

01;05

Проникновение магнитного поля в трехмерную упорядоченную джозефсоновскую среду при очень малых значениях параметра пиннинга

© М.А. Зеликман

Санкт-Петербургский государственный политехнический университет,
195251 Санкт-Петербург, Россия
e-mail: marzelik@mail.ru

(Поступило в Редакцию 31 марта 2010 г.)

Рассмотрена устойчивость мейснеровского состояния трехмерной джозефсоновской среды относительно малых флуктуаций скачков фазы на контактах. Показано, что при любой форме флуктуаций существует такое значение параметра пиннинга I_0 , что в случае $I < I_0$ мейснеровская конфигурация остается устойчивой. Проанализирована причина отсутствия неустойчивости при малых I . Неустойчивость возникает, когда квадратичная форма второй вариации потенциала Гиббса G не является положительно определенной. При малых значениях I вклад G от джозефсоновской энергии мал. Вторая вариация магнитной энергии, являющейся другой составляющей G , всегда представляет собой положительно определенную квадратичную форму. Поэтому неустойчивость может возникнуть только при конечном значении I . Это утверждение справедливо не только для мейснеровской конфигурации, но и для любой равновесной. При $I < I_0$ устойчивость сохраняется вплоть до границы мейснеровского состояния, а затем во всем образце возникает последовательность параллельных границе плоских вихрей. Таким образом, при $I < I_0$ имеют место не линейные вихри, а плоские. Рассчитаны конфигурации токов и профиль магнитного поля внутри образца при $I < I_0$. Метод расчета основан на анализе непрерывного видоизменения токовой структуры, ведущего к уменьшению ее потенциала Гиббса.

Введение

В массивных сверхпроводниках 2-го рода, помещенных во внешнее магнитное поле H_e , начиная со значения $H_e = H_{C1}$ становится энергетически выгодным переход в смешанное состояние, когда магнитное поле частично проникает в толщу сверхпроводника в виде вихревых нитей. В то же время уравнения электродинамики формально допускают вплоть до термодинамического критического поля H_C равновесные решения мейснеровского типа с проникновением поля в тонкую приповерхностную область. Таким образом, существует возможность задержки проникновения вихрей в сверхпроводник для полей $H_e > H_{C1}$. С точки зрения термодинамики это явление представляет собой „перегрев“ мейснеровского состояния. Максимальное поле H_{S1} , до которого возможен „перегрев“, определяется как граница устойчивости мейснеровского состояния по отношению к малым флуктуациям [1,2].

Аналогичная картина имеет место и в высокотемпературных сверхпроводниках (ВТСП). Физика происходящих в них процессов заметно отличается от того, что происходит в обычных сверхпроводниках. Важнейшую роль играет тот факт, что ВТСП состоят из сверхпроводящих гранул, в точках соприкосновения которых друг с другом возникают джозефсоновские контакты. Поэтому иной вид имеют вихри, иной физике соответствуют критические поля. В частности, характерные значения полей столь малы, что речь не может идти о переходе гранул в нормальное состояние (поэтому поле H_{S2} , до кото-

рого существует мейснеровское решение, отличается от термодинамического поля H_C). Вихри располагаются не в отдельных гранулах, а вовлекают в себя большое количество их, при этом токи проходят через джозефсоновские контакты между гранулами. Достаточно вспомнить, что такой контакт является существенно нелинейным элементом, чтобы представить себе сложность возникающей картины. Добавим к этому и зацепление (пиннинг) вихрей на пустотах между гранулами. Все эти моменты делают исследование поведения ВТСП во внешнем магнитном поле достаточно сложной задачей, требующей специального подхода.

В работах [3,4] предложена простая модель гранулированного ВТСП, представляющая собой кубическую решетку, состоящую из сверхпроводящих проводов, каждый из которых содержит один джозефсоновский контакт. На базе условий квантования флюксоида в ячейках этой среды получена система уравнений для расчета структуры возможных токовых состояний. Как показали расчеты [3–7], такой модели, которую принято называть трехмерной упорядоченной джозефсоновской средой, присущи все свойства, характерные для сверхпроводников во внешнем магнитном поле: мейснеровские экранирующие токи, взаимодействующие друг с другом вихри, набор характерных магнитных полей и т.п., причем даже количественные соотношения аналогичны имеющим место в обычных и высокотемпературных сверхпроводниках. Поэтому использование этой модели целесообразно при анализе процессов, происходящих в реальных ВТСП.

В работе [5] на базе анализа матрицы квадратичной формы для второй вариации потенциала Гиббса рассмотрена устойчивость мейсснеровского состояния трехмерной джозефсоновской среды относительно малых флуктуаций скачков фазы на контактах. Анализ формы критических флуктуаций показывает, что при всех не очень малых значениях так называемого параметра пиннинга I , определение которого будет дано далее, они представляют собой быстро затухающие вглубь (на нескольких слоях) периодически повторяющиеся знакопеременные структуры шириной в одну ячейку.

