,624]+64\rho^2[-149\,133\,092$$

$$+W(276\,237W^2-7\,200\,098W+58\,322\,248)]$$

$$+128\rho^3[-25\,959\,246+W(71\,644W^2-1\,597\,408W$$

$$+11\,336\,677)]\}\{4620[-8(13\rho+20)+W(16\rho+25)]$$

$$\times[W(32\rho+49)-268\rho-406][W(16\rho+21)$$

$$-4(38\rho+49)]\}^{-1}+[\cos(\omega_4^{(0)}t)-\cos(\omega_6^{(0)}t)]$$

$$\times\{[3W(48\rho+5)-896\rho-540][35W(-31W+376)$$

$$+2W\rho(6191W-88\,356)+48\rho^2(182W^2-2577W$$

$$+182W^2)+96(6336\rho-455)]\}$$

$$\times\{165[W(25+16\rho)-8(13\rho+20)][W(32\rho+49)$$

$$-268\rho-406][W(16\rho+21)-4(38\rho+49)]\}^{-1}$$

$$+[\cos(\omega_2^{(0)}t)-\cos(\omega_4^{(0)}t)]\{[3W(48\rho+5)-896\rho-540)]$$

$$\times[-245W(17W+580)+14W\rho(23W-19\,480)$$

$$+16\rho^2(206W^2-8185W+54\,924)+336(6568\rho+4165)]\}$$

$$\times\{1155[-8(13\rho+20)+W(16\rho+25)][W(32\rho+49)$$

$$-268\rho-406][W(16\rho+21)-4(38\rho+49)]\}^{-1}\Big\}. \quad (17)$$

Здесь $\xi_2^{(0)}$ — амплитуда начальной деформации сфероидальной формы, определенной вторым полиномом Лежандра. Несложно видеть, что амплитуда осцилляций основной моды содержит слагаемые нулевого, первого и второго порядка малости по e^2, амплитуда осцилляций второй моды — только слагаемые первого и второго порядка малости по e^2, а шестой моды — только квадратичные по e^2. Для сферической капли ($e^2=0$) останется только основная мода, которая и будет совершать гармонические осцилляции.

Следует отметить, что принятый вид начальной деформации $\xi=\xi_2^{(0)}P_2(\cos\vartheta)$ соответствует увеличению эксцентриситета капли. В самом деле, если начальная форма капли сферическая, то, налагая на нее указанную деформацию, получим сфероид, большая и меньшая полуоси которого определятся соотношениями $a=R+\xi_2^{(0)}$ и $b=R-0.5\xi_2^{(0)}$.

Связь квадрата эксцентриситета получающегося сфероида e^2 с амплитудой малой деформации $\xi_2^{(0)}$ определится следующим образом [15,16]:

$$e^2=1-\frac{b^2}{a^2}\equiv1-\frac{(R-0.5\xi_2^{(0)})^2}{(R+\xi_2^{(0)})^2}$$

$$\approx1-\left[1-\frac{\xi_2^{(0}}{R}+\frac{(\xi_2^{(0)})^2}{4R^2}\right]\left[1-\frac{2\xi_2^{(0)}}{R}+\frac{3(\xi_2^{(0)})^2}{R^2}\right]$$

$$\approx\frac{3\xi_2^{(0)}}{R}.$$

4. Обсуждение полученных результатов

Из (16) видно, что кроме колебаний виртуально возбужденной основной моды вследствие взаимодействия начальной деформации поверхности капли и капиллярных осцилляций будут возбуждаться и моды более высоких порядков. Начальное возбуждение моды $j=2$ приводит к возбуждению мод $j=4$ и 6. Очевидно, что если провести расчет, аналогичный проведенному с сохранением слагаемых $\sim e^{2n}$, то начальное возбуждение основной моды приведет к возбуждению всех четных мод от $j=2$ до $2n+2$, причем их амплитуды будут пропорциональны $\xi_2^{(0)}$ — амплитуде начальной деформации сфероидальной формы $\xi=\xi_2^{(0)}P_2(\cos\vartheta)$, а множители при амплитуде $2n$-й моды определяться как степень квадрата эксцентриситета: $\sim(e^2)^{2n-2}$. Поскольку в обсуждаемой ситуации речь идет лишь о математической процедуре, ограниченной лишь соображениями асимптотичности, то естественно предположить, что в реальности деформация конечной амплитуды вида $\xi=\xi_2^{(0)}P_2(\cos\vartheta)$ приведет к одновременному возбуждению всех четных мод за счет взаимодействия сфероидальной деформации с высокими модами осцилляций.

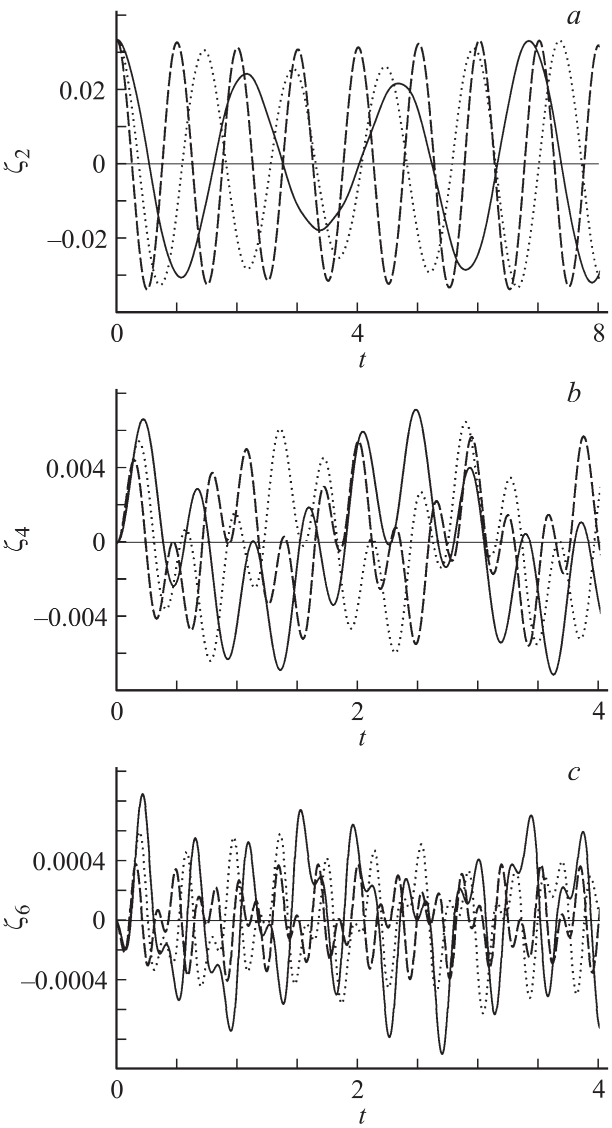

Рис. 1. Зависимости амплитуды n-й моды от времени, когда начальная деформация сфероидальной формы имеет вид $\xi=\xi_2^{(0)}P_2(\cos\vartheta)$, рассчитанные по (17) при значении полярного угла $\vartheta=0$, при $\xi_2^{(0)}=0.033$, $e^2=0.3$, $\rho=10^{-3}$. Время измерено в долях периода основной моды осцилляций сфероидальной при $W=0$ ($T=2.58$). Зависимость для $W=0$ нанесена штрихами; для $W=2$ — точками; для $W=3$ — сплошной кривой. a — $j=2$, b — 4, c — 6.