В работах [6,7] проведен расчет конфигураций, в которые в результате развития неустойчивостей переходит мейсснеровское состояние. При этом использован подход, основанный на анализе непрерывного видоизменения конфигурации, протекающего в направлении уменьшения потенциала Гиббса. Расчеты показали, что характер вихревой картины определяется величиной параметра пиннинга I . При значениях I , больших некоторой критической величины I_C , находящейся в диапазоне 0.7–0.8, при любом значении внешнего поля возникает приграничная токовая структура, полностью компенсирующая внешнее поле вдали от границы. В [6] проведено подробное исследование этого случая. Если $I < I_C$, то такая ситуация реализуется лишь до внешнего поля H_{\max} , величина которого зависит от I . При $H > H_{\max}$ поле проникает в среду на бесконечную глубину. Этот случай подробно исследован в работе [7].

Однако при очень малых значениях параметра пиннинга ($I \leq 0.1$), как показало исследование, проведенное в [5], неустойчивость указанного типа не обнаруживается. Этот факт порождает следующие вопросы. В чем причина отсутствия неустойчивости при малых I ? Не возникают ли в этом случае неустойчивости относительно флуктуаций другой формы? При каких полях и во что преобразуется мейсснеровское состояние при адиабатическом увеличении внешнего магнитного поля? Настоящая работа посвящена поиску ответов на поставленные вопросы.

Исследование устойчивости мейсснеровской конфигурации

Рассмотрение будем, как и в [5], проводить на модели, представляющей собой кубическую решетку с периодом a , состоящую из сверхпроводящих проводов радиусом δ , каждая связь которой содержит один джозефсоновский контакт, причем все контакты имеют малые размеры и обладают одной и той же величиной критического тока J_C . Внешнее магнитное поле \mathbf{H}_e направлено вдоль главной оси решетки. Токовое распределение имеет плоскую структуру, т.е. во всех параллельных плоскостях, перпендикулярных полю \mathbf{H}_e и расположенных на расстоянии a друг от друга, токи распределены идентично.

Алгоритм расчета таков. Рассмотрим сначала токовую конфигурацию мейсснеровского типа, в которой вдоль поверхности образца текут параллельные ей токи, замыкающиеся на бесконечности. Сила тока, протекающего в граничном слое, равна $J_1 = J_C \sin \varphi_1$. По мере углубления в образец имеем $J_m = J_C \sin \varphi_m$ для $m = 2, 3, \dots$

В [5] показано, что мейсснеровская конфигурация описывается рекуррентным законом

$$\varphi_{m+1} = 2\varphi_m - \varphi_{m-1} + I \sin \varphi_m \quad (m \geq 2), \quad (1)$$

где $I = 2\pi\mu_0(a - 2\delta)^2 J_C / a\Phi_0$ — так называемый параметр пиннинга.

В качестве граничных условий к (1) используются стремление к нулю φ_m при стремлении m к бесконечности, а также условие

$$\varphi_1 - \varphi_2 = -I \sin \varphi_1 + 2\pi h, \quad (2)$$

где $h = H_e / H_0$ — нормированная напряженность внешнего поля, $H_0 = \Phi_0 / \mu_0 S$ — значение внешнего поля, при котором через каждую ячейку площадью $S = (a - 2\delta)^2$ проходит один квант магнитного потока Φ_0 .

Задаваясь значениями скачка фазы φ_1 в приграничном ряду, будем численно искать соответствующие значения φ_2 , при которых существует решение в виде монотонно убывающей с ростом m комбинации значений φ_m . Таким образом находим распределение φ_k для невозмущенного мейсснеровского состояния. Из условия (2) найдем соответствующее полученному решению значение нормированной напряженности внешнего магнитного поля h .

Затем исследуем устойчивость мейсснеровского состояния относительно малых флуктуаций скачков фазы на контактах. На рис. 1 представлена ситуация, в которой фазы, соответствующие мейсснеровской конфигурации, получили бесконечно малые приращения. В связях, параллельных границе, они добавились к значениям φ_m ($m = 1, 2, 3, \dots$), а в участках, перпендикулярных ей, скачки фазы равны этим добавкам, так как ранее они равнялись нулю. Обозначим буквой D область, в которой расположено возмущение, т.е. от границы до N -го параллельного ей ряда и от перпендикулярного границе ряда с приращениями η_k на K рядов вправо.

Для исследования устойчивости используем методику, предложенную в [5], т.е. рассчитываем элементы матрицы Q квадратичной формы, описывающей изменение потенциала Гиббса G при малых флуктуациях, и находим ее собственные значения. Увеличивая выбранное значение φ_1 , определяем $\varphi_{1 \min}$, при котором среди собственных значений матрицы Q появляются отрицательные. Из (2) находим значение нормированной напряженности внешнего магнитного поля $h(\varphi_{1 \min})$, которое и является полем перегрева h_{S1} .