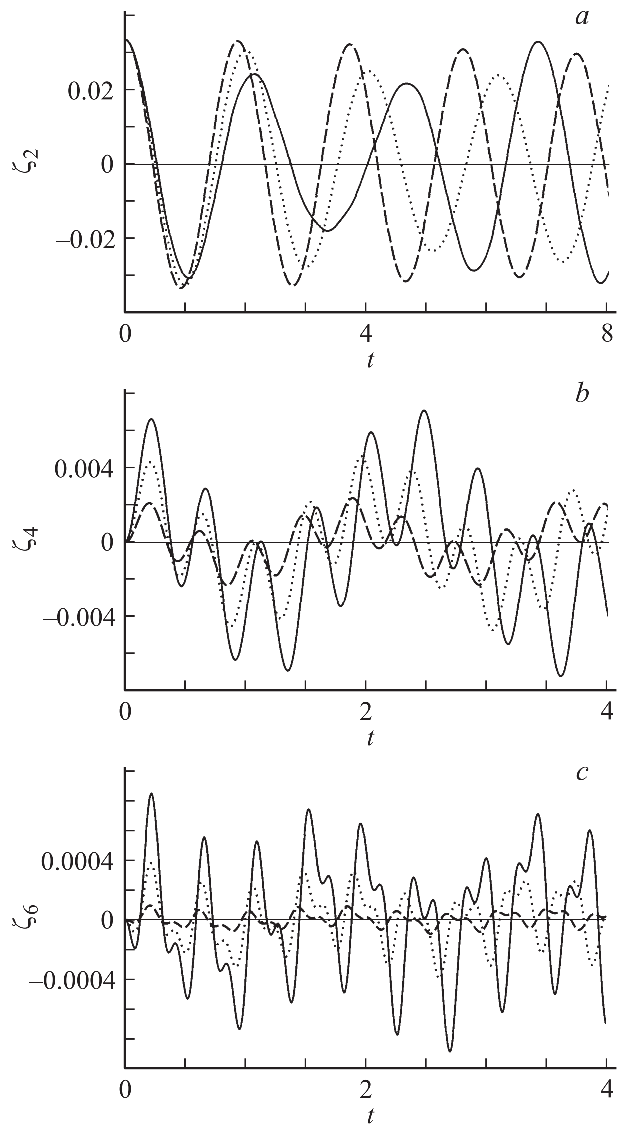

Рис. 2. Зависимости, аналогичные приведенным на рис. 1, рассчитанные по (17) при $W=3$ и различных значениях квадрата эксцентриситета e^2 для отдельных мод ξ: a — $j=2$; b — 4; c — 6. Зависимость для $e^2=0.1$ нанесена штрихами; для $e^2=0.2$ — точками; для $e^2=0.3$ — сплошной кривой.

На рис. 1–3 приведены результаты расчета по (16), (17). На рис. 1 нанесены рассчитанные по (17) при различных фиксированных значениях параметра W зависимости амплитуды n-й моды от времени, когда начальная деформация сфероидальной формы капли имеет вид $\xi=\xi_2^{(0)}P_2(\cos\vartheta)$, и все расчеты проведены с точностью $\sim|\xi|, \sim e^2|\xi|, \sim e^4|\xi|$. Видно, что в соответствии со сказанным выше при начальной деформации, определяющейся основной модой, возбуждаются и связанные с

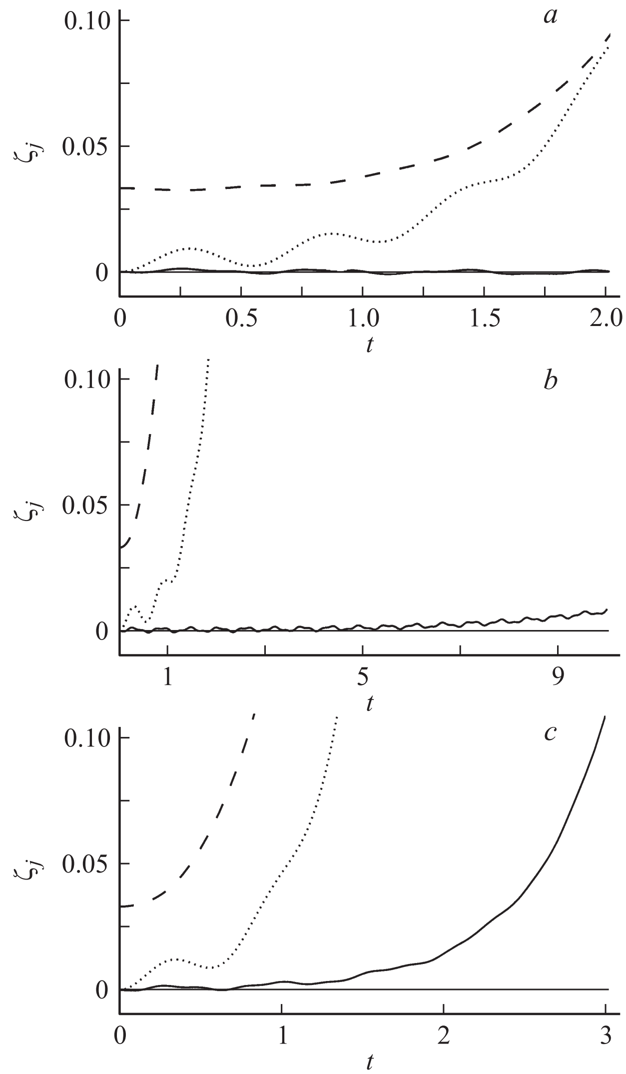

Рис. 3. Зависимости амплитуд мод $\xi_j(t)$, где $j = 2, 4, 6$, от времени, измеренного в долях периода основной моды при $W = 0$, $\rho = 10^{-3}$ и $e^2 = 0.3$, рассчитанные по (17) при: a — $W = 3.9$, b — 4.01, c — 4.3. Зависимость для $\xi_2(t)$ нанесена штрихами, для $\xi_4(t)$ — точками, для $\xi_6(t)$ — сплошной кривой.

ней взаимодействием четвертая и шестая моды. Причем энергия начальной деформации перекачивается из основной моды сразу в две взаимодействующие с ней: и четвертую, и шестую, а затем обратно в основную. Безразмерное характерное время нахождения энергии, отданной основной модой в четвертую и шестую, при фиксированном эксцентриситете слабо зависит от величины параметра W и составляет ~ 7. Доля энергии начальной деформации, передаваемой основной модой во взаимодействующие с ней четвертую и шестую, заметно увеличивается с ростом W. Видно также, что с ростом величины параметра Рэлея W амплитуды осцилляций четвертой и шестой мод увеличиваются так же, как и периоды колебаний всех мод.

На рис. 2 приведены зависимости от времени амплитудных множителей (17), рассчитанные для различных величин сфероидальной деформации. Видно, что с ростом величины эксцентриситета капли увеличивается амплитуда осцилляций четвертой и шестой мод и уменьшается характерное время обмена энергией между взаимодействующими модами (для $e^2 = 0.3$ оно в безразмерном виде составляет ~ 3.2, для $e^2 = 0.2$ — ~ 5, а для $e^2 = 0.1$ — ~ 10). Период осцилляций для всех мод увеличивается с ростом величины эксцентриситета.

На рис. 3 приведены временные зависимости амплитуды основной моды при значениях параметра W, близких к критическому значению. На рис. 3, a иллюстрируется ситуация, когда заряд на капле немного меньше критического для сферической капли в смысле реализации неустойчивости по отношению к собственному заряду ($W_{\mathrm{cr}} = 4$ [1,5]). Задание начальной сфероидальной деформации и возбуждение основной моды с амплитудой $\xi_2^{(0)}$ выводит каплю за пределы устойчивости [6] и, согласно (7a), частота основной моды становится мнимой $\omega_2^{(2)} \to i\gamma_2^{(2)}$, а ее амплитуда начинает увеличиваться со временем примерно по экспоненциальному закону [6,7,15,16] ($\gamma_2^{(2)}$ — инкремент неустойчивости). В этом случае в соотношениях (17) $\cos(\omega_2^{(2)}t)$ превращается в $\mathrm{ch}(\gamma_2^{(2)}t)$. По мере роста величины амплитуды основной моды, согласно (6a), становится мнимой частота $\omega_2^{(1)} \to i\gamma_2^{(1)}$ и, согласно (17), неустойчивость испытает четвертая мода, причем ее амплитуда определиться суперпозицией экспоненциально нарастающего со временем слагаемого, $\sim \mathrm{ch}(\gamma_2^{(1)}t)$, и периодически изменяющихся слагаемых $\sim \cos(\omega_4^{(2)}t)$, что и видно из рис. 3, a. Шестая мода при $W < 4$ остается устойчивой, так как, согласно (17), она $\sim \cos(\omega_2^{(0)}t)$, а, согласно (4a), $\omega_2^{(0)}$ вещественна при $W < 4$. При $W > 4$ претерпевает неустойчивость и шестая мода, как это можно видеть из рис. 3, b, c.

Впрочем, описанная картина, проиллюстрированная зависимостями на рис. 3, рассчитанными по (17), справедлива только в рамках принятой модели, согласно которой $e^2 = \mathrm{const}$, и в пределах сохранения асимптотичности расчетов. То обстоятельство, что на рисунках некоторые участки кривых выходят за рамки асимптотичности, обусловлено лишь стремлением продемонстрировать возможные тенденции роста.

Согласно существующим представлениям [1,6], механизм реализации неустойчивости капли по отношению к собственному заряду может быть описан следующим образом: при величине зарядового параметра $W = 4$ претерпевает неустойчивость основная мода капли и ее амплитуда начинает увеличиваться со временем по экспоненциальному закону [6,7,15,16], что примерно соответствует вытягиванию капли в сфероид. Когда амплитуда сфероидальной деформации достигает некой величины, при которой выполнятся критические условия неустойчивости четвертой моды, зависящие от эксцентриситета и убывающие с его ростом, она также станет неустойчивой [6,7,15,16]. По мере дальнейшего вытягивания претерпят неустойчивости шестая, восьмая и более высокие моды, пока за счет суперпозиции высоких мод на вершинах капли не сформируются эмитирующие выступы, с вершин которых начнется сброс избыточного заряда капли путем эмиссии высокодисперсных сильно заряженных дочерних капелек [6,7,15–19]. Такой механизм формирования эмиссионных выступов, основанный на представлении о последовательно теряющих устойчивость по мере вытягивания капли модах, предложен в работах [6,20]. Однако критические условия (величина параметра W) потери устойчивости высокими модами (с $n \geq 8$) весьма велики, а при $W \approx 4$ для реализации неустойчивости таких мод требуются весьма большие значения сфероидальных деформаций ($e^2 \approx 1$) [6].