В [5] получены выражения для всевозможных вторых производных. Эти выражения для случая, когда хотя бы

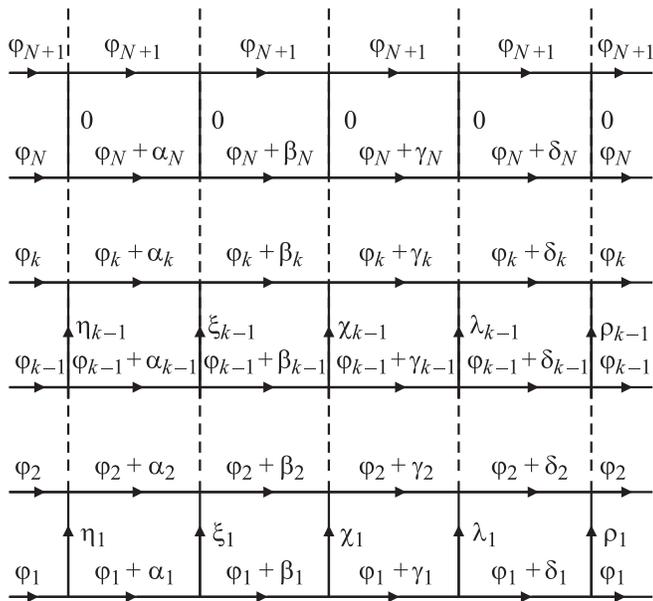


Рис. 1. Распределение скачков фазы в рассматриваемой конфигурации.

одна из производных берется по β_k (для определенности), записываются следующими формулами:

$$\frac{\partial^2 G}{\partial \beta_k \partial \beta_i} = \cos \varphi_k \cos \varphi_i \left[\frac{2}{\cos^2 \varphi_N} + \frac{4 + I}{\cos \varphi_N} + 2(3 + I)(N - M) \right] - \delta(i + 1 - k) - \delta(i - 1 - k) + [2 + (4 + I) \cos \varphi_k - \delta(k - 1)] \delta(i - k) + \frac{\cos \varphi_k \delta(i + 1 - N) + \cos \varphi_i \delta(k + 1 - N)}{\cos \varphi_N}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial \beta_k \partial \gamma_i} = - \cos \varphi_k \cos \varphi_i \left[\frac{2}{\cos \varphi_N} + (4 + I)(N - M) \right] - 2 \cos \varphi_k \delta(i - k), \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial \beta_k \partial \delta_i} = \cos \varphi_k \cos \varphi_i (N - M). \quad (5)$$

В выражениях (3)–(5) $M \equiv \max\{k, i\}$, а $\delta(x)$ — это дельта-функция, равная единице при $x = 0$ и нулю при всех других значениях.

Соответствующими заменами аргументов формулы (3)–(5) могут быть преобразованы в производные по другим переменным. Поэтому можно записать матрицу Q квадратичной формы в виде, показанном на рис. 2 для случая $N = 4, K = 4$. Отметим, что в работе [5] использованы значения $K = 9$ и 10 . Рис. 2 лишь поясняет характер симметрии матрицы, учитывающий следующие равенства

$$\frac{\partial^2 G}{\partial \alpha_k \partial \beta_i} = \frac{\partial^2 G}{\partial \beta_i \partial \alpha_k} = \frac{\partial^2 G}{\partial \alpha_i \partial \beta_k} = \frac{\partial^2 G}{\partial \beta_k \partial \alpha_i} \text{ и т.д.} \quad (6)$$

Значения элементов матрицы Q при любой выбранной толщине слоя N могут быть рассчитаны по формулам (3)–(5) с использованием значений φ_k для невозмущенного мейсснеровского состояния, полученных при решении системы (1). Увеличение ширины рассматриваемой конфигурации K ведет к увеличению размеров матрицы путем многократного добавления основного матричного модуля, смещаемого на $(N - 1)$ элемент по диагонали, что можно понять из рис. 2.

Конфигурация неустойчива, если квадратичная форма, соответствующая второй вариации потенциала Гиббса, не является положительно определенной. Приведем квадратичную форму к каноническому виду [8]. Для этого найдем собственные векторы матрицы Q , на основе которых можно записать линейное преобразование S , приводящее ее к диагональному виду Q' : $Q' = SQS^{-1}$. Собственные значения будут стоять на диагонали матрицы Q' , т.е. будут являться коэффициентами при соответствующих квадратах в диагонализированной квадратичной форме. Если все собственные значения положительны, то квадратичная форма положительно определенная и конфигурация устойчива. Существование отрицательных собственных значений свидетельствует о неустойчивости конфигурации.

Форма флуктуации, относительно которой имеется неустойчивость, определяется той комбинацией исходных координат, которая после преобразования S обращает в нуль значения всех новых координат, кроме той, которой соответствует отрицательное собственное значение. Используя для нахождения этой комбинации обратное преобразование S^{-1} , действующее на диагональную матрицу, приходим к выводу: если отрицательным является j -е собственное значение, то j -й столбец матрицы S^{-1} даст нормированные значения $\alpha_1, \dots, \alpha_{N-1}, \beta_1, \dots, \beta_{N-1}$ и т.д. „Нормированность“ в данном случае означает, что все найденные значения могут быть умножены на одно и то же произвольное бесконечно малое значение.

	α_1	α_2	α_3	β_1	β_2	β_3	γ_1	γ_2	γ_3	δ_1	δ_2	δ_3
α_1	A	B	C	D	E	G	H	I	K	0	0	0
α_2	B	J	L	E	N	P	I	R	S	0	0	0
α_3	C	L	T	G	P	W	K	S	Z	0	0	0
β_1	D	E	G	A	B	C	D	E	G	H	I	K
β_2	E	N	P	B	J	L	E	N	P	I	R	S
β_3	G	P	W	C	L	T	G	P	W	K	S	Z
γ_1	H	I	K	D	E	G	A	B	C	D	E	G
γ_2	I	R	S	E	N	P	B	J	L	E	N	P
γ_3	K	S	Z	G	P	W	C	L	T	G	P	W
δ_1	0	0	0	H	I	K	D	E	G	A	B	C
δ_2	0	0	0	I	R	S	E	N	P	B	J	L
δ_3	0	0	0	K	S	Z	G	P	W	C	L	T

Рис. 2. Матрица квадратичной формы для случая $N = 4, K = 4$.

Результаты расчета и их анализ

Алгоритм расчета таков. Задавая значение φ_1 и используя рекуррентный механизм (1), находим значения φ_k для невозмущенного мейсснеровского состояния. Далее рассчитываем элементы матрицы Q , используя найденные величины φ_k , и находим ее собственные значения. Увеличивая выбранное значение φ_1 , определяем $\varphi_{1\min}$, при котором среди собственных значений матрицы Q появляются отрицательные. Из (2) находим значение нормированной напряженности внешнего магнитного поля $h(\varphi_{1\min})$, которое и является полем перегрева h_{S1} . Соответствующий отрицательному собственному значению столбец матрицы S^{-1} позволяет найти форму искомой флуктуации.

Анализ, проведенный в [5], показал, что в первую очередь неустойчивость возникает относительно периодических флуктуаций бесконечной ширины. Для исследования таких флуктуаций приходится изменить рассматриваемую конфигурацию. Пусть флуктуация имеет структуру, получаемую периодической трансляцией области D (рис. 1) вправо и влево, т.е. первый вертикальный ряд слева от левой границы области D совпадает с ее правым крайним рядом, а первый ряд справа от правой границы D совпадает с ее левым крайним рядом. Несложный анализ показывает, что в этом случае нужно к элементам в правом верхнем и левом нижнем углах матрицы Q прибавить соответствующие элементы структур, изображенных соответственно на рис. 3, *a* и *b*. При $K \geq 5$ эти структуры просто заменяют соответствующие нулевые элементы в углах.

На рис. 4 приведены результаты анализа устойчивости мейсснеровского состояния относительно флуктуаций различной формы. Цифры обозначают период флуктуаций, относительно которых наблюдается неустойчивость, стрелки указывают области (φ_1, I) , в которых эта неустойчивость существует. Отметим, что все флуктуации с четным периодом обладают дополнительной антисимметрией, т.е. последовательность скачков фазы

Н	И	К	Д	Е	Г
И	Р	С	Е	Н	Р
К	С	З	Г	Р	В
0	0	0	Н	И	К
0	0	0	И	Р	С
0	0	0	К	С	З

a

Н	И	К	0	0	0
И	Р	С	0	0	0
К	С	З	0	0	0
Д	Е	Г	Н	И	К
Е	Н	Р	И	Р	С
Г	Р	В	К	С	З

b

Рис. 3. К расчету матриц для периодических и антисимметричных бесконечных флуктуаций.

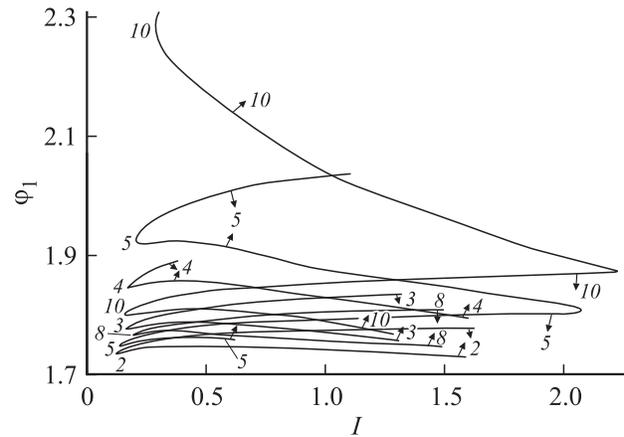


Рис. 4. Результаты анализа устойчивости мейсснеровского состояния относительно флуктуаций различной формы.