Из рис. 3 следует несколько поправок к описанной картине реализации неустойчивости. Во-первых, при $W \geq 4$, как только начнется увеличение амплитуды неустойчивой основной моды четвертая и шестая моды, связанные с ней взаимодействием, также претерпевают неустойчивость. Это следует из проведенных выше расчетов, выполненных в приближении: $\sim |\xi|$, $\sim e^2|\xi|$, $\sim e^4|\xi|$. Если провести аналогичные асимптотические расчеты с сохранением слагаемых, например, вплоть до $\sim e^{10}|\xi|$, то, согласно общей идеологии расчета, с началом потери устойчивости основной моды потеряют устойчивость и все четные моды до двенадцатой. Таким образом, формирование эмисионных выступов на вершинах капли идет с самого начала реализации неустойчивости основной моды. Во-вторых, поскольку все моды, неустойчивость которых порождена их взаимодействием с основной модой, аддитивным образом содержат слагаемые, периодически изменяющиеся во времени, то вершины эмитирующих выступов будут осциллировать, что приводит к идее динамических эмиссионных выступов. Подтверждением этому могут служить фотографии эмиссионного выступа [21,22], сделанные во время эмиссии дочерних капелек, на которых запечатлены два крайних положения вершины осциллирующего выступа.

Заключение

Исследование временной эволюции мод осцилляций заряженной капли идеальной несжимаемой жидкости, имеющей форму вытянутого сфероида, показало, то за счет взаимодействия мод с деформацией (определяющейся некой четной модой с номером j) кроме j-й моды также возбуждаются две соседние четные моды, связанные с ней взаимодействием. Амплитуды возбужденных мод с номерами $j \pm 2m$ пропорциональны амплитуде j-й моды и квадрату эксцентриситета сфероида в степенях $j + 2m$, т. е. быстро убывают с ростом m. Часть энергии начальной деформации с течением времени периодически перекачивается между всеми модами, связанными взаимодействием.

При наличии на капле заряда, близкого к критическому (в смысле реализации ее электростатической неустойчивости), задание начальной деформации основной моды конечной амплитуды выводит каплю из состояния устойчивости, а амплитуда основной моды начинает экспоненциально увеличиваться со временем. Остальные моды, связанные с основной взаимодействием, также растут. Суперпозиция на вершинах капли устойчивых высоких мод приводит к формированию осциллирующих со временем „динамических“ выступов, с вершин которых сбрасывается избыточный электрический заряд.

Приложение

Явный вид коэффициентов $x_n(n)$, $y_n(n)$, $z_n(n)$, $l_n(n)$, $p_n(n)$ следующий:

$$x_n(n) = \frac{n(n-1)(n+1)(n+2-W)}{1+n(1+\rho)};$$

$$y_n = -\frac{(n+1)^2(n^3+2n^2+3n-2)+n^2(n^3+n^2+2n+4)\rho}{(1+n+n\rho)^2}K_{2nn} + W\frac{(2n^3+3n^2-1+2n^2\rho)}{(1+n+n\rho)^2}K_{2nn};$$

$$z_n(n) = -\frac{(n+1)^2}{(1+n+n\rho)^2}\Bigg(-\frac{n}{45}(n^3+6n^2+3n-28) - \frac{1}{9}(n-1)^2(n+2)^2K_{2(n-2)n}K_{2n(n-2)} - \frac{1}{63}(2n^4+36n^3+60n^2+n-60)K_{2nn} + \frac{n}{9}(n-1)(3n^2+5n-4)K_{2n(n+2)}K_{2(n+2)n} - \frac{1}{105}(6n^4+41n^3+31n^2+628n-180)K_{4nn} + \frac{(n+1)}{9(1+n+n\rho)}(n^4+3n^3+12n^2+20n+12)K_{2nn}\Bigg)$$

$$+\frac{(n+1)^2W}{(1+n+n\rho)}\Bigg(\frac{n}{45}(n-1)(n+14) + \frac{1}{9}(3n^3+12n^2+5n+2)K_{2(n-2)2}K_{2n(n-2)} + \frac{1}{63}(2n^3+11n^2+35n-30)K_{2nn} - \frac{1}{9}(n-3)(n-1)K_{2nn}^2 - \frac{n}{9(n+2)}(5n^3+18n^2+15n+4)K_{2n(n+2)}K_{2(n+2)n} + \frac{1}{210}(12n^3-145n^2+245n-180)K_{4nn}\Bigg)\frac{\rho}{(1+n+n\rho)}$$

$$\times\left(\frac{n^2}{45}(n+1)(n^3-3n^2-6n+26)+\frac{n^2}{63}(2n^4-28n^3\right.$$

$$-36n^2+19n-35)K_{2nn}$$

$$+\frac{n^2}{9}(n-2)(n+1)(n+2)(2n^2+3n-3)K_{2(n-2)n}K_{2n(n-2)}$$

$$-\frac{n^2}{9}(n-1)(n+2)(2n^3+11n^2+13n+6)K_{2n(n+2)}K_{2(n+2)n}$$

$$+\frac{n^2}{105}(6n^4+65n^3+190n^2-419n-730)K_{4nn}$$

$$+\frac{K_{2nn}^2}{(1+n+n\rho)}\left(-\frac{n^3\rho}{9}(n^4+n^3+9n^2-n+2)\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{3}(n^6+3n^5+n^4-3n^3+23n^2+25n+6)\right)\right)$$

$$+\frac{W\rho}{(1+n+n\rho)}\left(-\frac{n^2}{45}(n-13)(n-1)(1+n)\right.$$

$$-\frac{n^2}{9}(n+1)(2n^3-3n^2-21n-2)K_{2(n-2)n}K_{2n(n-2)}$$

$$-\frac{n^2}{63}(2n^3-11n^2+10n-37)K_{2nn}+\frac{n^2}{9}(2n^4+7n^3-12n^2$$

$$-19n-6)-\frac{n^2}{210}(12n^3+145n^2+236n-257)K_{4nn}$$

$$+\frac{K_{2nn}^2}{(1+n+n\rho)}\left(\frac{1}{3}(n^5+7n^4+22n^3+2n^2-11n-3)\right.$$

$$\left.\left.+\frac{n^3}{9}(n^3+2n^2+11n+13)\rho\right)\right);$$

$$y_{n-2}(n)=\frac{n(n+1)(2n^2-6n+12+(n-5)W)}{3(1+n+n\rho)}K_{2(n-2)n};$$

$$y_{n+2}(n)=\frac{n(n+1)(2n^2+10n+20+(n-7)W)}{3(1+n+n\rho)}K_{2(n+2)n};$$

$$z_{n-2}(n)=\frac{1}{1+n+n\rho}\left\{\frac{n}{63}(n+1)(23n^2-51n+30)K_{2(n-2)n}\right.$$

$$-\frac{2}{9}(n^2-3n+6)\big((n+1)^2(n+3)+(n-2)n^2\rho\big)K_{2(n-2)n}K_{2nn}$$

$$-\frac{n}{70}(n+1)(25n^2-25n-321)K_{4(n-2)n}+W\left[\frac{n^2}{63}(n+1)\right.$$

$$\times(n^2-12n-9)K_{2(n-2)n}-\frac{n}{9}(n+1)$$

$$\times(n+12)K_{2(n-2)(n-2)}K_{2(n-2)n}+\frac{K_{2(n-2)n}K_{2nn}}{9(1+n+n\rho)}\big[(n+1)^2$$

$$\times(2n^3+6n^2-14n+15)+2n^2(n^3+4n^2-n-13)\rho\big]$$

$$\left.\left.+\frac{n}{105}(n+1)(3n^3-15n^2+36n-59)K_{4(n-2)n}\right]\right\};$$

$$z_{n+2}(n)=\frac{1}{1+n+n\rho}\left\{\frac{n}{63}(n+1)(23n^2+97n+104)K_{2(n+2)n}\right.$$

$$-\frac{2}{9}(n^2+5n+10)\big((n+1)^2(n+3)+(n-2)n^2\rho\big)K_{2nn}K_{2(n+2)n}$$

$$-\frac{n}{70}(n+1)(25n^2+75n-271)K_{4(n+2)n}+W\left\{\frac{n}{63}(n+1)\right.$$