в граничном ряду, например, для флуктуации с периодом 8, имеет вид $(a, b, c, d, -a, -b, -c, -d)$, а с периодом 2 — вид $(a, -a)$. Это наводит на мысль, что эти же результаты могут быть получены антисимметричной периодической трансляцией вправо и влево области D для K , в 2 раза меньшего, когда по модулю первый вертикальный ряд слева от левой границы области D должен совпадать с ее правым крайним рядом, а первый ряд справа от правой границы D — с ее левым крайним рядом, а по знаку они должны быть противоположными. Это значит, что симметричный вариант, например для $K = 10$, может быть получен как антисимметричный для $K = 5$. Этот подход обладает тем преимуществом, что матрица для антисимметричного варианта ширины K дает результаты для симметричного варианта шириной в 2 раза больше, например, при $K = 10$ анализируется устойчивость относительно симметричных флуктуаций для $K = 20$. Для перехода к антисимметричному варианту нужно к элементам в правом верхнем и левом нижнем углах матрицы Q прибавить взятые с противоположным знаком элементы структур, изображенных соответственно на рис. 3, *a* и *b*.

Из кривых рис. 4 можно сделать следующие важные выводы.

а) Наименьшее значение φ_1 , при котором возникает неустойчивость, при всех I соответствует флуктуациям, имеющим вид периодически повторяющихся антисимметричных структур шириной в одну ячейку (т.е. с периодом 2). Этот случай подробно исследован в [5].

б) При малых значениях параметра пиннинга ($I < 0.1$) неустойчивости не обнаруживаются ни при какой форме флуктуаций. В [5] отсутствие неустойчивости отмечалось только для флуктуаций с периодом 2 и высказывалось предположение, что неустойчивость может иметь место для флуктуаций другой формы. Поскольку отсутствие неустойчивости оказалось универсальным фактом, то представляет интерес анализ его причин. Рассмотрим произвольную равновесную конфигурацию. Ее потенциал Гиббса (на

1 m высоты) записывается в виде [6]

$$G = E_J + E_H - \int BHdV, \quad (7)$$

где E_J и E_H — джозефсоновская и магнитная энергии единицы длины (вдоль \mathbf{H}_e), равные

$$E_J = \frac{E_C}{a} \sum_k (1 - \cos \psi_k) = IE_0 \sum_k (1 - \cos \psi_k), \quad (8)$$

$$E_H = \sum_i \frac{B_i^2}{2\mu_0} V_i = E_0 \frac{1}{2} \sum_i \left(\sum_l \psi_{il} \right)^2, \quad (9)$$

где $E_C = \Phi_0 J_C / 2\pi$ — энергия джозефсоновского контакта; $B_i = \Phi_i / S$ — магнитная индукция в i -й ячейке; $B_i^2 / 2\mu_0$ — плотность магнитной энергии в i -й ячейке; $V_i = S$ — объем единицы длины; $E_0 = \Phi_0^2 / 4\pi^2 \mu_0 S$ — нормировочная постоянная. Суммирование по k в (8) ведется по всем джозефсоновским контактам, по i в (9) — по всем ячейкам, по l во внутренней сумме в (9) — по всем 4-м контактам i -й ячейки (с учетом знака).

Как известно, в рассматриваемой геометрии термодинамическая напряженность магнитного поля H во всех точках одна и та же и равна напряженности внешнего поля H_e , поэтому последний член в (7) можно записать в виде

$$H_e \sum_i \Phi_i = \frac{H_e \Phi_0}{2\pi} \sum_i \sum_l \psi_{il} = \frac{H_e \Phi_0}{2\pi} \sum_{p,n} \psi_{p,n}, \quad (10)$$

где ψ_{il} — скачок фазы в l -м контакте i -й ячейки, а сумма по p и n берется по всем контактам граничных рядов.

Рассмотрим близкие к нулю значения I , при которых вкладом джозефсоновской энергии (8) в потенциал Гиббса (7) можно пренебречь. Скачок фазы на произвольном контакте представим в виде $\psi_{il} = \psi_{i10} + \delta_{il}$, где ψ_{i10} — невозмущенное значение, а δ_{il} — флуктуация.

Тогда в (9) выражение $(\sum_l \psi_{il})^2$ будет содержать члены вида $\psi_{i10} \psi_{mk0}$, $\psi_{i10} \delta_{mk}$ и $\delta_{il} \delta_{mk}$. Из них в квадратичную форму Q будут входить только последние, причем со знаком плюс. Член (10) линеен по всем δ_{pn} и не даст вклада в Q . Таким образом, квадратичная форма Q при малых I является положительно определенной при любых формах флуктуаций, т.е. устойчивыми являются любые равновесные состояния, а не только мейсснеровское. С увеличением I растет вклад в потенциал Гиббса джозефсоновской энергии (8), и при каком-то значении I_0 появляется неустойчивость. Из рис. 4 можно видеть, что для разных форм флуктуаций значения I_0 несколько различаются. Для антисимметричных флуктуаций с периодом 2, которые представляют максимальный интерес как возникающие при минимальном значении внешнего магнитного поля, значение I_0 равно 0.11.

Таким образом, при $I < I_0$ мейсснеровское состояние остается устойчивым вплоть до границы мейсснеровского состояния h_{S2} , т.е. поле перегрева h_{S1} равняется h_{S2} . Когда внешнее поле становится больше этого значения,

мейсснеровская конфигурация преобразуется в последовательность параллельных границе плоских вихрей. Сформулированное выше утверждение об устойчивости при малых I всех равновесных состояний позволяет исключить возможность неустойчивости какой-либо из таких последовательностей и последующего перехода ее в решетку линейных вихрей. Иначе говоря, при $I < I_0$ имеют место не линейные вихри, как при больших I , а плоские, т.е. при $I < I_0$ трехмерная упорядоченная джозефсоновская среда описывается теми же уравнениями, что и длинный джозефсоновский упорядоченный контакт [9,10].