$$\times(n^3-n-40)K_{2(n+2)n}-\frac{1}{9(1+n+n\rho)}\big[(n+1)^2(2n^3+20n^2$$

$$+32n-21)+2n^2(n^3+11n^2+23n+25)\rho\big]K_{2nn}K_{2(n+2)n}$$

$$+\frac{n}{105}(n+1)(3n^2+21n^2+144n+115)K_{4(n+2)n}$$

$$\left.\left.-\frac{n(n_1)(n+8)}{3(1+n+n\rho)}K_{2(n+2)n}K_{2(n+2)(n+2)}\right\}\right\};$$

$$z_{n-4}(n)=\frac{n(n+1)}{2(1+n+n\rho)}\left(\frac{1}{70}(-25n^2+75n+196)K_{4(n-4)n}\right.$$

$$+W\left(\frac{4}{9}(n^2-n-10)K_{2(n-4)(n-2)}K_{2(n-2)n}\right.$$

$$\left.\left.-\frac{2}{105}(12n^2-69n+173)K_{4(n-4)n}\right)\right);$$

$$z_{n+4}(n)=\frac{n(n+1)}{1+n+n\rho}\left(\frac{1}{70}(-25n^2+125n+96)K_{4(n+4)n}\right.$$

$$+W\left(-\frac{2}{9}(n+5)(n+10)K_{2(n+2)n}K_{2(n+4)(n+2)}\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{105}(12n^2-237n+463)K_{4(n+4)n}\right)\right);$$

$$P_{n+2}(n)=-\frac{(n+1)(n+4)+n(n+2)\rho}{3(n+2)(1+n+n\rho)}K_{2(n+2)n};$$

$$P_{n-2}(n)=\frac{1-n^2+n(2n^2+n-5)\rho}{3(n-1)(1+n+n\rho)}K_{2(n-2)n};$$

$$l_{n+2}(n)=\frac{(n+1)}{(n+2)(1+n+n\rho)}\left\{-\frac{1}{63}(13n+46)K_{2(n+2)n}\right.$$

$$-\frac{(n-2)(n+1)(n+3)}{9(1+n+n\rho)}K_{2nn}K_{2(n+2)n}+\frac{1}{9(n+2)}$$

$$\times[n^3+4n^2+5n-4]K_{2(n+2)n}K_{2(n+2)(n+2)}$$

$$\left.+\frac{(7n-148)}{210}K_{4(n+2)n}\right\}+\frac{\rho}{(1+n+n\rho)}$$

$$\times\left\{\frac{n}{63}(4n+3)K_{2(n+2)n}-\frac{1}{9(n+2)}[4n^4+19n^3+25n^2\right.$$

$$+22n+6+n^2(n+2)(3n+8)\rho]K_{2nn}K_{2(2+n)n}$$

$$-\frac{n(n+4)(n+6)}{9(n+3)}K_{2(n+2)n}K_{2(n+2)(n+2)}$$

$$\left.+\frac{n(24n^2+175n+435)}{210(n+3)}K_{4(n+2)n}\right\};$$

$$
\begin{aligned}
l_{n-2}(n) &= \frac{(n+1)}{1+n+n\rho} \\
&\times \Bigg(\bigg(-\frac{4n+1}{63} + \frac{(n-5)(n-3)}{9(n-2)} K_{2(n+2)(n+2)} \\
&+ \frac{(n+1)(3n-5)}{9(1+n+n\rho)} K_{2nn} \bigg) K_{2(n-2)n} \\
&- \frac{(24n^2-127n+284)}{210(n-2)} K_{4(n-2)n} \Bigg) + \frac{\rho}{1+n+n\rho} \\
&\Bigg\{ \Bigg[-\frac{n(2n^3-20n^2-15n+53)}{63(n-1)} + \frac{n}{9(n-1)^2} (2n^4 - n^3 \\
&- 9n^2 + 2n + 12) K_{2(n-2)(n-2)} - \frac{K_{2nn}}{9(n-1)(1+n+n\rho)} \\
&\big(15n^3 + 14n^2 - 37n - 18 + n^2(n-2)(3n+1)\rho\big) K_{2nn} \Bigg] K_{2(2-n)n} \\
&- \frac{n}{210(n-1)} (12n^3 - 39n^2 - 5n + 191) K_{4(n-2)n} \Bigg\};
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
l_{n+4}(n) &= \frac{1}{(n+4)(1+n+n\rho)} \Bigg\{ -\frac{1}{9(n+2)} \\
&\times \big[(n+1)(n^3 + 9n^2 + 26n + 32) \\
&+ 3n(n+2)(n+4)(n+6)\rho \big] K_{2(n+2)n} K_{2(n+4)(n+2)} \\
&+ \frac{1}{210} \big[(n+1)(3n+4)(4n+25) + n(n+4) \\
&\times (36n+223)\rho \big] K_{4(n+4)n} \Bigg\};
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
l_{n-4}(n) &= \frac{1}{(n-3)(1+n+n\rho)} \Bigg\{ -\frac{1}{9(n-1)} \\
&\times \big[-3(n-5)((n-3)(n-1)(n+1) + n(n^3 - 6n^2 \\
&+ 11n - 14)\rho \big] K_{2(n-4)(n-2)} K_{2(n-2)n} \\
&- \frac{1}{210} \big[(n-3)(n+1)(36n-187) + n(12n^3 - 96n^2 \\
&+ 151n + 159)\rho \big] K_{4(n-4)n} \Bigg\};
\end{aligned}
$$