Эти утверждения подтверждаются характером процессов, происходящих уже при I , не намного превышающих I_0 . В [7] исследуются конфигурации, в которые переходит мейсснеровское состояние при превышении внешним полем значения h_{\max} , для случаев $I_0 < I < I_C$. Например, при $I = 0.7$ магнитное поле начинает проникать внутрь образца в виде квазиоднородной последовательности плоских вихрей. С ростом поля плоские вихри распадаются на отдельные линейные вихри с центрами, расположенными в ячейках, соседствующих по диагонали. При дальнейшем росте поля решетка линейных вихрей уплотняется, при этом ячейки с нулевым флюксоидом, начиная от границы, постепенно „заполняются“. Однако при I , близких к I_0 , картина другая. Например, согласно [7], при $I = 0.2$ плоские вихри уже не распадаются на отдельные линейные. С ростом поля последовательность плоских вихрей становится все более плотной, и только после того, как расстояния между ними уменьшаются до одной ячейки, „пустые“ (т.е. с нулевым флюксоидом) ячейки, начиная от границы, постепенно „заполняются“ линейными вихрями. Можно сделать вывод, что с уменьшением I картина все менее отличается от последовательности плоских вихрей, и не является удивительным, что при $I < I_0$ эти различия исчезают совсем.

На рис. 5 приведены полученные в [6] зависимости $h_{S1}(I)$, $h_{S2}(I)$ и $h_{\max}(I)$. Кривая $h_{S1}(I)$ начинается от

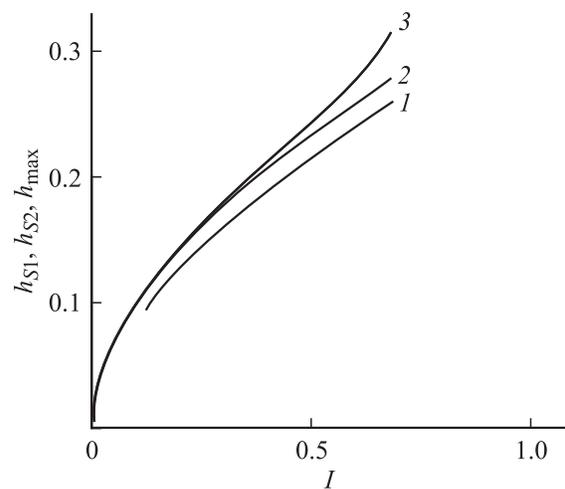


Рис. 5. Полученные в [6] зависимости $h_{S1}(I)$ (1), $h_{S2}(I)$ (2) и $h_{\max}(I)$ (3).

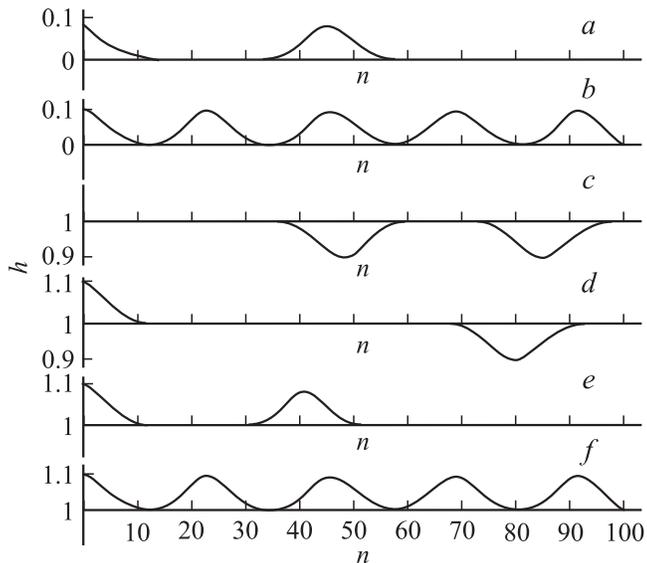


Рис. 6. Зависимости магнитного поля внутри образца от расстояния до границы для некоторых значений внешнего магнитного поля: *a* — $h = 0.10109$, *b* — 0.1012 , *c* — 1.000 , *d* — 1.10109012 , *e* — 1.10109028 , *f* — 0.1012 .

Видно, что в глубь контакта вихри не проходят. При $h = 0.1012$ (*b*) наблюдается квазиоднородная последовательность вихрей во всем образце. При $h = 1.000$ (*c*) имеет место аналог мейсснеровского режима, когда число последовательных ячеек у границы, содержащих по одному кванту магнитного потока Φ_0 , становится больше, чем в глубине образца. При $h = 1.10109012$ (*d*) это число достигает максимума. При малейшем росте поля ($h = 1.10109028$) в образец начинают проникать вихри с двумя квантами Φ_0 (*e*). Чем больше поле, тем больше таких вихрей войдет в образец. При $h = 1.1012$ (*f*) ситуация соответствует квазипериодической последовательности вихрей с чередованием одного и двух квантов Φ_0 в ячейке. Периодичность зависимости ситуации от h подтверждается подобием кривых *a* и *e*, а также *b* и *f*, значения h для которых различаются на единицу.