$$K_{lmn} = [C^{n0}_{l0m0}]^2.$$

Здесь C^{n0}_{l0m0} — коэффициенты Клебша–Гордана [23].

Работа выполнена в рамках тематического плана университета, при поддержке грантов: Рособразования № 2.1.1/3776, РФФИ № 09-01-00084 и 09-08-00148.

Список литературы

[1] *Григорьев А.И., Ширяева С.О.* // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 3. С. 3–22.
[2] *Григорьев А.И., Ширяева С.О., Жаров А.Н., Коромыслов В.А.* // ЭОМ. 2005. № 3. С. 25–36.
[3] *Григорьев А.И., Ширяева С.О., Жаров А.Н., Коромыслов В.А.* // ЭОМ. 2005. № 4. С. 24–35.
[4] *Ширяева С.О., Григорьев А.И.* Заряженная капля в грозовом облаке. Ярославль: Изд-во ЯрГУ им. П.Г. Демидова, 2008. 535 с.
[5] *Rayleigh (Stritt J.W.)* // Phil. Mag. 1882. Vol. 14. P. 184–186.
[6] *Григорьев А.И.* // ЖТФ. 1985. Т. 55. Вып. 7. С. 1272–1278.
[7] *Григорьев А.И., Жаров А.Н., Ширяева С.О.* // ЖТФ. 2005. Т. 75. Вып. 8. С. 44–53.
[8] *Ширяева С.О.* // ЖТФ. 2006. Т. 76. Вып. 3. С. 93–95.
[9] *Ширяева С.О., Григорьев А.И., Мокшеев П.В.* // ЖТФ. 2008. Т. 78. Вып. 3. С. 11–20.
[10] *Ширяева С.О.* // ЖТФ. 2009. Т. 79. Вып. 6. С. 33–42.
[11] *Щукин С.И., Григорьев А.И.* // ЖТФ. 1998. Т. 68. Вып. 11. С. 48–51.
[12] *Ширяева С.О.* // ЖТФ. 2006. Т. 76. Вып. 6. С. 44–54.
[13] *Френкель Я.И.* // ЖТФ. 1936. Т. 6. № 4. С. 348–350.
[14] *Ширяева С.О., Корниенко Д.О., Волкова М.В.* // ЭОМ. 2009. № 4. С. 20–29.
[15] *Ширяева С.О., Григорьев А.И., Григорьева И.Д.* // ЖТФ. 1995. Т. 65. Вып. 9. С. 39–45.
[16] *Ширяева С.О.* // Письма в ЖТФ. 2000. Т. 26. Вып. 4. С. 5–8.
[17] *Григорьев А.И., Ширяева С.О.* // ЖТФ. 1991. Т. 61. Вып. 3. С. 19–28.
[18] *Duft D., Lebius H., Huber B.A.* et al. // Phys. Rev. Lett. 2002. Vol. 89. N 8. P. 1–4.
[19] *Duft D., Achtzehn T., Muller R.* et al. // Nature. 2003. Vol. 421. P. 128.
[20] *Григорьев А.И., Синкевич О.А.* // Изв. РАН. МЖГ. 1985. № 6. С. 10–15.
[21] *Григорьев А.И.* // ЖТФ. 1986. Т. 56. Вып. 3. С. 538–541.
[22] *Григорьев А.И., Ширяева С.О.* // ИФЖ. 1991. Т. 61. № 2. С. 632–641.
[23] *Варшалович Д.А., Москалев А.Н., Херсонский В.К.* Квантовая теория углового момента. Л.: Наука, 1975. 439 с.