На первый взгляд может показаться, что при проникновении в образец вихрей с двумя квантами Φ_0 в нем не остается ячеек без Φ_0 (график *e*). Однако это не так. Если бы длина образца была больше, то возможно было бы обнаружить такие ячейки в глубине образца (с номерами больше 100).

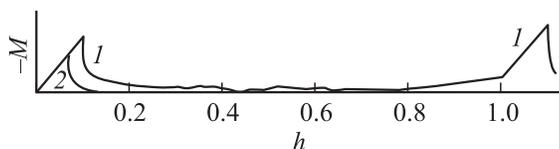


Рис. 7. Зависимости магнитного момента единицы объема $-M$ от внешнего магнитного поля, полученные из системы разностных уравнений (1) (кривая 1) и из дифференциального уравнения синус-Гордона [11] (2).

На рис. 7 приведен график зависимости намагниченности, т.е. магнитного момента единицы объема $-M$, от внешнего магнитного поля (кривая 1) для $I = 0.1$. Отметим периодичность зависимости по магнитному полю с периодом единица. Она связана с возможностью существования решения, в котором все ячейки содержат целое число квантов магнитного потока Φ_0 . Это решение является аналогом мейсснеровского состояния, так что при дальнейшем росте магнитного поля в образец будут проникать вихри с большим на единицу числом Φ_0 . Отклонения кривой 1 на рис. 7 от строгой периодичности связаны с тем, что описанное решение не реализуется в точности при адиабатическом росте магнитного поля, так как, хоть пиннинг и мал, но он существует.

Малость значения параметра пиннинга ($I = 0.1$) наводит на мысль о возможном переходе от системы разностных уравнений (1) к дифференциальному уравнению синус-Гордона [4,11], решение которого дает значение $h_{S2} = \sqrt{I/\pi} = 0.10068$, что достаточно близко к полученному нами значению 0.10109 . На рис. 7 приведена полученная в [11] зависимость $-M(h)$ (2). Однако эта зависимость не является периодической и, кроме того, заметно отличается от кривой 1 при малых полях. Периодичность кривой 1 рис. 7, как было сказано выше, является следствием дискретности среды и поэтому не может появиться в непрерывном случае, т.е. на кривой 2. Причина различий при малых полях заключается в том, что в [11] предполагается, что вся последовательность вихрей устанавливается сразу же, как только это становится энергетически выгодным, т.е., как показано в [11], при $h = h_{C1} = 2\sqrt{I/\pi^2} \approx 0.064$. В подходе, развитом в [10] и примененном в настоящей работе, исследуется возможность „перегрева“ этого состояния, т.е. рассматривается последовательная трансформация токовой конфигурации при адиабатическом росте магнитного поля. При этом мгновенный переход к энергетически выгодному состоянию при $h = h_{C1}$ невозможен. Отметим, что, как видно из рис. 7, и после достижения границы возможного „перегрева“ система не переходит в наиболее выгодное энергетическое состояние. Причиной этого является пиннинг, который, хотя и мал, но существует. В ситуации же, рассмотренной в [11], пиннинг отсутствует.

Заключение

Рассмотрена устойчивость мейсснеровского состояния трехмерной джозефсоновской среды относительно малых флуктуаций скачков фазы на контактах. Показано, что при любой форме флуктуаций существует такое значение параметра пиннинга I_0 , что в случае $I < I_0$ мейсснеровская конфигурация остается устойчивой.

Проведен анализ причины отсутствия неустойчивости при малых I . Неустойчивость возникает, когда квадратичная форма второй вариации потенциала Гиббса не является положительно определенной. При близких к

нулю значениях I вклад в потенциал Гиббса от джозефсоновской энергии, пропорциональной I , мал. Вторая вариация магнитной энергии, являющейся другой составляющей потенциала Гиббса, всегда представляет собой положительно определенную квадратичную форму. Поэтому неустойчивость может возникнуть только при каком-то конечном значении I . Это утверждение справедливо не только для мейснеровской конфигурации, но и для любой равновесной.

Таким образом, при $I < I_0$ мейснеровское состояние остается устойчивым вплоть до границы мейснеровского состояния h_{S2} , т.е. поле перегрева h_{S1} равняется h_{S2} . Когда внешнее поле становится больше этого значения, мейснеровская конфигурация преобразуется в последовательность параллельных границе плоских вихрей. Сформулированное выше утверждение об устойчивости при малых I всех равновесных состояний позволяет исключить возможность неустойчивости какой-либо из таких последовательностей и последующего перехода ее в решетку линейных вихрей. Иначе говоря, при $I < I_0$ имеют место не линейные вихри, как при больших I , а плоские, т.е. при $I < I_0$ трехмерная упорядоченная джозефсоновская среда описывается теми же уравнениями, что и длинный джозефсоновский упорядоченный контакт.

Проведен расчет конфигурации, в которую переходит мейснеровское состояние при малом превышении магнитным полем значения поля „перегрева“, и прослежено ее дальнейшее развитие. Компьютерные расчеты были выполнены для случая $I = 0.1 < I_0$, при котором $h_{S1} = 0.101$. Длина образца равнялась 200 ячеек.

Расчет показал, что при $h = 0.10109$ конфигурация еще сохраняет черты приграничной структуры. При больших значениях h вплоть до единицы наблюдаются квазиоднородные последовательности вихрей, расстояния между которыми колеблются около среднего значения, которое убывает с ростом h . Начиная с некоторого h вихри могут занимать соседние ячейки. При $h = 1$ поле таково, что внешний магнитный поток через каждую ячейку равен Φ_0 . При этом система уравнений, описывающая задачу, может быть удовлетворена решением, при котором все токи, а также суммарный магнитный момент всего контакта обращаются в нуль. Однако это лишь одно из бесчисленного множества возможных решений системы, и предыстория развития, т.е. адиабатическое увеличение внешнего поля, не дает ему возможности реализоваться, так как к моменту, когда $h = 1$, в глубине контакта еще существуют ячейки, не содержащие вихрей. При $h = 1$ по мере приближения к краю контакта последовательность вихрей, занимающих соседние ячейки, становится длиннее, чем в глубине. При дальнейшем росте h длина этой последовательности растет и достигает максимума при $h = 1.10109012$, когда отклонение от ситуации с одним Φ_0 в каждой ячейке проявляется только в 77-й ячейке от края контакта. При $h = 1.10109028$ вблизи границы контакта начинают возникать вихри с $2\Phi_0$. Уже при $h = 1.1012$ такие

вихри образуют квазиоднородную последовательность по всей длине образца. При дальнейшем росте h период этой последовательности, т.е. среднее расстояние между соседними вихрями, будет уменьшаться, а среднее магнитное поле внутри образца — расти. Далее в него начнут проникать вихри с $3\Phi_0$ и т.д.

Процесс проникновения вихрей с $(k + 1)\Phi_0$ в образец, каждая ячейка которого содержит $k\Phi_0$, полностью аналогичен проникновению вихрей с одним Φ_0 в мейснеровскую конфигурацию. Этот факт подтверждается тем, что зависимость магнитного момента образца от внешнего поля h имеет период единица, а также видом зависимостей магнитного поля в ячейках от их расстояния до границы.

Казалось бы, при малых значениях параметра пиннинга ($I = 0.1$) решение системы разностных уравнений должно быть аналогично решению дифференциального уравнения синус-Гордона, соответствующего отсутствию пиннинга. Однако непосредственный расчет показал, что дифференциальное уравнение не дает периодичности по магнитному полю. Имеются также существенные различия при малых полях. Дело в том, что периодичность решения системы разностных уравнений является следствием дискретности среды и поэтому не может проявиться в дифференциальном уравнении. Причина различий при малых полях заключается в том, что в отсутствие пиннинга предполагается, что вся последовательность вихрей устанавливается сразу же, как только это становится энергетически выгодным. В подходе, примененном в настоящей работе, исследуется возможность „перегрева“ этого состояния, т.е. рассматривается последовательная трансформация токовой конфигурации при адиабатическом росте магнитного поля. При этом мгновенный переход к энергетически выгодному состоянию невозможен из-за пиннинга, который хоть и мал, но существует. По той же причине и после достижения границы возможного „перегрева“ система не переходит в наиболее выгодное энергетическое состояние, которому соответствует равномерное распределение вихрей по образцу.

Список литературы

- [1] Галайко В.П. // ЖЭТФ. 1966. Т. 50. С. 717.
- [2] Kramer L. // Phys. Rev. 1968. Vol. 170. P. 475.
- [3] Zelikman M.A. // Supercond. Sci. Tech. 1997. Vol. 10. N 7. С. 469–474.
- [4] Zelikman M.A. // Supercond. Sci. Tech. 1997. Vol. 10. N 11. С. 795–800.
- [5] Зеликман М.А. // ЖТФ. 2008. Т. 78. Вып. 8. С. 14–21.
- [6] Зеликман М.А. // ЖТФ. 2009. Т. 79. Вып. 9. С. 47–57.
- [7] Зеликман М.А. // ЖТФ. 2010. Т. 80. Вып. 3. С. 21–30.
- [8] Курош А.Г. Курс высшей алгебры. М.: Наука, 1971. 431 с.
- [9] Dorogovtsev S.N., Samuhin A.N. // Europhys. Lett. 1994. Vol. 25. P. 693–698.
- [10] Зеликман М.А. // ЖТФ. 2009. Т. 79. Вып. 12. С. 19–25.
- [11] Кулик И.О., Янсон И.К. Эффект Джозефсона в сверхпроводящих туннельных структурах. М.: Наука, 1970. 272 с.